كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي2

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

دراسة التكامل من الشكل: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

حيث: $a \neq 0$, $\Delta \neq 0$

نفرض: $t = \frac{1}{2}(ax^2+bx+c)' \Rightarrow t = ax + \frac{1}{2}b$

$dt = a.dx$

مثال: أوجد التكامل: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

نفرض: $t = \frac{1}{2}(x^2+x+1)' \Rightarrow t = \frac{1}{2}(2x+1)$

$\Rightarrow t = x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = t - \frac{1}{2} \Rightarrow dt = dx$

الطريقة الأولى:

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2 + t - \frac{1}{2} + 1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t + \frac{1}{4} + t + \frac{1}{2}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}$$

الطريقة الثانية: إتمام إلى مربع كامل

$$x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}} = \ln\left[t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right] = \ln\left[x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right]$$

دراسة التكامل من الشكل: $I = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

حيث: $a \neq 0$, $\Delta \neq 0$

نفرض: $t = \frac{1}{2}(ax^2+bx+c)' \Rightarrow t = ax + \frac{1}{2}b$

$dt = a.dx$

مثال: أوجد التكامل:

$$I=\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\,dx$$

نفرض: $t=\frac{1}{2}(4x^2+4x+3)' \Rightarrow t=\frac{1}{2}(8x+4)$

$$\Rightarrow t=4x+2 \Rightarrow x=\frac{1}{4}(t-2) \Rightarrow dx=\frac{1}{4}dt$$

$$I=\int \frac{\frac{1}{4}t-\frac{1}{2}+3}{\sqrt{4\cdot\frac{1}{16}(t-2)^2+\frac{1}{4}\cdot 4(t-2)+3}}\cdot\frac{1}{4}dt$$

$$I=\int \frac{\frac{1}{16}t+\frac{5}{8}}{\sqrt{\frac{1}{4}\left[t^2-4t+4+4t-8+12\right]}}\,dt$$

$$=\int \frac{\frac{1}{16}t+\frac{5}{8}}{\frac{1}{2}\sqrt{t^2+8}}\,dt=\frac{1}{8}\int\frac{t}{\sqrt{t^2+8}}\,dt+\frac{5}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+8}}$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{2t}{\sqrt{t^2+8}}\,dt+\frac{5}{4}\ln\left(t+\sqrt{t^2+8}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\cdot 2\sqrt{t^2+8}+\frac{5}{4}\ln\left[t+\sqrt{t^2+8}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\sqrt{(4x+2)^2+8}+\frac{5}{4}\ln\left[4x+2+\sqrt{(4x+2)^2+8}\right]$$

تكاملات الدوال المثلثية:

1) التكاملات من الشكل: $\int \cos^m x\cdot\sin^n x\,dx$

أ) اذا كان m فردي نفرض $t=\sin x$

ب) اذا كان n فردي نفرض $t=\cos x$

جـ) اذا كان m,n فردي تصلح الحالتين السابقتين

د) اذا كان m,n زوجيان نستخدم العلاقات:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

كما نستفيد من هذه العلاقات في الحالات أ) ب) ج)

مثال: احسب $I_1 = \int \cos^5 x \cdot \sin^4 x \, dx$

فردي

نفرض: $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx$

$$I_1 = \int \cos^4 x \cdot \sin^4 x \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^2 \cdot \sin^4 x \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int (1-t^2)^2 \cdot t^4 \, dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) \, dt$$

$$= \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 + c$$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c$$

مثال: $I = \int \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx$ ← فردي

نفرض $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$

$$I = \int \cos^2 x \cdot \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int (\cos^2 x - \cos^4 x) \cdot (\sin x \, dx)$$

$$= \int (t^2 - t^4) \cdot (-dt) = \int (t^4 - t^2) \, dt$$

$$= \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 + c = \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + c$$

مثال: $I = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$

$$= \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 \, dx$$

$$I=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx=\frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\left[1-\cos 4x\right]dx$$

$$=\frac{1}{8}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]+c$$

مثال:

$$I=\int \sin^3 x\cdot\cos^3 x\,dx$$

يمكن أن نفرض: $t=\sin x$ أو $t=\cos x$

نفرض: $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x\,dx$

$$I=\int \sin^3 x\cdot\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=\int t^3(1-t^2)\,dt=\int(t^3-t^5)\,dt$$

$$=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^6+c$$

$$=\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x+c$$

انتهت المحاضرة