كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : نظرية المعادلات

المحاضرة : الثالثة/**عملي**/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

نظرية المعادلات   عملي -3-

---

[1] حول المعادلة $x''+x=0$ إلى جملة معادلات خطية جزئية من المرتبة الأولى $x(0)=0 \quad , x'(0)=1$

ثم حل مسألة القيم الابتدائية الموافقة، وأوجد الحل التقريبي.

الحل:

$$x = x_1$$

$$x' = x_2 = x_1'$$

$$x_2' = x'' = -x = -x_1$$

$$x_1' = x_2 \qquad x_1(0)=0$$

$$x_2' = -x_1 \qquad x_2(0)=1$$

$$x_i^m = x_i^0 + \int_{t_0}^{t} f_i\,(s, x_i^{m-1}(s))\,ds \qquad ; \ i=1,2$$

$$t_0=0$$

$$f_1 = (t, x_1, x_2) = x_2$$

$$f_2 = (t, x_1, x_2) = -x_1$$

$$x_1^1 = x_1^0 + \int_0^t f_1\,(s, x_1^0, x_2^0)\,ds$$

$$= 0 + \int_0^t 1\,ds = [s]_0^t = t$$

$$x_2^1 = x_2^0 + \int_0^t f_2\,(s, x_1^0, x_2^0)\,ds$$

$$= 1 + \int_0^t 0 = 1$$

$$x_1^2 = x_1^0 + \int_0^t 1\,ds = t$$

$$x_2^2 = x_2^0 + \int_0^t -s\,ds = 1 - \frac{t^2}{2}$$

$$x_1^3 = x_1^0 + \int_0^t \left(1 - \frac{s^2}{2}\right)ds$$

$$= 0 + \left[t - \frac{t^3}{6}\right]$$

$$x_2^3 = x_2^0 + \int_0^t -s\,ds$$

$$= 1 + \left[-\frac{t^2}{2}\right] = 1 - \frac{t^2}{2} \Rightarrow$$

$$x_1^n = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$x_2^n = 1 - \frac{t^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$x_1 = \lim_{n \to \infty} x_1^n = \sin t$$

$$x_2 = \lim_{n \to \infty} x_2^n = \cos t$$

الحل هو $\boxed{x = \sin t}$

2) ~~...~~ استخدم طريقة بيكارد لحل مسألة القيم الابتدائية

$x_1' = 2x_2 \quad x_1(0) = 3 \quad x_2' = -2x_1 \,, \quad x_2(0) = 4$

ثم استنتج الحل النهائي :

الحل :

$$x_1^1 = x_1^0 + \int_0^t f_1(s, x_1^0, x_2^0)\,ds$$

$$= 3 + \int_0^t 2x_2^0\,ds$$

$$= 3 + \int_0^t 8\,ds = 3 + 8t$$

$$x_2^1 = x_2^0 + \int_0^t -2x_1^0\,ds = 4 + \int_0^t -6\,ds = 4 - 6t$$

$$x_1^2 = x_1^0 + \int_0^t 2x_2^1\,ds$$

$$= 3 + \int_0^t 2(4 - 6s)\,ds$$

$$= 3 + \int_0^t (8 - 12s)\,ds$$

$$= 3 + 8t - 6t^2$$

$$x_2^2 = x_2^0 + \int_0^t -2x_1^1\,ds$$

$$= 4 + \int_0^t -2(3 + 8s)\,ds$$

$$= 4 - 6t - 8t^2$$

$$x_1'' = 2x_2$$

$$\frac{1}{2}x_1'' = -2x_1$$

$$x_1'' = -4x_1$$

$x_1'' + 4x_1 = 0$; $m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \mp 2i$

$$x_1 = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

$x_1(0) = 3 \Rightarrow \boxed{c_1 = 3}$

$$x_1' = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t$$

$$x_2 = x_1' = -6 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t$$

$x_2(0) = 2c_2 = 4 \Rightarrow \boxed{c_2 = 2}$

$$x_1 = 3\cos 2t + 2\sin 2t$$

$$x_2 = -6\sin 2t + 4\cos 2t$$

3) ادرس وجود ووحدانية لحل مسألة القيم الابتدائية

$x' = 2x^{2/3}$ $\quad x(t_0) = 0$

الحل: $f(t, x) = 2x^{2/3}$

التابع مستمر ⟸ الحل موجود حسب مبرهنة بيانو

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4}{3}x^{-1/3}$$

التابع الآن غير مستمر عندما $x = 0$

بالتالي لا يمكن أن نضمن أن الحل وحيد

$$\frac{dx}{dt} = 2x^{2/3}$$

$$dx = 2x^{2/3}\,dt.$$

$\frac{dx}{x^{2/3}} = 2\,dt$; $x(t) \neq 0$

$$x^{-2/3}\,dx = 2\,dt$$

$$\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = 2t + c_1$$

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 2t + c_1$$

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{2t + c_1}{3}$$

$$x = \frac{(2t + c_1)^3}{27} \quad \text{------} \quad (\star)$$

$$x(t_0) = 0 \Rightarrow \frac{(2t_0 + c_1)^3}{27} = 0$$

$$(2t_0 + c_1)^3 = 0 \Rightarrow 2t_0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -2t_0$$

نعوض في $(\star)$

$$\Rightarrow x = \frac{(2t - 2t_0)^3}{27}$$

نلاحظ أن $x(t) = 0$ يحقق المعادلة المطلوبة

$\Leftarrow$ $x(t) = 0$ حل.

$\boxed{٦}$. $x' = \dfrac{x}{t}$ ادرس وجود ووحدانية الحل

في الحالات التالية $x(0) = 0$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$

ثم حدد المنطقة التي يكون فيها الحل وحيد:

الحل:

$$x' = \frac{x}{t}$$

$$f(t, x) = \frac{x}{t}$$

تابع غير مستمر عند $t=0$ $\Leftarrow$ حسب مبرهنة بيانو لا نضمن وجود حل

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{t}\right) = \ln c \Rightarrow x = ct$$

① $x_0=0 \Leftarrow 0=c\cdot 0$ يوجد عدد لا نهائي من الحلول

② $x(0)=1 \Leftarrow 1=c(0)$ مستحيل الحل.

③ $x(1)=0 \Leftarrow 0=(1)c \Leftarrow x=0$ حل وحيد

$R=\{(t,x)\ ;\ |x-0|\le a\ ,\ |t-1|\le b<1\ ;\ a,b\in \mathbb{R}^+\}$

5 نفس السؤال 4

$x'=\dfrac{2}{t-1}$; $x(1)=3$

$x(2)=1$

حدد المنطقة التي يكون فيها الحل وحيد

الحل: $f(t,x)=\dfrac{2}{t-1}$;

f تابع غير مستمر وبالتالي لا يضمن وجود الحل حسب بيانو

$$x'=\frac{2}{t-1}$$

$$dx=\frac{2dt}{t-1} \Rightarrow x=2\ln|c(t-1)|$$

$$x(1)=3 \Rightarrow 3=2\ln(0)$$

$\Leftarrow$ مستحيلة الحل

$$x(2)=1 \Rightarrow 1=2\ln(c) \Rightarrow c=e^{\frac{1}{2}}$$

حل وحيد $x=2\ln|e^{\frac{1}{2}}(t-1)|$

$R=\{(t,x)\ ;\ |x-1|\le a\ ,\ |t-2|\le b<1\ ;\ a,b\in \mathbb{R}\}$

وظيفة: $x'=\dfrac{x-3}{t-2}$

$x(2)=1$

$x(2)=0$

$x(4)=1$

The End