كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة3

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

ملاحظة: ميّز ما بين نوعين من المتغيرات:

1) متغير عشوائي منفصل

2) متغير عشوائي مستمر:

وطبيعة التجربة الاحتمالية وحسبنا: هي التي تدل على نوع المتغير كأن نقول مثلاً:
عدد المكالمات الهاتفية في فترة زمنية معينة يدل على متغير عشوائي منفصل (الأعداد قابلة للعد)

بينما إذا قلنا الزمن اللازم لإجراء مكالمة هاتفية نلاحظ أن الزمن غير قابل للعد وإنما مستمر
فهذا يدل على متغير عشوائي مستمر ومنفصل فإذا أعطينا تابع الاحتمال شكل يكون متغير

النوع الثاني من المتغيرات العشوائية المنفصلة:

عند تكرار تجربة برنولي عدد من المرات نحصل على متغير عشوائي يدل على عدد النجاحات
مثال: عند رمي قطعة نقود 5 مرات يكون هناك عدد من النجاحات والفشل
⇐ نلاحظ أن عدد النجاحات في هذه الحالة $\{0,1,2,3,4,5\}$
هنا لدينا متغير عشوائي ندعوه حداني أو ثنائي يدل على عدد الشارات
عند ظهور 3 شارات H,H,H,T,T يمكن تبديل أماكن الشارات

$$\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

أي القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي الحداني المنفصل

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot q^{1-k}$$

$$p+q=1$$

مثال:

x	0	1	2	3	4	5
$x=k$	$\frac{1}{32}$					

$$P(X=0)=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

1- حساب احتمال الحصول على شعار واحد على الأقل $P(X\geq 0)=1-P(X=0)$

2- احسب احتمال الحصول على شعارين على الأكثر

$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

التوقع الرياضي للحدين: $E(X)=np$

وتباين $V(X)=npq$

التوقع الرياضي للسؤال: $E(X)=5(\frac{1}{2})=2,5$

التباين: $V(X)=5\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1,25$

يستخدم هذا التوزيع في تجارب برنولية تكرر عدد من المرات

حيث: 1- n عدد المحاولات (عدد تكرار التجربة)

2) المحاولات مستقلة [كل محاولة مستقلة عن الأخرى] كالسحب مع إعادة

واحتمال النجاح ثابت لا يتغير في جميع المحاولات

مثال: إن نسبة الإنتاج لأحد مصانع المصابيح 10%

التالف

[تجربة برنولية ← إما تالف أو سليم)

نأخذ عينة من 5 مصابيح بشكل عشوائي أوجد الاحتمالات الآتية:

1) مصباح واحد تالف

2) مصباح واحد تالف على الأقل:

3) الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر

4) أوجد العدد المتوقع للمصابيح التالفة:

5) الحصول على جميع المصابيح تالفة

الحل: $p = 10\%$

نلاحظ أن النجاح يدل على الحصول على مصباح تالف

$q = 90\%$

تكررت التجربة 5 مرات $n = 5$

$$p(X=k) = \binom{5}{k}(0.1)^k(0.9)^{5-k}$$

1. $p(X=1) = \binom{5}{1}(0.1)^1(0.9)^{5-1}$

$= 0.32805$

2. $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0.32805$

3. $p(X \leq 1) = p(X=0) + p(X=1)$

4. $E(X) = np = 5(0.1) = 0.5$

5. $p(X=5) = \binom{5}{5}(0.1)^5$

التوزيع 3: بواسون

هو توزيع منفصل يدل على عدد الأحداث في فترة زمنية محددة بشرط أن تكون الأحداث مستقلة عن بعضها

من صفات التوزيع:

① $p(X=k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$

حيث k: عدد الأحداث

λ: المعدل المتوسط لحدوث الأحداث

والتوقع الرياضي والتباين له هو نفسه λ

أي $E(X) = \lambda$ و $V(X) = \lambda$

مثال: إذا كان مركز الخدمة الزبائنية يتلقى 10 مكالمات في الساعة

عندئذ نستخدم توزيع بواسون لتقدير احتمال تلقي أكثر أو أقل من هذا العدد خلال ساعة معينة.

