كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الخامسة/نظري/

مثال: أوجد معادلة المستوي المار بالفصل المشترك للمستويين:

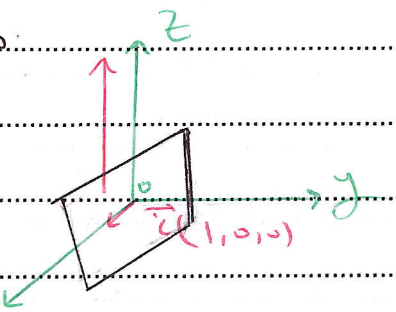
$P_1: x - y + 3z - 2 = 0 \quad , \quad P_2: 3x - y + 2z = 0$

الموازي للمحور ox

الحل: نكتب معادلة حزمة المستويات المارة بالفصل المشترك P_1 و P_2

$$P(\lambda) = P_1 + \lambda P_2$$

$$= (1+3\lambda)x + (-1-\lambda)y + (3+2\lambda)z - 2 = 0$$



نختار من الحزمة مستوياً يوازي ox

أي ناظمه عمودياً على ox

$$N_\lambda \perp (1,0,0)$$

ناظم الحزمة $N_\lambda (1+3\lambda, -1-\lambda, 3+2\lambda) \cdot (1,0,0)$

$$= 1 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{3}$$

نعوض $\lambda = \frac{-1}{3}$ في معادلة الحزمة لنحصل على معادلة المستوي المطلوب

$$P\left(\frac{-1}{3}\right) = \left(-1 + \frac{1}{3}\right)y + \left(3 - \frac{2}{3}\right)z - 2 = 0$$

$$P: -\frac{2}{3}y - \frac{7}{3}z - 2 = 0 \Rightarrow P: -2y - 7z - 6 = 0$$

مثال: أوجد معادلة المستوي المار بالفصل المشترك للمستويين

$P_1: x - 3y + 7z + 36 = 0 \quad , \quad P_2: 2x + y - z - 15 = 0$

ويبعد عن المبدأ مسافة $D = 3$

الحل: نكتب معادلة حزمة المستويات المارة بالفصل المشترك P_1 و P_2

$P(\lambda) = P_1 + \lambda P_2$

$= (1+2\lambda)x + (-3+\lambda)y + (7-\lambda)z + 36 - 15\lambda = 0$

نختار من الحزمة مستوياً يبعد عن المبدأ مسافة $D = 3$

$dist(O, p(\lambda)) = 3 \Rightarrow \dfrac{|36 - 15\lambda|}{\sqrt{(1+2\lambda)^2 + (-3+\lambda)^2 + (7-\lambda)^2}} = 3$

$|36 - 15\lambda| = 3\sqrt{(1+2\lambda)^2 + (-3+\lambda)^2 + (7-\lambda)^2}$

نربع الطرفين: $(36 - 15\lambda)^2 = 9\left[(1+2\lambda)^2 + (-3+\lambda)^2 + (7-\lambda)^2\right]$

بعد الفك والإصلاح نجد: $19\lambda^2 - 104\lambda + 85 = 0$

$\Delta :\quad (19 - 85)(\lambda - 1) = 0$

$19\lambda = 85 \Rightarrow \lambda = \frac{85}{19}\ ,\ \lambda = 1$

يوجد مستويان يبعدان عن المبدأ مسافة 3

$P_1'\left(\frac{85}{19}\right) = 189x + 28y + 48z - 591$

$P_2'(1) = 2x - 2y + 6z + 21$

مثال: أوجد المسافة بين المستويين المتوازيين:

$P_1 : x - 3y + 2z + 1 = 0 \quad , \quad P_2 : 2x - 6y + 4z + 3 = 0$

الحل: لدراسة الوضع النسبي: $\vec{n}_1(1, -3, 2)\ ,\ \vec{n}_2(2, -6, 4)$

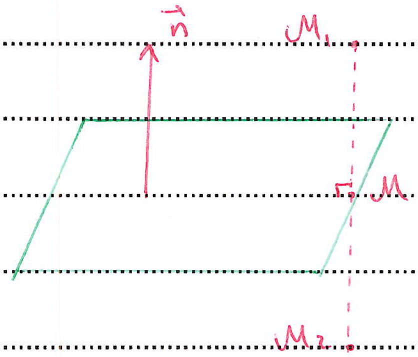
$\Rightarrow \vec{n}_2 = 2\vec{n}_1 \Rightarrow$ مرتبطان خطياً فالمستويان متوازيان

