كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : نظرية المعادلات

المحاضرة : **2+1 /عملي/**

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

السؤال الأول: أثبت أن الدالة المعطاة تحقق شرط ليبشتز على المناطق التالية:

$\boxed{1}$ $f(t,x)=tx^2$ ، (أ) على المستطيل: $R_1=\{(t,x):\ |t|\le 1,\ |x|\le 1\}$

(ب) على المنطقة: $R_2=\{(t,x):\ |t|\le 1,\ |x|\le \infty\}$

$\boxed{2}$ $f(t,x)=\dfrac{t}{x}$

$R_1=\{(t,x):\ |t|\le 1,\ 1\le |x|\le \infty\} \to\ ]\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

$R_2=\{(t,x):\ |t|\le 1,\ |x|\le 1\} \to x\in[-1,1]$

$\boxed{3}$ حول المعادلة $x''+x^2=1$ إلى جملة معادلات تفاضلية ثم تحقق من وجود ثابت يحقق شرط ليبشتز على:

$R=\{(t,x_1,x_2):\ |t|\le a,\ |x_1|\le b,\ |x_2|\le c\}$

الحل:

$\boxed{1}$ $\forall (t,x_1),(t,x_2)\in R;\ |f(t,x_1)-f(t,x_2)|\le L|x_1-x_2|$

$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|=|tx_1^2-tx_2^2|$

$=|t|\,|x_1^2-x_2^2|=|t|\,|x_1+x_2|\,|x_1-x_2|\le |t|\,[|x_1|+|x_2|]\,|x_1-x_2|$

① $(t,x_1),(t,x_2)\in R_1 \Rightarrow |t|\le 1$

$|x|\le 1 \Rightarrow \begin{cases}|x_1|\le 1\\ |x_2|\le 1\end{cases}$

$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \leq 1[1+1]|x_1-x_2|$

$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \leq 2|x_1-x_2| \Rightarrow L=2$ ثابتة ليبشتز

الشرط محقق

② $(t,x_1),(t,x_2) \in R_2 \Rightarrow |t|\leq 1 \quad |x_1|\leq \infty \quad , |x_2|\leq\infty$

في حال $x_1 \to \infty$ أو $x_2 \to \infty \Leftarrow |f(t,x_1)-f(t,x_2)| \to \infty$

شرط ليبشتز غير محقق

$\forall (t,x_1),(t,x_2) \in R ; |f(t,x_1)-f(t,x_2)| \leq L|x_1-x_2|$ $\boxed{2}$

$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| = \left|\frac{t}{x_1}-\frac{t}{x_2}\right| = |t| . \left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|$

$= |t| \left|\frac{x_2-x_1}{x_1 x_2}\right| = |t| . \left|\frac{1}{x_1 x_2}\right| . |x_1-x_2|$

① $(t,x_1),(t,x_2) \in R_1 \Rightarrow |t|\leq 1 \quad , 1\leq |x_1| \leq \infty \quad , 1\leq |x_2|\leq\infty$

$\Rightarrow \frac{1}{|x_1|}\leq 1 \quad \& \quad \frac{1}{|x_2|}\leq 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{x_1 . x_2}\right| \leq 1$

$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \leq 1 . |x_1-x_2| \Rightarrow L=1$ الشرط محقق وثابتة

ليبشتز

② $(t,x_1)(t,x_2) \in R_2 \Rightarrow |t|\leq 1 \quad , \left.\begin{matrix}|x_1|\leq 1\\ |x_2|\leq 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{|x_1|.|x_2|} \geq 1$

في حال $x_1 \to 0$ أو $x_2 \to 0 \Leftarrow \left|\frac{1}{x_1 . x_2}\right| \to \infty \Leftarrow$

$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \to \infty$ شرط ليبشتز غير محقق

$\boxed{3}$ نفرض $x = x_1$ و $x' = x_2$

$x_1' = x' = x_2$

$x_2' = x'' = 1-x^2 = 1-x_1^2$

$$F(t, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 1-x_1^2 \end{bmatrix}$$

$\forall (t, x_1, x_2), (t, y_1, y_2) \in R$

$$|F(t, x_1, x_2) - F(t, y_1, y_2)| = \left\| \begin{bmatrix} x_2 \\ 1-x_1^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_2 \\ 1-y_1^2 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} x_2 - y_2 \\ y_1^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(x_2-y_2)^2 + (y_1^2 - x_1^2)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2-y_2)^2 + (y_1-x_1)^2 (y_1-x_1)^2}$$

$$|F(t, x_1, x_2) - F(t, y_1, y_2)| \le \sqrt{(x_2-y_2)^2 + (x_1-y_1)^2 (|y_1| + |x_1|)^2}$$

$$|y_1| \le b \quad , \quad |x_1| \le b$$

نفرض $L^2 = \max(1, 4b^2)$

$$\le \sqrt{(x_2-y_2)^2 + (x_1-y_1)^2 (4b^2)} \le \sqrt{L^2 (x_2-y_2)^2 + L^2 (x_1-y_1)^2}$$

$$\le \sqrt{(x_2-y_2)^2 + (x_1-y_1)^2} = L \, |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)|$$ شرط ليبشتز محقق

