كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : نظرية المعادلات

المحاضرة : الثانية /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

* البرهان بطريقة التقريبات المتتالية:

تعتمد هذه الطريقة على استخدام الشكل التكاملي لحل مسألة القيم الابتدائية لبناء متتالية من الحلول التقريبية $\phi_m(t)$ والمتقاربة من الحل الحقيقي

- الخطوة الأولى: نأخذ القيمة الابتدائية كتقريب ابتدائي للحل: أي نأخذ

$$\phi_0(t) = x_0$$

- الخطوة الثانية: نستخدم ϕ_0 في المعادلة (6) التي تمثل الحل بالشكل التكاملي لبناء العنصر الثاني من المتتالية:

$$\phi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_0(s))\, ds$$

- الخطوة الثالثة: نستخدم ϕ_1 في المعادلة (6) لبناء العنصر الثالث في المتتالية

$$\phi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_1(s))\, ds$$

وهكذا نستخدم $\phi_{m-1}(t)$ في (6) لبناء العنصر m من المتتالية:

$$\phi_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_{m-1}(s))\, ds$$

وبالتالي نحصل على متتالية من الحلول التقريبية:

$$\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_m, \ldots$$

أولاً: نبرهن أن $\phi_m(t) \in R$ أي نبرهن أنه

عندما $|t - t_0| \leq \alpha$ فإن $|t - t_0| \leq a$

و $\|\phi_m(t) - x_0\| \leq b$

لدينا $\alpha \leq a$ و $|t - t_0| \leq \alpha \Leftarrow |t - t_0| \leq a$

نبرهن أن $\| \phi_m(t) - x_0 \| \leq b$ باستخدام الاستقراء الرياضي:

* نثبت صحة العلاقة من أجل $m=1$:

$$\| \phi_1(t) - x_0 \| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\, ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \| f(s, x_0) \| \, ds \leq \int_{t_0}^{t} M \, ds \leq M |t - t_0| \leq M . \alpha \leq b$$

حيث $\alpha = \frac{b}{M}$ $\Leftarrow$ بالتالي العلاقة صحيحة من أجل $m=1$

* نفرض صحة العلاقة من أجل $m=k$ ، ونبرهن صحتها من أجل $m=k+1$

أي لنبرهن أن $\| \phi_{k+1}(t) - x_0 \| \leq b$

لدينا $\| \phi_{k+1}(t) - x_0 \| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_k(s))\, ds \right\|$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \| f(s, \phi_k(s)) \| \, ds \leq \int_{t_0}^{t} M \, ds \leq M . \alpha \leq M . \frac{b}{M} \leq b$$

بالتالي العلاقة صحيحة من أجل $m=k+1$ $\Leftarrow$ $R \ni (t, \phi_m(t))$

ثانياً: نبرهن الآن أن المتتالية $\phi_m(t)$ متقاربة أي تتقارب نحو دالة $\phi(t)$

$$\phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) + (\phi_2 - \phi_1) + (\phi_3 - \phi_2) + \dots + (\phi_m - \phi_{m-1}) + \dots$$

$$= \phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\phi_k - \phi_{k-1}) \quad \text{---} \ (1)$$

متسلسلة متتالية مجاميعها الجزئية هي:

$$\phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) + (\phi_2 - \phi_1) + \dots + (\phi_m - \phi_{m-1}) = \phi_m$$

أي أن ϕ_m هي متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة (1)

بالتالي إذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة فإن متتالية مجاميعها الجزئية متقاربة أي ϕ_m متقاربة

لبرهان أن المتسلسلة ① متقاربة نبرهن أنها متقاربة نظامياً:

أي نبرهن أن $\|\phi_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} \| \phi_k - \phi_{k-1} \|$ ... ②

متقاربة.

عندما $k=1 \Rightarrow \| \phi_1(t) - \phi_0 \| = \| \phi_1(t) - x_0 \| = \| \int_{t_0}^{t} f(s, x_0) ds \|$

$\leq M |t - t_0|$

$\| \phi_2(t) - \phi_1(t) \| = \| \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_1(s)) ds - \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_0) ds \|$

$= \| \int_{t_0}^{t} (f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_0)) ds \| \leq \int_{t_0}^{t} \| f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_0) \| ds$

$\leq L \int_{t_0}^{t} \| \phi_1(s) - \phi_0 \| ds \leq L M \int_{t_0}^{t} |s - t_0| ds \leq L M \frac{|t - t_0|^2}{2}$