لإيجاد البعد بينهما نختار نقطة من P_1 ولتكن $M(x, y, z)$

نفرض أن: $y = 1\ ,\ x = 0 \Leftarrow$

$0 - 3(1) + 2z + 1 = 0 \Rightarrow 2z = 2 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow M(0, 1, 1)$

$dist(M, P_2) = \dfrac{|-6 + 4 + 3|}{\sqrt{4 + 36 + 16}} = \dfrac{1}{2\sqrt{14}}$



- تناظر نقطتين بالنسبة إلى مستوٍ:

لتكن $M_1(x_1, y_1, z_1)$

و $M_2(x_2, y_2, z_2)$

نقطتان من الفراغ نقول عن هاتين النقطتين

أنهما متناظرتان بالنسبة للمستوي P

$$P: px + qy + rz + d = 0$$

1) اذا كانت القطعة المستقيمة $\vec{n} \parallel [M_1M_2]$

$\overrightarrow{M_1M_2}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$\vec{n}\,(p, q, r)$

$$\frac{x_2 - x_1}{p} = \frac{y_2 - y_1}{q} = \frac{z_2 - z_1}{r} \quad (1)$$

2) واذا كان منتصف $[M_1M_2]$ ينتمي للمستوي P

$$\text{منتصف } [M_1M_2] = M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) \in P$$

$$p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + q\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + r\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) = 0 \quad (2)$$

من (1) و (2) بالحل المشترك نحصل على احداثيات M_2 نظيرة M_1 بالنسبة للمستوي P

* ملاحظة: المعادلات السابقة (1) و (2) تمكننا من إيجاد نظيرة نقطة بالنسبة لمستوي معلوم ، أو إيجاد معادلة مستوي P إذا علمت نقطتان متناظرتان بالنسبة لـ P

مثال: أوجد نظيرة النقطة $M_1(1, 3, -6)$ بالنسبة للمستوي P

$$P: 3x + y - 2z = 0$$

الحل: نفرض احداثيات $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-1\,,\ y_2-3\,,\ z_2+4) \parallel \vec{n}$ (1)

منتصف $M_1M_2 = M\left(\frac{x_2+1}{2}\,,\ \frac{y_2+3}{2}\,,\ \frac{z_2-4}{2}\right) \in P$ (2)

$\vec{n}(3\,,1\,,-2)$

$$\underset{(1)}{\frac{x_2-1}{3}} = \underset{(2)}{\frac{y_2-3}{1}} = \underset{(3)}{\frac{z_2+4}{-2}}$$

(1) و (2) $\Rightarrow x_2-1 = 3y_2-9 \Rightarrow \boxed{x_2 = 3y_2-8}$ (4)

(2) و (3) $\Rightarrow -2y_2+6 = z_2+4 \Rightarrow \boxed{y_2 = -\frac{1}{2}z_2+1}$ (5)

لدينا $M \in P \Leftarrow 3\left(\frac{x_2+1}{2}\right)+\frac{y_2+3}{2}-2\left(\frac{z_2-4}{2}\right)=0$

نضرب ب 2 $\Rightarrow 3x_2+y_2-2z_2+14=0$ (6)

بالحل المشترك (4) و (5) و (6)

نعوض (5) في (4): $x_2 = 3(-\frac{1}{2}z_2+1)-8$

$x_2 = -\frac{3}{2}z_2-5$ (7)

نعوض (7) و (5) في (6):

