كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي2

المحاضرة : الثالثة /**عملي**/

{{ A to Z مكتبة }}

تكملة حل التمرين الأخير من المحاضرة الثانية عملي.

$Y = \mathbb{C}^n$ فضاء شعاعي فوق الحقل K وليكن $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to K$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$; $x = (x_1, x_2, \dots)$

$y = (y_1, y_2, \dots)$

أثبت أن $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ فضاء هلبرت ؟

الحل:

فضاء هلبرت هو فضاء جداء داخلي وتام

أثبتنا في المحاضرة السابقة أن $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ فضاء جداء داخلي بقي أن نبرهن أنه تام

لإثبات أن فضاء ما هو فضاء تام يجب أن نثبت أن كل متتالية لكوشي فيه متقاربة من نقطة منه

لتكن $(X_r)_{r \geq 1}$ متتالية لكوشي في $\mathbb{C}^n$ فهي تحقق الشرط :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \; ; \; \|x_r - x_m\| < \varepsilon \quad \forall r, m > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow \|x_r - x_m\|^2 < \varepsilon^2$

$\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(r)} - x_i^{(m)}|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |x_i^{(r)} - x_i^{(m)}|^2 < \varepsilon^2 \; ; \; i = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow |x_i^{(r)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon \; ; \; r, m \geq N(\varepsilon)$

بالتالي $(x_i)^m$ متتالية لكوشي في الفضاء $\mathbb{C}$ والفضاء $\mathbb{C}$ هو فضاء تام

$$\begin{array}{cccc} x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & \dots, & x_n^{(m)} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ x_1 & x_2 & & x_n \end{array}$$

ومنه بجعل $m \to \infty$: $(x_i^{(m)}) \xrightarrow{m \to \infty} x_i \;;\; i = 1, n$

$(x^m) \xrightarrow{m \to \infty} x$

$\Rightarrow |x_i^{(r)} - x| < \varepsilon \;;\; n \to \infty$

ومنه بجعل $(x^r)_{r \geq 1}$ متقاربة من نقطة $x \in \mathbb{C}^n$ فإن $\mathbb{C}^n$ فضاء تام لأن كل متتالية لكوشي فيه متقاربة من نقطة منه

$\Leftarrow$ الفضاء $(\mathbb{C}^n, <.,.>)$ فضاء هلبرت.

التمرين الأول: ليكن ℓ^2 فضاء كل المتتاليات $(X_r)_{r \geq 1}$ التي تحقق الشرط:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(r)}|^2 < \infty$$

أثبت أن $(\ell^2, <.,.>)$ فضاء هلبرت حيث:

$$<.,.> = \ell^2 \times \ell^2 \to K$$

$$\forall x, y \in \ell^2 \;;\; <x, y> = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \overline{y_i}.$$

الحل:

$\forall x = (x_1, x_2, \ldots) \;,\; y = (y_1, y_2, \ldots) \;,\; Z = (Z_1, Z_2, \ldots)$

① $<x+y, Z> \stackrel{??}{=} <x, Z> + <y, Z>$

$<x+y, Z> = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)\overline{Z_i} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{Z_i} + y_i \overline{Z_i} =$

$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{Z_i} + \sum_{i=1}^{\infty} y_i \overline{Z_i} = <x, Z> + <y, Z>.$

② $<\alpha x, y> \stackrel{?}{=} \alpha <x, y>$

$<\alpha x, y> = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha x_i \overline{y_i} = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} = \alpha <x, y>$

③ $<x, y> \stackrel{?}{=} \overline{<y, x>}$

• $<x, y> = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$, • $\overline{<y, x>} = \overline{\sum_{i=1}^{\infty} y_i \overline{x_i}} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{y_i} x_i =$

$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} = <x, y>.$

④ $\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{x_i}=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\geq 0$

⑤ $\langle x,x\rangle=0 \overset{??}{\Longrightarrow} x=0$

$\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{x_i}=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2=0$

$\Rightarrow |x_i|^2=0 \;;\; i=1,2,\dots \Rightarrow |x_i|=0 \;;\; i=1,2,\dots$

$\Rightarrow x_i=0 \;;\; i=1,2,\dots$

لكي يكون l^2 فضاء هلبرت يجب أن يكون فضاء جداء داخلي وتام

بقي اثبات أنَّ l^2 فضاء تام : لتكن $(x_r)_{r\geq 1}$ متتالية لكوشي في الفضاء l^2 :

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon) \;;\; \|x_r-x_m\|<\varepsilon \quad \forall m,r>N(\varepsilon)$

$\|x_r-x_m\|^2<\varepsilon^2$

$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(r)}-x_i^{(m)}|^2<\varepsilon^2 \Longrightarrow |x_i^{(r)}-x_i^{(m)}|^2<\varepsilon^2 \;;\; i=1,2,\dots$

$|x_i^{(r)}-x_i^{(m)}|<\varepsilon \quad \forall i=1,2,\dots \;\&\; r,m>N(\varepsilon)$

