كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : توابع خاصة

المحاضرة : الخامسة /نظري/د.علي أسد

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

جامعة طرطوس | مقرر: التوابع الخاصة
كلية العلوم | المحاضرة: الخامسة
قسم الفيزياء | د. علي أسد

كثيرات حدود تشبيشيف

تعرف كثيرات حدود تشبيشيف من النوع الأول $T_n(x)$ كالآتي:

$$T_n(x) = \cos(ncos^{-1}(x)) \qquad n \geq 0 \ , |x| \leq 1 \qquad (1)$$

وكثيرات حدود تشبيشيف من النوع الثاني $U_n(x)$ كالآتي:

$$U_n(x) = \sin(ncos^{-1}(x)) \qquad n \geq 0 \qquad (2)$$

يمكن تعريف $T_n(x)$ بالصورة المركبة كالآتي:

افرض أن $\theta = cos^{-1}(x)$ وبالتالي $x = \cos\theta$، تصبح العلاقة (1) كالآتي:

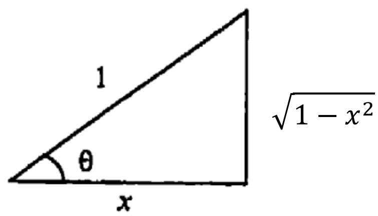
$$T_n(x) = \cos(n\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\cos\theta + isin\,\theta)^n + (\cos\theta - isin\,\theta)^n\right]$$

وعليه نجد:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right]$$



بالمثل يمكن كتابة $U_n(x)$ كالآتي:

$$U_n(x) = \sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left[e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right] = \frac{1}{2i}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n - \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right]$$

مبرهنة(1): أثبت أن التابعين $T_n(x)$ و $U_n(x)$ يمثلان حلين مستقلين للمعادلة:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

الإثبات: يجب أن نثبت أن كلاً من $T_n(x)$ و $U_n(x)$ يمثل حلاً للمعادلة:

$$T_n(x) = \cos(ncos^{-1}(x))$$

$$T'_n(x) = -\sin\left(ncos^{-1}(x)\right)\left(\frac{-n}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

وعليه نجد:

$$\sqrt{1-x^2}T'_n(x) = n\sin\left(ncos^{-1}(x)\right)$$

بالاشتقاق مرة ثانية نجد:

$$\sqrt{1-x^2}T''_n(x) + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}T'_n(x) = n\cos\left(ncos^{-1}(x)\right)\left(\frac{-n}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

نضرب الطرفين بـ $\sqrt{1-x^2}$ فنجد:

$$(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) = -n^2\cos\left(ncos^{-1}(x)\right)$$

$$(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0$$

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$(1-x^2)U''_n(x) - xU'_n(x) + n^2U_n(x) = 0$$

الدالة المولدة لحدوديات تشبيشيف:

$$\frac{1-t^2}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} t^n\, T_n(x) \quad -1 \le x \le 1 \qquad (3)$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}(x)t^n \quad -1 \le x \le 1 \qquad (4)$$

مبرهنة (2): علاقة التعامد:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_m(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & m \ne n \\ \dfrac{\pi}{2} & m = n \ne 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

الإثبات:

نضع $m = n = 0$ في العلاقة (5)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[sinx^{-1}\right]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

في الحالة العامة نفرض أن $x = \cos\theta$ فنجد أن

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi}^{0} \frac{T_m(\cos\theta)T_n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-\sin\theta\, d\theta)$$

$$= \int_{0}^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)\, d\theta$$

وعليه نحصل على:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} [\cos(m\theta+n\theta) + \cos(m\theta-n\theta)]\, d\theta$$

ندرس الحالات الآتية:

- $m = n \neq 0$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n^2(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1+\cos 2\theta)\ d\theta = \frac{\pi}{2}$$

- $m \neq n$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)\theta}{m+n} + \frac{\sin(m-n)\theta}{m-n}\right]_{0}^{\pi} = 0$$