$3(-\frac{3}{2}z_2-5)+(-\frac{1}{2}z_2+1)-2z_2+14=0$

$-\frac{9}{2}z_2-15+-\frac{1}{2}z_2+1-2z_2+14=0$

$-5z_2-2z_2=0 \Rightarrow -7z_2=0 \Rightarrow z_2=0$

$\Rightarrow y_2=-\frac{1}{2}(0)+1 \Rightarrow y_2=1$

$x_2 = -\frac{3}{2}(0)-5 \Rightarrow x_2=-5$

$\Rightarrow M(-5\,,1\,,0)$

مثال: أوجد معادلة المستوي P اذا علمت أن:

$M_1(1,0,1)$ ، $M_2(-1,-2,-1)$ متناظرتان بالنسبة إلى P

الحل: $P: px+qy+rz+d=0$

$M'(0,-1,0)\in P$ منتصف $[M_1M_2]$

$P \Rightarrow -q+d=0 \Rightarrow \boxed{q=d}$ (*)

$\overrightarrow{M_1M_2}(-2,-2,-2) \parallel \vec{n}_p$

$$\frac{-2}{p}=\frac{-2}{q}=\frac{-2}{r}$$

نعوض (*) في المعادلة السابقة نجد أن: $p=q=r=d$

تكون معادلة المستوي:

$P: dx+dy+dz+d=0$

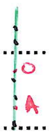
$\Rightarrow P: x+y+z+1=0$

المستقيم في الفراغ:

نسمي مجموعة نقاط الفراغ $M(x,y,z)$ المحققة للعلاقة

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{AM}$

مستقيماً في الفراغ محمولاً على المتجه الثابت $\overrightarrow{AB}$ حيث $t\in$ وسيط



(مجموعة نقاط المستقيم)

نحصل على معادلات المستقيم بالشكل الديكارتي

أو بالشكل الوسيطي أو شعاعياً أو كفصل مشترك لمستويين.

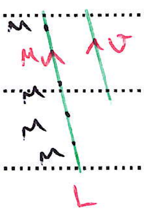
تعيين معادلة مستقيم في الفراغ:

توجد عدة طرق لتعيين معادلة المستقيم في الفراغ نذكر منها:

لتكن $M_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطة معلومة في الفراغ وليكن $\vec{v}(a,b,c)$

شعاع معلوم في الفراغ ونفرض $M(x,y,z)$ نقطة متحولة

على المستقيم L



$\overrightarrow{MM_1}=t\,\vec{v} \; ; \; t\in R$

أي أن المتجهان $\overrightarrow{M_1M}$ و $\vec{u}$ متوازيان (مرتبطان خطياً) و t هو الوسيط عندكل قيمة لـ t من R نحصل على نقطة من المستقيم L

المعادلة الأخيرة تسمى المعادلة المتجهية على المحاور الإحداثية x, y, z نحصل على جملة المعادلات:

$$\begin{cases} x - x_1 = at \\ y - y_1 = bt \\ z - z_1 = ct \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

وتسمى الشكل الوسيطي (التمثيل الوسيطي) لمعادلة مستقيم

وبحذف الوسيط t نحصل على الشكل الديكارتي

$$\underset{①}{\frac{x - x_1}{a}} = \underset{②}{\frac{y - y_1}{b}} = \underset{③}{\frac{z - z_1}{c}}$$

الآن لدينا من ① و ②: $b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$

من ① و ③: $c(x - x_1) - a(z - z_1) = 0$

وجملة المعادلتين السابقتين يمثلان معادلتي مستويان اذن الفصل المشترك لهما هو L

مثال: أوجد المعادلات الديكارتية والوسيطية للمستقيم L المار بالنقطة $M_1(2, 4, 1)$ والموازي للمتجه $\vec{v}(2, -1, 3)$

الحل: ديكارتي:

$$\underset{①}{\frac{x-2}{2}} = \underset{②}{\frac{y-4}{-1}} = \underset{③}{\frac{z-1}{3}}$$

نحل ① و ② أو ② و ③ ونحصل على معادلة المستقيم

$$x = 2 + 2t$$
$$y = 4 - t \quad ; t \in R$$
$$z = 1 + 3t$$

انتهت المحاضرة