$\boxed{4}$ حول المعادلة $x''' + x^2 = 1$ إلى جملة معادلات تفاضلية ثم تحقق من شرط ليبشتز على المنطقة:

$$D = \{(t, x_1, x_2, x_3) : |t| \le 1 , |x_1| \le a , |x_2| \le b , |x_3| \le c\}$$

نفرض $x = x_1$, $x' = x_2$, $x'' = x_3$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x' = x_2 \\ x_2' &= x'' = x_3 \end{aligned}\right\} \quad x_3' = x''' = 1 - x^2 = 1 - x_1^2$$

$$|F(t, x_1, x_2, x_3) - F(t, x_1, x_2, x_3)| = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 1 - x_1^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ 1 - y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\left| f(t, x_1, x_2, x_3) - F(t, y_1, y_2, y_3) \right| = \left\| \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 1 - x_1^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ 1 - y_1^2 \end{bmatrix} \right\|$$

$$\leq \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (y_1^2 - x_1^2)^2} \leq \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (y_1 - x_1)^2 (y_1 + x_1)^2}$$

$$\leq \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (y_1 - x_1)^2 (|x_1| + |y_1|)^2}$$

$$|x_1| \leq a \quad , \quad |y_1| \leq a$$

$$\leq \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (y_1 - x_1)^2 (4a^2)}$$

نفرض

$$L^2 = \max(1, 1, 4a^2)$$

$$\leq \sqrt{L^2 (x_2 - y_2)^2 + L^2 (x_3 - y_3)^2 + L^2 (y_1 - x_1)}$$

$$\leq L \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (y_1 - x_1)^2} \leq L \left\| (x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3) \right\|$$

الشرط محقق

$$(y_1 + x_1)^2 = |y_1 + x_1|^2 \leq [\,|y_1| + |x_1|\,]^2$$

وظيفة :

$$f(t, x) = \frac{x^2 + 1}{x} t$$

تحقق من شرط ليبشتز على المنطقة :

$$R_1 = \{ (t, x), \quad 1 \leq x \leq 2 \,,\; 0 \leq t \leq +\infty \}$$

$$R_2 = \{ (t, x) \,,\; 1 \leq x \leq \infty \,,\; 0 \leq t \leq T \}$$

= The End =

السؤال الأول: استخدم طريقة بيكارد لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$x(0)=1 \quad , \quad x'=-x \qquad f(t,x)=-x$

وأوجد الحل الحقيقي

$$x_m = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{m-1}(s))\,ds \qquad ; \; x_0=1 \quad , \; t_0=0$$

$$x_1 = 1+\int_0^t f(s,x_0)\,ds = 1+\int_0^t (-x_0)\,ds = 1-\int_0^t ds = 1-S\Big|_0^t = 1-t$$

$$x_2 = 1+\int_0^t f(s,x_1)\,ds = 1+\int_0^t (-x_1)\,ds = 1+\int_0^t (s-1)\,ds = 1+\frac{t^2}{2}-t$$

$$= 1-t+\frac{t^2}{2}$$

$$x_3 = 1+\int_0^t f(s,x_2)\,ds = 1+\int_0^t (-x_2)\,ds = 1+\int_0^t \left(-1+s-\frac{s^2}{2}\right)ds$$

$$x_n = 1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{t^n}{n!} \Rightarrow x=\lim_{x\to\infty} x_n = e^{-t}$$

$$x'=-x \Rightarrow \frac{dx}{x}=-dt \Rightarrow x=c\,e^{-t} \Rightarrow x(0)=1 \Rightarrow 1=c \qquad x=e^{-t}$$

السؤال الثاني: أوجد التقريب الرابع حسب بيكارد $y'=y+x \quad , \quad y(0)=1$

ثم أوجد الحل الحقيقي

$$y_m = y_0+\int_{x_0}^{x} f(s, y_{m-1}(s))\,ds \qquad y_0=1 \quad , \; x_0=0$$

$$y_1 = 1+\int_0^x f(s,1)\,ds = 1+\int_0^x s+1\,ds = 1+\left[\frac{s^2}{2}+s\right]_0^x$$

$$= 1+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x f(s, y_1)\,ds = 1 + \int_0^x s + y_1\,ds = 1 + \int_0^x (s + 1 + \frac{s^2}{2} + s)\,ds$$

$$= 1 + \int_0^x 2s + 1 + \frac{s^2}{2}\,ds = 1 + \left[s^2 + s + \frac{s^3}{6}\right]_0^x = 1 + x^2 + x + \frac{x^3}{6}$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x f(s, y_2)\,ds = 1 + \int_0^x (s + 1 + s^2 + s + \frac{s^3}{6})\,ds$$

$$= 1 + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + x$$

$\vdots$

y_4 (نكمل بنفس الطريقة)

(خطية) $y' - y = x \Rightarrow \mu = e^{\int p(x)dx} = e^{-x}$; $y = \frac{1}{\mu}[c + \int \mu q\,dx]$

$$= e^x [c + \int x e^{-x} dx]$$

$$= e^x [c + [-xe^{-x} - e^{-x}]] = ce^x - x - 1$$

$y(0) = 1 \Rightarrow c - 0 - 1 = 1 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow y = 2e^x - x - 1$

وظيفة

أوجد التقريب الرابع $\Big\{ y' = xy \qquad y(0) = 1$

وأوجد الحل الحقيقي

The End