<u>مبرهنة (3):</u> العلاقات التكرارية:

$$T_{m+n}(x) - 2T_m(x)T_n(x) + T_{|n-m|}(x) = 0 \qquad (6)$$

$$(1-x^2)T'_n(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x) \qquad (7)$$

<u>الإثبات:</u> بوضع $x = \cos\theta$ يكون لدينا:

$$T_{m+n}(x) + T_{|n-m|}(x) = \cos[(m+n)\theta] + \cos[(n-m)\theta]$$

$$= 2\cos m\,\theta \cos n\theta = 2T_m(x)T_n(x)$$

وبذلك نثبت العلاقة (6)

بوضع $x = \cos\theta$ يكون لدينا:

$$(1-x^2)T'_n(x) = (1-x^2)\frac{dT_n(x)}{dx} = (1-\cos\theta^2)\frac{d}{d(\cos\theta)}\cos n\,\theta$$

$$= \sin\theta^2\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right)(-nsin\,n\theta) = n\sin\theta\, sin\,n\theta$$

أما

$$-nxT_n(x) + nT_{n-1}(x) = ncos(n-1)\theta - ncos\theta\cos n\theta$$

$$= n\sin\theta\, sin\,n\theta$$

وعليه فإن:

$$(1-x^2)T'_n(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x)$$

مثال : أثبت أن:

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

الإثبات: نستخدم العلاقة:

$$T_{m+n}(x) - 2T_m(x)T_n(x) + T_{|n-m|}(x) = 0$$

نضع $m = n = 1$

$$T_2(x) - 2T_1(x)T_1(x) + T_0(x) = 0$$

$$T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

نضع $m = 1, n = 2$

$$T_3(x) - 2T_1(x)T_2(x) + T_1(x) = 0$$

$$T_3(x) = 2x(2x^2-1) - x$$

$$= 4x^3 - 3x$$

نضع $m = 1, n = 3$

$$T_4(x) - 2T_1(x)T_3(x) + T_2(x) = 0$$

$$T_4(x) = 2x(4x^3-3x) - 2x^2 + 1$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

نضع $m = 1, n = 4$

$$T_5(x) - 2T_1(x)T_4(x) + T_3(x) = 0$$

$$T_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x)$$

$$= 16x^5 - 16x^3 + 2x - 4x^3 + 3x$$

$$= 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

<u>تمارين على المحاضرات السابقة:</u>

<u>السؤال الأول:</u> احسب التكاملات الآتية:

$$\int_0^1 \boldsymbol{x^4(1-x)^3dx}$$

<u>الحل:</u> يمكن حل هذا التكامل باستخدام دالة بيتا كالآتي:

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3dx = \int_0^1 x^{5-1}(1-x)^{4-1}dx = \beta(5,4)$$

$$= \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)} = \frac{4!\,3!}{8!} = \frac{1}{280}$$

$$\int_0^2 \boldsymbol{\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx}$$

<u>الحل:</u> نغير المتحول

$$x = 2u \ \Rightarrow dx = 2du \quad \& \ x^2 = 4u^2$$

حدود التكامل:

$$x = 0 \ \Rightarrow u = 0$$

$$x = 2 \ \Rightarrow u = 1$$

بالتعويض نجد:

$$\int_0^1 \frac{4u^2}{\sqrt{2-2u}}2du = \frac{8}{\sqrt{2}}\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}}u^2du = \frac{8}{\sqrt{2}}\beta\left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{1}{2}+3)}=\frac{8}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\pi}\ 2!}{\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{64\sqrt{2}}{15}$$

$$\int_{0}^{a} \boldsymbol{y^4(a^2-y^2)dy}$$

<u>الحل:</u> تغيير المتحول

$$y^2=a^2x$$

$$y=ax^{1/2}$$

$$y^4=a^4x^2$$

$$dy=\frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

حدود التكامل:

$$y=0\ \ \Rightarrow x=0$$

$$y=a\ \ \Rightarrow x=1$$

بالتعويض في التكامل:

$$\int_{0}^{1} a^4x^2(a^2-a^2x)\frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}\,dx=a^7\int_{0}^{1} x^{\frac{3}{2}}(1-x)dx$$

$$m-1=\frac{3}{2}\Rightarrow m=\frac{5}{2}$$

$$n-1=1\Rightarrow n=2$$

$$=a^7\ \beta\left(\frac{5}{2},2\right)=a^7\ \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+2\right)}$$

$$=a^7\ \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)1}{\frac{7}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{4a^7}{35}$$

$$\boldsymbol{I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}}$$

<u>الحل:</u>

نغير المتحول:

$$x^3 = y \Rightarrow x = y^{\frac{1}{3}}$$

$$dx = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy$$

تبقى حدود التكامل كما هي:

$$I = \int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy$$

$$I = \frac{1}{3} \int_0^1 y^{-\frac{2}{3}} (1-y)^{-\frac{1}{3}} dy$$

$$m - 1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{n} - 1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow n = 2/3$$

$$I = \frac{1}{3} \beta\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{1}{3} \frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\boldsymbol{k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan \theta}\ d\theta}$$

الحل: نكتب $\tan \theta = \frac{\boldsymbol{sin\,\theta}}{\boldsymbol{cos\,\theta}}$

$$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan\theta}\ d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta^{\frac{1}{2}}}{\cos\theta^{\frac{1}{2}}}\ d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta^{\frac{1}{2}}\cos\theta^{-\frac{1}{2}}\,d\theta$$

$$2m-1=\frac{1}{2}\Rightarrow m=\frac{3}{4}$$

$$2n-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow n=\frac{1}{4}$$

$$k=\frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{J=\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{1+x^4}}$$

<u>الحل:</u> نجري تغييرا في المتحول:

$$x^4=t\ \ \Rightarrow 4x^3dx=dt$$

$$dx=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}\,dt\ \ \&\ \ x^2=t^{\frac{1}{2}}$$

تبقى حدود التكامل كما هي

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{2}}\ \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}\,dt}{1+t}=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{4}}\ \ dt}{1+t}$$

$$m-1=-\frac{1}{4}\ \Rightarrow m=\frac{3}{4}$$

$$J=\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$$

<u>السؤال الثاني:</u> لتكن f دالة معرفة بالعلاقة الآتية:

$$f(t) = t.e^{-1} \quad ;t > 0$$

الحل: باستخدام تحويل لابلاس:

$$\mathcal{L}[t.e^{-1}] = \int_0^{+\infty} t.e^{-1}e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t.e^{-(s+1)t}dt$$

نكامل بالتجزئة:

$$u = t \quad \Rightarrow du = dt \ \& \ dv = e^{-(s+1)t}dt \ \Rightarrow v = -\frac{1}{(s+1)}e^{-(s+1)t}$$

ومنه يكون:

$$\mathcal{L}[t.e^{-1}] = -\frac{t}{(s+1)}e^{-(s+1)t}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{(s+1)}\int_0^{+\infty} e^{-(s+1)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{(s+1)}\left[-\frac{1}{(s+1)}e^{-(s+1)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

السؤال الثالث: أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\mathrm{y}'(\mathrm{t}) + \mathrm{y}(\mathrm{t}) = 1 \ ; \quad \mathrm{y}(0) = 2$$

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة:

$$\mathcal{L}[\mathrm{y}'(\mathrm{t})] + \mathcal{L}[\mathrm{y}(\mathrm{t})] = \mathcal{L}[1]$$

$$\mathrm{S}\,Y - Y(0) + Y = \frac{1}{S}$$

$$\mathrm{S}^2\,Y - 2S + SY = 1$$

$$Y = \frac{2S}{S(S+1)} = \frac{2}{(S+1)}$$

نأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(S+1)}\right] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(S+1)}\right] = 2e^{-t}$$