كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك تحليلي

المحاضرة : الرابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

تعميم الطريقة السابقة عندما يتحرك الجسم على منحني ناتج عن عبارة عن تقاطع سطحين

$$F_i(x,y,z)=0 \quad \text{و} \quad (6)$$

$$F_1(x,y,z)=0 \;/\; F_2(x,y,z) \qquad \text{و} \qquad i=1,2$$

وتحقق الانتقالات الافتراضية المعادلتين:

$$\underset{grad}{\vec{\nabla}} F_i \,\delta\vec{r}_i = \frac{\partial F_i}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F_i}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_i}{\partial z}\delta z = 0 \quad (7)$$

وتحقق الانتقالات الافتراضية (العمل الافتراضي):

شرط التوازن $\left(\sum \vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i = 0\right)$ ونضيف له المعادلتين في (7) بعد الضرب بـ λ (λ_1, λ_2) (مضروبين اختياريين) (معامل مساعد لإيجاد نقاط الجسم المدروس)

فنحصل على المعادلة:

$$\left(F_x + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)\delta x + \left(F_y + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\delta y + \left(F_z + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\delta z \quad (8)$$

نختار λ_1 و λ_2 بحيث تجعلان كل من الأقواس السابقة معدومة

لكي القوس الأول والثاني فنحصل على:

$$F_x + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$$

$$F_z + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0$$

$$F_y + \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y} = 0$$

نضيف إلى المعادلات (9) معادلتي الارتباط (6) ونحصل على (5) معادلات وهي كافية لتعيين (5) مجاهيل (المجاهيل هي x , y , z) موضع نقطة التوازن ما المضروبين λ_1 و λ_2

ملاحظة: معنى مضاريب لاغرانج الفيزيائية؟

لتوضيح المفهوم الفيزيائي لمضاريب لاغرانج نكتب معادلات التوازن حسب قوانين نيوتن

جسم يتحرك على سطح ونقارنه مع المعادلات التي حصلنا عليها من طريق الميكانيك الفيزيائي التحليلي:

في حالة التوازن حسب قوانين نيوتن أن

$$\vec{F}+\vec{R}=0 \longrightarrow \begin{rcases} F_x+R_x=0 \\ F_y+R_y=0 \\ F_z+R_z=0 \end{rcases} (10)$$

رد الفعل ← القوى الفعالة

ونكتب معادلات التوازن التحليلي:

$$\left(F_x+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}\right)\delta x+\left(F_y+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y+\left(F_z+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta z$$

$$\left[F_x+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}=0 \;,\; F_y+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}=0 \;,\; F_z+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}=0\right]$$

ونجد أن $R_x=\lambda\frac{\partial F}{\partial x}$ $\quad R_y=\lambda\frac{\partial F}{\partial y}$

أي أن $R_z=\lambda\frac{\partial F}{\partial z} \longrightarrow \vec{R}=\lambda\vec{\nabla}F=\lambda\,\overrightarrow{grad}.F$

λ grad موجهة

ملاحظة: وهكذا نجد أن المضروب λ ينطق بقوة رد الفعل وعندما يترك الجسم على منحني فإننا نحصل على رد الفعل بالشكل

$$\vec{R} = \lambda_1 \vec{D}_1 f_1 + \lambda_2 \vec{D}_2 f_2 \quad (12)$$

فكأننا قسمنا رد الفعل للمنحني الى قسمين (الأول) ينتج عن السطح الأول $\lambda_1 \vec{D} f_1$ والسطح الثاني $\lambda_2 \vec{D} f_2$

- التوازن لجملة مادية:

بطريقة مضاريب لاغرانج من النوع الأول:

نعمم الدراسة السابقة على جملة مادية مؤلفة من N (عدد نقاط الجملة المادية) خاضعة لارتباطات هولونومية ثنائية الجانب من النوع

$$F_\alpha (x, y, z, \dots, t) = c_\alpha \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, k$$

عدد معادلات الارتباط

يمكن وضع رد الفعل المؤثر على النقطة M_i من الجملة كتعميم للعلاقة (12) فنجد

$$\vec{R}_i = \lambda_1 \vec{D}_i f_1 + \lambda_2 \vec{D}_i f_2 + \dots + \lambda_k \vec{D}_i f_k$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{D}_i f_\alpha$$

نكتب عندئذ معادلات التوازن بالصيغة:

$$\left.\begin{aligned} X_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = 0 \\ Y_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} = 0 \quad Z_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} = 0 \end{aligned}\right\} (15)$$

حيث أن X_i , Y_i , Z_i

هي مركبات محصلة القوى الفعالة المؤثرة على نقطة مع العلم أن عدد المجاهيل هنا $3N+K$ مجهول