وهكذا: $\| \phi_m(t) - \phi_{m-1}(t) \| \leq M \frac{L^{m-1}}{m!} |t - t_0|^m$

$\| \phi_0 \| + \sum_{k=1}^{\infty} \| \phi_k(t) - \phi_{k-1}(t) \| \leq x_0 + M \alpha + L M \frac{\alpha^2}{2} + \dots$

$+ \frac{M L^{m-1}}{m!} \alpha^m + \dots = x_0 + \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^k \alpha^k}{k!}$

سلسلة متقاربة بانتظام مجموعها هو $e^{L\alpha} - 1$

⇐ ~~[illegible]~~ السلسلة متقاربة ~~[illegible]~~ أي السلسلة ① متقاربة

قطعياً ومنه متقاربة بالتالي متتالية المجاميع الجزئية متقاربة أي ϕ_m

متقاربة ولنرمز لنهايتها بـ $\phi(t)$

ثالثاً: نبرهن أن $\phi(t)$ يحقق المعادلة التكاملية لدينا:

$\phi(t) = \lim_{m \to \infty} \phi_m(t)$

$$\phi_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_{m-1}(s))\,ds$$

تابع مستمر و f $\Leftarrow \begin{cases} \\ \phi_\ell(t) \to \phi_m(t) \end{cases}$ $f(s, \phi_{m-1}(s)) \xleftarrow{\text{يسعى}} f(s, \phi(s))$

وعليه فإن

$$\lim_{m\to\infty} \phi_m(t) = x_0 + \lim \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_{m-1}(s))\,ds$$

$$\Rightarrow \phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\,ds$$

أي أن $\phi(t)$ يحقق الشكل التكاملي للحل

$\Leftarrow$ $\phi(t)$ يحقق المسألة الابتدائية لنثبت الآن وحدانية الحل

لنفرض أن ϕ و $\bar{\phi}$ حلين للمعادلة التكاملية أي:

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\,ds$$

$$\bar{\phi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(s), \bar{\phi}(s))\,ds$$

$$\|\phi(t) - \bar{\phi}(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t} \big(f(s, \phi(s)) - f(s, \bar{\phi}(s))\big)\,ds\right\|$$

$$\le \int_{t_0}^{t} \|f(s, \phi(s)) - f(s, \bar{\phi}(s))\|\,ds$$

$$\le L \int_{t_0}^{t} \|\phi(s) - \bar{\phi}(s)\|\,ds \quad \ldots (3)$$

ولنعرف

$$U(t) = \int_{t_0}^{t} \|\phi(s) - \bar{\phi}(s)\|\,ds$$

(1) $U(t_0) = 0$ (2) $U(t) \ge 0$

من أجل $t \ge t_0$:

$$U'(t) = \|\phi(t) - \bar{\phi}(t)\|$$

بالاستفادة من (3)

$$U'(t) \le L\,U(t)$$

$$U'(t) - L\,U(t) \leq 0$$

$$\int_{t_0}^{t} (U(s)\, e^{-Ls})'\, ds \leq 0$$

$$U(t)\, \underbrace{e^{-Lt}}_{\geq 0} - \underbrace{U(t_0)}_{=0}\, e^{-Lt_0} \leq 0$$

دوماً موجب

$$U(t) \leq 0$$

بالتالي $0 \leq U(t) \leq 0$

بالتالي الحل وحيد $\Rightarrow U(t) = 0 \Rightarrow \phi(t) = \overline{\phi}(t) \Rightarrow$

برهان نظرية الوجود والوحدانية باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة:

بفرض B فضاء باناخ ولتكن B_1 مجموعة مغلقة في B وليكن $F: B_1 \to B_1$ مؤثر يحقق شرط ليبشيز بثابت $L < 1$

(مؤثر مقلص) أي أن: $\| Fx_1 - Fx_2 \| \leq L \| x_1 - x_2 \|$;

$$L < 1 \;,\; x_1, x_2 \subset B_1$$

عندئذ يكون للمعادلة $Fx = x$ حل وحيد في B_1 هو $x = x(t)$ (أي يوجد نقطة ثابتة وحيدة لـ F) ~~وحل~~

- من أجل برهان نظرية الوجود والوحدانية باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة نضع المسألة ضمن فضاء باناخ مناسب B على شكل معادلة من النمط $x = Fx$

نعرف المؤثر F بالشكل: $F: x \to x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$

وتصبح مسألة القيم الابتدائية: $x = Fx$ أي أن حلول مسألة القيم الابتدائية هي نقط ثابتة للمؤثر F $\left| (Fx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))\, ds \right.$