بالتالي $(x_i^{(m)})$ متتالية لكوشي في الفضاء التام $\mathbb{C}$ ومنه :

$x_1^{(m)} \;,\; x_2^{(m)} \;\dots$

$\downarrow \quad\quad \downarrow$

$x_1 \quad\quad x_2 \;\dots$

ومنه بجعل $m\to\infty$ فإنَّ

$(x^{(m)}) \xrightarrow{m\to\infty} x$

$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(r)}-x_i^{(m)}|^2<\varepsilon^2$

وبجعل $m\to\infty$

$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(r)}-x_i|^2<\varepsilon^2 \Longrightarrow \|x_r-x\|<\varepsilon$

$(x_r)_{r\geq 1}$ متقاربة من x فهو فضاء تام

$\Leftarrow$ l^2 فضاء هلبرت لكونه فضاء جداء داخلي وتام

التمرين الثاني: X فضاء جداء داخلي حقيقي و $\|x\|=\|y\|$

عندئذٍ فإنَّ $<x+y , x-y> = 0$ ؟

الاثبات:

$<x+y , x-y> = <x,x> + <x,-y> + <y,x> + <y,-y>$

$= <x,x> - <x,y> + <y,x> - <y,y>$

$= <x,x> - <x,y> + \overline{<x,y>} - <y,y>$

ومن كون X فضاء جداء داخلي حقيقي بالتالي $<x,y> = \overline{<y,x>}$

$\Rightarrow <x+y , x-y> = <x,x> - <x,y> + <x,y> - <y,y>$

$= \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$

حيث $\|x\| = \|y\|$ من الفرض

التمرين الثالث: X فضاء جداء داخلي عندئذٍ فإنَّ:

$x \perp y : \iff \|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\| \quad \forall \alpha$

الاثبات:

$(\Rightarrow)$ $x \perp y$ بالتالي $<x,y> = 0$

- $\|x+\alpha y\|^2 = <x+\alpha y , x+\alpha y> =$

$<x,x> + \bar{\alpha} <x,y> + \alpha <y,x> + \alpha\bar{\alpha} <y,y>$

$= <x,x> + 0 + 0 + |\alpha|^2 . <y,y>$

$= <x,x> + |\alpha|^2 . <y,y>$

- $\|x-\alpha y\|^2 = <x-\alpha y , x-\alpha y> =$

$<x,x> - \bar{\alpha} <x,y> - \alpha <y,x> + \alpha\bar{\alpha} <y,y>$

$= <x,x> - 0 - 0 + \alpha\bar{\alpha} <y,y>$

$= <x,x> + |\alpha|^2 . <y,y>$

ومنهُ فإنَّ $\|x+\alpha y\|^2 = \|x-\alpha y\|^2$

$\Rightarrow \|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\| \quad \forall \alpha$

وبالتالي فإنّ العلاقة صحيحة

نعلم بأنّ

$$Re<x,y> = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$

$$Im<x,y> = \frac{1}{4}\left[\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right]$$

لدينا من الفرض: $\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|$

عندما $\alpha = 1$ $\|x+y\| = \|x-y\|$

وعندما $\alpha = i$ $\|x+iy\| = \|x-iy\|$

نعوض في Re و Im:

$$Re<x,y> = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{4}(0) = 0$$

$$Im<x,y> = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right) = \frac{1}{4}(0) = 0$$

$$\Rightarrow <x,y> = 0 \Rightarrow x \perp y$$

العلاقة صحيحة

التمرين الرابع: $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

بحيث $T(v) = (x+iy, -ix)$ $v(x,y)$

المطلوب: أثبت أنّ T مترافق ذاتياً ؟

الإثبات:

لإثبات أنّ T مترافق ذاتياً نثبت أنّ $<Tv, w> = <w, T_w^*>$

$v(x_1, y_1)$ $w(x_2, y_2)$

$$<Tv, w> = <T(x_1, y_1), (x_2, y_2)> = <(x_1+iy_1, -ix_1), (x_2, y_2)> = (x_1+iy_1)\overline{x_2} - ix_1\overline{y_2}$$

$$= x_1(\overline{x_2} - i\overline{y_2}) + iy_1\overline{x_2}$$

لنضع $T_w^* = T^*_{(x_2, y_2)} = (z_1, z_2)$

$$<v, T_w^*> = <(x_1, y_1), (z_1, z_2)> = x_1\overline{z_1} + y_1\overline{z_2}$$

بالمقارنة :

- $\overline{Z_1} = (\overline{x_2 - i y_2})$

$Z_1 = x_2 + i y_2$

- $\overline{Z_2} = i \overline{x_2}$

$Z_2 = -i x_2$

$T^*_w = (x_2 + i y_2 \; , \; -i x_2)$

ومنه $T = T^*$ والمؤثر مرافق ذاتياً.

انتهت المحاضرة