N نقطة مادية لها x , y , z

ملاحظة: يمكن وصف حركة النقطة M المتحركة بشروط لها علاقة بالمتأثرة بقوى محصلة $\vec{F_i}$ وردود الفعل $\vec{R_i}$

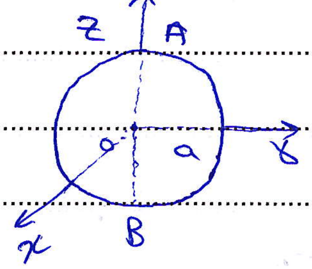
كتابة حركة النقطة المادية بالصيغة الآتية:

$$m.\vec{w} = \vec{F_i} + \sum \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} \quad ....(16)$$

مثال: تتحرك نقطة مادية كتلتها m على سطح كرة نصف قطرها a أوجد باستخدام مضاريب لاغرانج موضع توازن النقطة المادية على الكرة

الحل: بما أن النقطة تتحرك على سطح الكرة فهي تحقق معادلة سطح الكرة

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = a^2 \quad ....(1)$$



نفرض أن النقطة المادية لا تغادر سطح الكرة كما في الشكل المرسوم ، سنأخذ مبدأ الإحداثيات في مركز الكرة ونوجه المحور z شاقولياً للأعلى وتكون القوى المؤثرة في النقطة المادية هي قوة ثقلها $m\vec{g}$ وبالتالي مساقطها تساوي

أي $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = -mg$

ولدينا حسب طريقة مضاريب لاغرانج أن :

$$\left(F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y + \left(F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z = 0$$

نختار مضروب λ بحيث يعدم أحد الأقواس ، لكن القوس الثالث معدوم علماً أنه يوجد لدينا درجتين حرية (3 - 1) لأنه يوجد للنقطة المادية معادلة ارتباط واحدة

نفرض أن x و y إحداثيات مستقلة وبالتالي كلاً من القوس الأول والثاني معدوم

$$\to 0 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

تحوي هذه المعادلات 4 مجاهيل

$$0 + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \lambda(x, y, z)$$

موضع توازن النقطة المادية لكلاقة رد الفعل

$$-mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

بالإضافة إلى معادلة الارتباط رقم ① يمكننا تعيين هذه المجاهيل

نحسب / نوجد / $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$

من المعادلة رقم (1)

$$\left.\begin{aligned} &2x\lambda = 0 \\ &2y\lambda = 0 \\ &-mg + 2\lambda z = 0 \end{aligned}\right\} (3) \to y = 0 \quad x = 0$$

ثم نوجد قيمة z من ① بعد تعويض $x=y=0$

$z^2=a^2 \to z=\pm a$

وبالتالي فإن النقطة المادية المتحركة على سطح كرة تتوازن في النقطتين

$(0,0,a)$ $(0,0,-a)$ يعني من أعلى وأسفل الكرة

نعوض في * $2\lambda z=mg$

$\to \lambda=\pm\frac{mg}{2a}$

- انتهى الفصل .

فصل جديد 2: معادلات الحركة

المبدأ الديناميكي (أكوكي) للانتقالات الافتراضية

- معادلات دالمبير ـ لاغرانج: نكتب معادلة حركة النقطة M_i في

المجموعة المادية المدروسة طبقاً للمعادلة (16)

$(m_i\vec{w}=F_i+\ldots)$

ثم نضرب طرفيها بـ $\delta\vec{r_i}$ ونجمع على i (كل النقط المادية للمجموعة)

فنحصل على

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{F_i}-m_i\vec{w_i})\delta\vec{r_i}+\sum_i\vec{R_i}\cdot\delta\vec{r_i}=0$$

إذا فرضنا أن المجموعة المادية تخضع لارتباطات مثالية هولونومية ثنائية

الجانب فقط. ← $=$ عمل رد الفعل يكون 0

وإذا رمزنا للمقدار $m_i\vec{w_i}$ بـ $\vec{J_i}$

فإن المعادلة ① تكتب بالشكل:

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{F_i}-m_i\vec{w_i})\delta\vec{r_i}=\sum_{i=1}^{N}(\vec{F_i}-\vec{J_i})\delta\vec{r_i}=0 \quad (2)$$

أو بالشكل التحليلي الآتي:

$$\sum_i [(X_i - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i] = 0 \quad (3)$$

تسمى هذه المعادلات أحياناً معادلات دالمبير ـ لاغرانج.

تعبّر عمّا يسمى المبدأ الديناميكي (الحركي) للانتقالات الافتراضية وينص على ما يلي:

«يكون مجموع الأعمال الافتراضية لكافة القوى (الفعالة الفعلية) المؤثرة على حركة مجموعة مادية خاضعة لارتباطات مثالية» ≤

ملاحظة: يمكن تعميم المعادلة (2) على الارتباطات المحررة:

(بتحرر النقطة m_i لتصبح باتجاه رد الفعل) ← عكس رد الفعل

وبالتالي يكون عمل مركز رد الفعل موجباً

لا يساوي الصفر ويكون موجب

$$N \cdot \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i \geq 0$$

أو أن: $$\sum_i \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i \geq 0 \quad (4)$$

ونجد عندئذٍ من المعادلة (1) أن:

مهم

$$\sum_i (\vec{F}_i - m_i \vec{w}_i) \cdot \delta\vec{r}_i \leq 0 \quad (5)$$

الإحداثيات المعممة والسرع المعممة:

لنبحث عن معادلات حركة مجموعة مادية مؤلفة من N نقطة مادية تخضع لـ K ارتباط (عدد معادلات الارتباط K) لذلك نختار عدداً n من الإحداثيات الجديدة نرمز لها بالرمز q_j حيث $(j = 1, 2, \ldots, N, K)$

~~الجديدة نرمز لها بالرمز q_j~~ تسمى هذه الإحداثيات التي عددها $n = 3N - K$ بعدد درجات الحرية للمجموعة المادية.

بالاحداثيات المعممة مختارها بحيث تحقق شرطين أساسين

① أن تعين من الاحداثيات القديمة (x_i, y_i, z_i)

بدلالة الاحداثيات الجديدة بحيث تكون توابع مستمرة وقابلة للاشتقاق بعدد ما نريد

② أن تحقق معادلات الارتباط.

مثال: حركة النقطة المادية على سطح كرة نصف قطرها a

فإن معادلة الارتباط هي:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

النقطة المادية (3) - معادلة الارتباط

تعني $3 - 1 = 2$ درجتي حرية.

كنا أحدثيتي المعممين المعبرين عن درجتي الحرية للنقطة المادية بالشكل $q_1 = x$ و $q_2 = y$ فنعبر z من معادلة الارتباط.

عندئذ يمكن التعبير عن الإحداثية القديمة z بدلالة q_1, q_2 بتعويضهما في معادلة الارتباط

$$\rightarrow z^2 = a^2 - q_1^2 - q_2^2 \Rightarrow z = \sqrt{a^2 - q_1^2 - q_2^2}$$

وهذه الاحداثيات تحقق معادلة الارتباط.

بفرض أننا نريد التعبير عن احداثيات النقطة المادية المتحركة على سطح الكرة بدلالة الاحداثيات الكروية

فنضع $q_1 = \theta$ و $q_2 = \varphi$ عندئذ التعبير عن الاحداثيات القديمة (x, y, z) بدلالة الاحداثيات الجديدة بالشكل

$$x = a\sin q_1 \cdot \cos q_2$$
$$y = a\sin q_1 \cdot \sin q_2$$
$$z = a\cos q_1$$

وهي توابع مستمرة ومحيدة القيمتين مقابلة للاشتقاق أما معادلة الارتباط فتكون $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$$a^2 \sin^2 q_1 \cos^2 q_2 + a^2 \sin^2 q_1 \sin^2 q_2 + a^2 \cos^2 q_1 = a^2$$

تعميم:

نعمم معنى التغيير من الإحداثيات x_i و y_i و z_i بالحالة العامة بدلالة الإحداثيات الجديدة فتعطي بالعلاقات الآتية:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i (q_1, q_2, \dots q_n t) \quad (6)$$

n عدد درجات الحرية

$\vec{r}_i$ نصف القطر الذي يعين مكان i

x_i: مسقط على المحور x

أي

$$x_i = x_i (q_1, q_2, \dots q_n t)$$
$$y_i = y_i (q_1, q_2, \dots q_n t) \quad (7)$$
$$z_i = z_i (q_1, q_2, \dots q_n t)$$

لنوجد سرعة النقطة M_i بدلالة الإحداثيات الجديدة لذلك نشتق المعادلة (6) بالنسبة للزمن:

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial t} + \dots$$

$$+ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} =$$

$$= \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad \text{.....(8)}$$

حيث $\dot{q}_j$ مشتق الاحداثية المعممة q_j بالنسبة للزمن

يمكننا بوضوح أن نجد من العلاقة (8) عند اشتقاقها جزئياً بالنسبة لـ $\dot{q}_j$ أنها تساوي :

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (9)$$

نقطة

أي أن مشتق السرعة بالنسبة للسرعة المعممة $\dot{q}_j$ تساوي مشتق $\vec{r}_i$ بالنسبة للاحداثية المعممة الموافقة.