كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة4

المحاضرة : الخامسة/ن+ع/

يوجد ثلاث اختبارات:

1 اختبار كوشي (الجذر النوني):

لتكن المتسلسلة $\sum a_n$ من الشكل: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$

عند الحالات الآتية:

1 $c<1$ متسلسلة متقاربة.

2 $c>1$ متسلسلة متباعدة.

3 $c=1$ متسلسلة حالة شك.

2 اختبار دالاأمبير من الشكل $\sum a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$$

عند الحالات الآتية:

1 $c<1$ متسلسلة متقاربة

2 $c>1$ متسلسلة متباعدة

3 $c=1$ حالة شك.

3 اختبار رابي من الشكل $\sum a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = c$$

عند الحالات الآتية:

1 $c<1$ متباعدة.

2 $c>1$ متقاربة

3 $c=1$ حالة شك.

العرين الأول: لتكن $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$:

1) ادرس التقارب:

خطوة أولى: متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3} \longrightarrow q < 1$

$\frac{1}{3} < 1$

فالمتتالية متقاربة لأن $q < 1$

خطوة ثانية: اختبار كوشي (الجذر النوني):

$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{3}^n} = \frac{1}{3}^{\frac{n}{n}} = \frac{1}{3} < 1$

فالمتتالية متقاربة

ملاحظة: $\sqrt[x]{n} = n^{\frac{1}{x}}$

$\sqrt[x]{n^x} = n^{\frac{x}{x}} = n$

2 حساب المجموع:

المتتالية الهندسية مجموعها: $S = \frac{1-q^n}{1-q} a$

n عدد الحدود

$q = \frac{1}{3}, a = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{1 - \frac{1}{3}^n}{1 - \frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)$

$S = \frac{1 - \frac{1}{3}^n}{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)$

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1-0}{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2} = \frac{1}{2}$

تطبيق ثاني:

n! عاملة تحتوي ضرب

ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{n!}{2n}$

الحل: نطبق اختبار دالامبير من الشكل: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$

نجد: a_{n+1}:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$$

نقسم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}}$$

$$= \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{2^n}\times 2} \times \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2} = \infty > 1$$

فالسلسلة متباعدة.

علاقات هامة للزوايا الشهيرة:

1) $\lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

2) $\lim_{t\to \infty} (1+\frac{1}{t})^t = e$

3) $\lim (1+t)^{\frac{a}{t}+b} = e^a$

4) $\lim (1+\frac{1}{t})^{at+b} = e^a$

تمرين ثالث: ادرس تقارب السلسلة التالية: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

الحل:

نطبق اختبار كوشي (الجذر النوني):

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1^\infty \text{ ح.ع.ت}$$

نجد:

$$\lim\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

نفرض $t = -\frac{1}{n+1}$

$t \to 0$

أو $t \to \infty$

عند تغيير المتحول تتغير النهاية:

$$\Rightarrow n+1 = -\frac{1}{t}$$

$$n = -\frac{1}{t} - 1$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} (1+t)^{-\frac{1}{t}-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Leftarrow$ السلسلة متقاربة