$(Fx)(t)$ هو عبارة عن دالة مستمرة في t أي إذا أثبتنا أنه للمؤثر F نقطة ثابتة وحيدة نكون أثبتنا أن لمسألة القيم الابتدائية حل وحيد

سنكتفي بالبرهان من أجل $t-t_0 \leq \delta$ حيث أن البرهان مناسب تماماً من أجل $t_0 - t \leq \delta$ (الجزء الثاني من المراجعة)

ليكن X فضاء التوابع المستمرة والمعرفة على المجال $[t_0, t_0+\delta]$

$$X = C[t_0, t_0+\delta]$$

ولنعرف على X النظيم بالشكل:

$$\|x\|_C = \max \|x(t)\| \quad ; t \in [t_0, t_0+\delta]$$

ولنأخذ $S = \{x \in X \; ; \|x - x_0\|_C \leq b\} \subset X$

S مجموعة مغلقة في الفضاء X و X مع النظيم المعرف عليه هو فضاء باناخ.

ولنأخذ $B = X$

$S = B_1$

نجزء البرهان في ثلاثة خطوات:

* الخطوة (1): نبرهن أن f معرف على S إلى S أي:

$$f : S \to S$$

أي إنه نبرهن من أجل $\phi \in S$ فإن $F_\phi \in S$ أي نريد برهان أن:

$$\|F_\phi - x_0\| \leq b$$

$$F_\phi(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} \left(f(s, \phi(s)) - f(s, x_0) + f(s, x_0)\right) ds$$

$$\|F_\phi(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \left(\|f(s, \phi(s)) - f(s, x_0)\| + \|f(s, x_0)\|\right) ds$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} \|\phi(s) - x_0\| \, ds + \int_{t_0}^{t} M \, ds$$

بما أن $\phi \in S \Leftarrow \|\phi - x_0\| \leq b \Leftarrow \|\phi(s) - x_0\| \leq \|\phi - x_0\|_C \leq b$

أي

$$\|F_\phi(t) - x_0\| \leq (Lb + M)(t - t_0)$$

$$\|F_\phi - x_0\|_C = \max \|F_\phi(t) - x_0\| \leq (Lb + M)\,\delta \; ; [t_0, t_0+\delta]$$

نختار δ بحيث تكون $\delta < \frac{b}{Lb+M}$ (**)

أي $\|F_\phi - x_0\|_c \le b$

$\forall \phi \in S \Rightarrow F_\phi \in S \quad ; F : S \to S$

* الخطوة (2): نبرهن أن F مؤثر مقلص أي يحقق شرط ليبشيتز ثابته $L<1$

نأخذ $\phi_1, \phi_2 \in S$ ونبرهن أن:
$\|F\phi_1(t) - F\phi_2(t)\| =$
$\|\int_{t_0}^{t} f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))\, ds\| \le$

$\int_{t_0}^{t} \|f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))\| ds$

$\le L \int_{t_0}^{t} \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\| ds \le L \|\phi_1 - \phi_2\|_c \int_{t_0}^{t} ds$
$\le L.\delta \; \|\phi_1 - \phi_2\|_c$

نختار $L.\delta = \rho$ ونختار δ بحيث يكون $\delta < \frac{1}{L} \Leftarrow L.\delta < 1 \Leftarrow \rho < 1$
$\|F\phi_1 - F\phi_2\|_c \le \rho \|\phi_1 - \phi_2\|_c$

$\rho < 1 \Leftarrow F$ مؤثر مقلص

أصبحت شروط النقطة الثابتة محققة وبالتالي: $Fx = x$ له حل وحيد في S
مبرهنة

أي لمسألة القيم الابتدائية حل وحيد في $S \subset X$

الخطوة (3): بقي أن نبرهن أنه لا يوجد حلول لمسألة القيم الابتدائية خارج S
كل حل لمسألة القيم الابتدائية هو تابع مستمر أي هو تابع في X:
$X : C[t_0, t_0 + \delta]$

إن $x_0 \in S$ نبرهن أن الحل $\phi(t)$ الذي يبدأ من x_0 في اللحظة t_0 لن يغادر S
نفرض جدلاً أن هذا الحل سيغادر S أي أنه يوجد لحظة $t > t_0$ بحيث

$\|\phi(t)-x_0\| = b$

أي أن الحل سيقطع الحد للخروج خارج المجموعة S ولتكن $t_0 < T$ أول لحظة ممكنة لحدوث التقاطع

$\|\phi(T)-x_0\| = b$

$\forall t_0 \leq t_0 \leq T$

$$\|\phi(t)-x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,\phi(s)) - f(s,x_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s,x_0)\|$$

تتبع الطريقة بالمحاضرة القادمة

Safaa