يكون القانون على الشكل التالي: $P(X=k) = \frac{e^{-10}(10)^k}{k!}$

مثال: احتمال تلقي 13 مكالمات

$$P(X=13) = \frac{e^{-10}(10^3)}{3!}$$

و $e \simeq 2.718$

بواسون: عدد مكالمات / احداث في زمن محدد

مثال: ان معدل مرور السيارات في الساعة في مكان ما 5 سيارات

1) احسب احتمال مرور 8 سيارات في ساعة واحدة:

$$P(X=5) = \frac{e^{-5}(10)^k}{k!}$$

$$P(X=8) = \frac{e^{-5}\cdot 5^8}{8!} = 0.652$$

توقع وتباين نفسه أي $h = 5$

مثال: نفرض احتمال نجاح رمي كرة في السلة 3×10 ونريد حساب احتمال ان يكون النجاح في المحاولة الرابعة

لا نستطيع التطبيق بحدانى لأن ما حددت عدد الروايات.

نلاحظ من هذه المسألة ما يلي:

لم يتحدد عدد الروايات وهو شبيه بالبرنولي

هذا التوزيع يدعى التوزيع الهندسي وهو النوع الرابع من المتغيرات المنفصلة

وله القانون الاحتمالي التالي:

$$P(X=k) = P \times (1-P)^{k-1}$$

حيث k هو عدد المحاولات حتى اول نجاح

P احتمال النجاح

توقعه $E(X) = \frac{1}{P}$

تباينه $V(X) = \frac{1-P}{P^2}$

إذا كان احتمال أن يكون لدواء ما آثار جانبية $\frac{1}{1000}$

1) احسب احتمال أنه من بين 2000 شخص يوجد 3 أشخاص

2) احسب احتمال أن يكون أكثر من شخص على الأقل يعانون من الآثار الجانبية

* نوعي المتغير العشوائي منفصل $p=\frac{1}{1000}$

كررنا تجربة اختيار شخص مثلاً 2000 مرة أي تجربة برنولية

ملاحظة التجربة شبيهة بالحداني حيث $p=\frac{1}{1000}$ و $n=2000$

في هذه الحالة استخدام المتغير العشوائي الحداني صعب وغير مناسب ودقيق في هذه الحالة لذلك نستخدم عوضاً عنه توزيع بواسون

وعموماً كلما كان العدد كبير أكبر من 30 نستبدل التوزيع الحداني الثنائي

عوضه $\lambda=np$ بتوزيع بواسون حيث الوسيط λ

و صيغته الرياضية للحداني فيكون الحل على الشكل التالي:

$$\lambda=np=2000\times0.001=2$$

$$P(X=k)=\frac{e^{-2}\cdot 2^{k}}{k!}$$

$$P(X=3)=\frac{e^{-2}\cdot 2^{3}}{3!}=0.18$$

الطلب الثاني:

$$P(X\leq 2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$$

ومنحل التمرين على الشكل: $p(X=4) = 0,3(1-0,3)^{4-1}$

$= 0,3(0,7)^3 =$

توقع $E(X) = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$

$= 3,333$

$V(X) = \frac{1-0,3}{(0,3)^2}$

تمرين مهم:

يانصيب معرض دمشق الدولي يبيع 10 آلاف بطاقة بسعر 10 ليرات مخصصة الجوائز التالية

5000 ل.س لبطاقتين

2000 ل.س لـ 3 بطاقات

1000 ل.س لـ 5 بطاقات

اذا اشترى رجل بطاقة واحدة احسب توقع ربحه..

الحل: لنسمِ متغير عشوائي يدل على ربح الرجل X

قيم المتغير العشوائي

$\{-10, 1000, 2000, 5000\}$

$p(X=-10) = \frac{9990}{10000} = 0,999$

لدينا 10 بطاقات رابحة بالتالي لدينا $10000 - 10 = 9990$

$p(X=1000) = \frac{5}{10000}$

$p(X=5000) = \frac{2}{10000}$

$p(X=2000) = \frac{3}{10000}$

$E(X) = pn$

الحل

تمرين: