كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

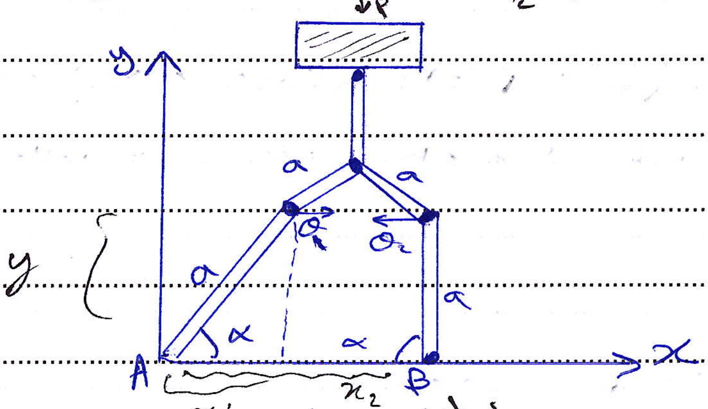
السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك تحليلي

المحاضرة : الثالثة /نظري/

مثال: عيّن في المكبس المبيّن في الشكل التالي العلاقة بين القوى $\vec{P}, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ في حالة الاتزان علماً أنّ $\vec{Q}_1$ يساوي $\vec{Q}_2$ و $\vec{Q}$ لدى الزاويتين α و β معلومتان

(مع إهمال أوزان القضبان)



نستخدم شرط التوازن فيكون لدينا حسب مبدأ العمل الافتراضي:

$\sum_i \vec{F}_i \, \delta \vec{r}_i = 0$

نختار نقطة مبدأ الإحداثيات لنقطة ثابتة A كذلك

$\vec{Q}\,\delta x_1 \vec{i} + \vec{Q}_2\,\delta x_2 \vec{i} + \vec{P}\,\delta y\,\vec{j} = 0$

بإسقاط هذه العلاقة على المحاور الإحداثية:

$Q\,\delta x_1 - Q_2\,\delta x_2 - P\,\delta y = 0 \quad \ldots\ldots (1)$

علماً $Q_1 = Q_2$

لنعين δx_1 و δx_2 و δy من احداثيات نقطة تأثير القوى Q_1 و Q_2 و P لذلك نكتب

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a\cos\alpha \\ x_2 &= 2a\cos\alpha + 2a\cos\beta \\ y &= a\sin\alpha + a\sin\beta \end{aligned}\right\} (2)$$

$\rightarrow \delta x_1 = -a\sin\alpha\,\delta\alpha$

$$\delta x_2 = -a\sin\delta\alpha - 2a\sin\beta\,\delta\beta \quad \text{....(3)}$$

$$\delta y = a\cos\alpha\,\delta\alpha + a\cos\beta\,\delta\beta$$

باعتبار أن $Q = Q_1$ و Q_2 متساويان

$$\text{put } (3)(1) \Rightarrow Q_1 = Q_2 = Q$$

نحصل على :

$$2Q\sin\beta\,\delta\beta - P(\cos\beta\,\delta\beta + \cos\alpha\,\delta\alpha) = 0 \quad \text{......(4)}$$

لنوجد العلاقة بين $\delta\alpha$ و $\delta\beta$ من كون المسافة AB

$$AB = \text{const}$$

$$\rightarrow 2a\cos\alpha + 2a\cos\beta = \text{const}$$

$$-2a\sin\alpha\,\delta\alpha - 2a\sin\beta\,\delta\beta = 0$$

$$\sin\alpha\,\delta\alpha + \sin\beta\,\delta\beta = 0$$

$$\rightarrow \delta\alpha = -\frac{\sin\beta\,\delta\beta}{\sin\alpha} \quad \text{.....(5)}$$

$$(5) \rightarrow 4 \Rightarrow 2Q\sin\beta - P(\cos\beta - \cot\alpha\sin\beta) = 0$$

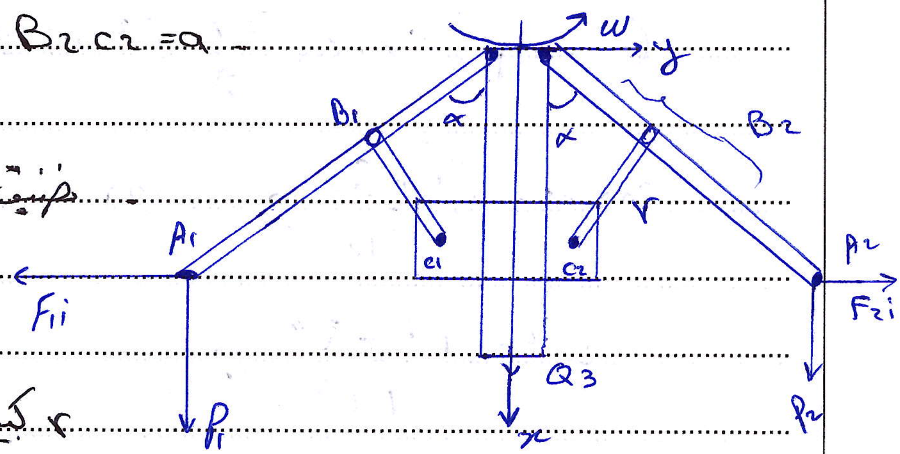
$$\rightarrow P = \frac{2Q}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

نجد أن الضغط P يكون كبيراً للغاية عندما تكون الزاوية α قريبة من الزاوية β

مسألة : يدور منظم طرد مركزي بانتظام حول المحور العمودي بسرعة زاوية ω كما في الشكل. وزن كل من كرتيه A_1 و A_2 يساوي P $(m.g)$ ووزن الكفين C_1 و C_2 يساوي Q عيّن بإهمال أوزان القضبان قيمة الزاوية α في حالة التوازن إذا علمت أن OB_1 يساوي OB_2 يساوي B_1C_1 ويساوي B_2C_2 يساوي a

$OB_1 = OB_2 = B_1C_1 = B_2C_2 = a$

$OA_1 = OA_2 = l$



نضيف الى القوى الفعالة P_1 و P_2 و Q_3 قوتي العطالة الذاتية (قوى الطرد المركزي) F_1^i و F_2^i كلما كانت r كبيرة تكون القوة صغيرة / اذا كانت صغيرة تكون القوة كبيرة.

نكتب المعادلة العامة حسب المبدأ التوازني للانتقال الافتراضي (العمل الافتراضي) مجموع المساقط للقوى بالصيغة الآتية:

$$P_1\delta x_1 + P_2\delta x_2 + F_1\delta y_1 + F_2\delta y_2 + Q_3\delta x_3 = 0 \quad \text{...(1)}$$

يكون عندئذ:

$$Q_3 = Q \quad , \quad P_1 = P_2 = P \quad , \quad F_1^i = F_2^i = \frac{P}{g} wA = \frac{P}{g} w^2 l \sin\alpha$$

$$\left[F^i = ma = m\frac{v^2}{r} = \frac{P}{g}\omega^2\frac{r^2}{r} = \frac{P}{g}\omega^2 r = \frac{P}{g}\omega^2 l\sin\alpha \right] \quad r = l\sin\alpha$$

نحسب احداثيات نقط تأثير القوى:

$x_1 = x_2 = l\cos\alpha$

$y_2 = y_1 = l\sin\alpha$

$x_3 = 2a\cos\alpha$

$\delta x_1 = \delta x_2 = -l\sin\alpha\,\delta\alpha$

$\delta y_2 = -\delta y_1 = l\cos\alpha\,\delta\alpha$

$\delta x_3 = -2a\sin\alpha\,\delta\alpha$

نعوض في العلاقة (1)

$$\left(-2Pl\sin\alpha+\frac{2P}{g}l^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha-2Qa\sin\alpha\right)\delta\alpha=0$$

$$\longrightarrow \cos\alpha=\frac{Pl+Qa}{Pl^2\omega^2}g \quad ③$$

عادة $\cos\alpha<1 \Leftarrow$ $\omega^2>\frac{Pl+Qa}{Pl^2}g$

- بازدياد ω تزداد الزاوية α ويمكن أن تصل الى 90° عندئذ تكون السرعة الزاوية مساوية الى ∞

- المبدأ التوازني للانتقالات الافتراضية :

الشرط اللازم والكافي لتوازن جملة مادية خاضعة لارتباطات مثالية ثنائية الجانب مستقرة هو أن يكون مجموع الأعمال الافتراضية الجزئية للقوى الفعالة مساوي الصفر أي تحقق العلاقة:

$$\delta A=\sum\vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i=0 \quad ①$$

البرهان :

لزوم الشرط : نفرض أن الجملة متوازنة وبالتالي يجب البرهان أن

$$\sum\vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i=0$$

بفرض توازن الجملة فإن كل نقطة M_i من نقاطها تخضع لقوتين

القوة الأولى هي القوى الفعالة محصلتها $\vec{F}_i$ والثانية هي قوة رد الفعل $\vec{R}$

ويكون محصلة القوى الناتجة عن الارتباط مع القوى الفعالة في حالة التوازن معدومة

$$\vec{F}_i+\vec{R}_i=0$$

بضرب طرفي هذه العلاقة بـ δr_i وأخذ المجموع على i :

$$\sum_i\vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i+\underbrace{\sum_i\vec{R}_i\,\delta\vec{r}_i}_{0}=0$$

0 لأن العلاقة ارتباطية

$$\left(\sum \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0\right) \Rightarrow \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

ب: كفاية الشرط: نفرض أن العلاقة $\sum \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0$ محققة ويلزم أن الجملة متوازنة. نبرهن كفاية الشرط بطريقة نقض الفرض نفترض إذاً أن تكون الجملة متوازنة ويتحقق المطلوب أما إذا كانت غير متوازنة فلا بد أن تتحرك إحدى نقاطها M_i تحت تأثير القوة $\vec{F}_i$ فينتج عملاً حقيقياً موجباً: $\vec{F}_i d\vec{r}_i > 0$ وبالتالي يكون العمل الافتراضي الموافق للعمل الحقيقي يساوي $\vec{F}_i \delta\vec{r}_i > 0$ وهذا مناقض للفرض.

وبالتالي لا بد أن تكون الجملة متوازنة.

كيف يصبح شرط التوازن السابق $\delta A = \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

عندما تتأثر الجملة بارتباطات أحادية الجانب أي يمكن أن تتحرر نقطة من القيد تتحرر النقطة المادية من القيد باتجاه رد الفعل وبالتالي يكون عمل رد الفعل موجباً أي أن $\sum \vec{R}_i \delta\vec{r}_i > 0$ وحسب العلاقة

$$\sum (\vec{F}_i + \vec{R}_i)\delta\vec{r}_i = 0 \Rightarrow \sum \vec{F}_i \delta\vec{r}_i \le 0$$

على أن تأخذ إشارة المساواة محققة عندما يكون الارتباط مثالياً ثنائي الجانب.

توازن نقطة مادية اعتماداً على مبدأ لاغرانج:

سندرس في هذه الفقرة والتي تليها طريقة ثابتة لإيجاد توازن نقطة مادية وجملة مادية عوضاً عن الاعتماد على حساب ردود الأفعال الناتجة عن الارتباطات

نفرض أن نقطة مادية M تتحرك على سطح معادلته (ارتباط مقيد)

$$F(x,y,z) = 0$$

وبالتالي كما رأينا سابقاً تتحقق العلاقة $\vec{\nabla} f \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

ولنكتب شرط توازن النقطة M اعتماداً على مبدأ العمل الافتراضي ثم نضرب طرفيه بمضروب اختياري λ (عامل مضروب لاغرانج) ثم نضيف المعادلة الناتجة إلى

أي شرط التوازن نحصل على:

$$\vec{F}\cdot\delta\vec{r} + \lambda\nabla f\cdot\delta\vec{r} = 0 \quad \text{(1)}$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة بالشكل الآتي:

$$F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z + \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z\right) = 0 \quad \text{(2)}$$

$$\underbrace{\left(F_x + \lambda\frac{\partial F}{\partial x}\right)}_{1}\delta x + \underbrace{\left(F_y + \lambda\frac{\partial F}{\partial y}\right)}_{2}\delta y + \underbrace{\left(F_z + \lambda\frac{\partial F}{\partial z}\right)}_{3}\delta z = 0 \quad \text{(3)}$$

ولكي تتحقق هذه المعادلة مهما كانت λ فلا يمكننا أن نقول مباشرة أن أمثال كل من δx و δy و δz تساوي الصفر لأن الانتقالات المذكورة غير مستقلة فهي ترتبط فيما بينها.

ولكن إذا علمنا أن λ مضروب اختياري (تتحقق من أجله العلاقة $\nabla\vec{F}\cdot\delta\vec{r}=0$) مهما كانت λ فيمكن نزع اختيارية هذا المضروب وتحديد قيمته بحيث تعدم أحد الأقواس (وليكن القوس الثالث مثلاً):

$$F_x + \lambda\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{(4)}$$

وبما أن للمسألة درجتي حرية فيمكن اعتبار δx و δy إزاحات مستقلة وبالتالي يمكن أن نعدم أمثالهما

$$\text{(5)}\begin{cases} F_x + \lambda\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ f_x + \lambda\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

نضيف إلى المعادلات 4 و 5 معادلة الارتباط $F(x,y,z)=0$ فنحصل على أربعة معادلات مع مجهود أربعة مجاهيل هي (x,y,z,λ) هي الإحداثيات موضع توازن النقطة المادية (x,y,z) و λ مضروب لاغرانج

انتهت المحاضرة.