كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : نظرية المعادلات

المحاضرة : الرابعة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

الجملة التفاضلية الخطية :

$$* \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x'(t_0) = x_0 \end{cases}$$

نعرض $I \subset \mathbb{R}$

$E = \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}(E)$ فضاء التطبيقات الخطية المستمرة

وليكن $\| \ \|$ نظيم في E و $|||\ |||$ نظيم في $\mathcal{L}(E)$

$$|||L||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|L(x)\|$$

(1)

$$x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t)$$

$$x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)$$

ولذلك نكتب جملة المعادلات التفاضلية بالصيغة الشعاعية :

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \quad (1)$$

$A : I \to \mathcal{L}(E)$

$b : I \to E$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad A_t = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

نسمي (1) جملة تفاضلية خطية غير متجانسة إذا كان $b(t) = 0$

$x'(t) = A(t)x(t)$ وهي جملة خطية متجانسة

نظرية: يكون $x(t)$ حل للجملة (1) إذا وفقط إذا كتب على شكل مجموع $x_h(t)+x_p(t)$

/ أ / بيانياً تقبل نظرية الوجود والوحدانية بالنسبة للجمل غير الخطية بالصورة العامة
* والتي تبقى صحيحة عندما f تابع خطي

$$f(t,x)=A(t)x(t)+b(t)$$

* نظرية الوجود والوحدانية للجمل التفاضلية الخطية:

بفرض $A(t)$ و $B(t)$ مصفوفات تابعية معرفة ومستمرة على المجال $(t_1,t_2)=I$ عندئذ فإنه من أجل كل $t_0\in I$ و $x_0\in E$ فإنه يوجد حل وحيد ϕ_{t_0,x_0} يمر من (t_0,x_0) ومعرف على كامل المجال I

البرهان:

معرف بالتعريف $f(t,x)=A(t)x(t)+B(t)$

لأن A,B مستمرة من أجل كل $t\in I$ و $x_1,x_2\in E$

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|=\|A(t)x_1(t)-A(t)x_2(t)\|$$

$$=\|A(t)(x_1(t)-x_2(t))\|=\frac{\|A(t)(x_1(t)-x_2(t)\|}{\|x_1(t)-x_2(t)\|}\cdot\|x_1(t)-x_2(t)\|$$

$$\le \sup_{\substack{x_1,x_2\in E\\ x_1\neq x_2}}\left(\frac{\|A(t)(x_1(t)-x_2(t))\|}{\|x_1(t)-x_2(t)\|}\right)\|x_1(t)-x_2(t)\|\le \underbrace{|||A(t)|||}_{K(t)}\,\|x_1(t)-x_2(t)\|$$

$$\le L\|x_1(t)-x_2(t)\| \;;\; L=\max_{t_1\le t\le t_2}|||A(t)|||$$

تحققت شروط نظرية الوجود والوحدانية وبالتالي يوجد حل وحيد محلي في جوار t_0.

ملاحظة: صفة الخطية تسمح لنا بتمديد الحل على كامل المجال (t_1,t_2) لنحصل على حل شامل.

مبرهنة ضمن البرهان: نفرض أن $A(t)$, $B(t)$ مصفوفات تابعية معرفة ومستمرة على مجال مفتوح I عندئذ كل حل للمعادلة (1) معرف على مجال $J \subset I$ يمكن تمديده ليكون حلاً على كامل المجال I

البرهان: $I = (t_1, t_2)$ وليكن ϕ هو حل لـ (1) على مجال أعظمي $J \supseteq (\tau_1, \tau_2)$

$$\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^{t} (A(s)\phi(s) + B(s))\,ds \right\|$$

$$\leq \|\phi(t_0)\| + \max_{\tau_1 < t < \tau_2} |||A(t)||| \int_{t_0}^{t} \|\phi(s)\|\,ds + \max_{\tau_1 < t < \tau_2} \|B(t)\| \cdot (\tau_2 - \tau_1)$$

$$k = \|\phi(t_0)\| + \max_{\tau_1 < t < \tau_2} |||A(t)||| \int_{t_0}^{t} \|\phi(s)\|\,ds + \max_{\tau_1 < t < \tau_2} \|B(t)\| (\tau_2 - \tau_1)$$

$$L = \max_{\tau_1 < t < \tau_2} |||A(t)|||$$ حسب غرونوال

$$\|\phi(t)\| \leq k + L \int_{t_0}^{t} \|\phi(s)\|\,ds$$

بالتالي حسب نظرية غرونوال

$$\|\phi(t)\| \leq k e^{L|t-t_0|} \leq k e^{L(\tau_2 - \tau_1)}$$

بالتالي الحل يبقى محدود وبالتالي حسب نظرية الشمولية فإن الحل يمكن تمديده على كامل المجال I $\lim_{t \to \tau_2} \|\phi(t)\| < \infty$

الحالة الخطية المتجانسة:

$x'(t) = A(t) \cdot x(t)$ حيث $A(t)$ مصفوفة مربعة عناصرها توابع معرفة ومستمرة على I.

* نظرية :

لتكن S^0 مجموعة جميع حلول المعادلة الخطية المتجانسة ~~xxxx~~ والمعرفة على المجال $I \subset \mathbb{R}$ ولتكن Φ_1 , Φ_2 من S_0

$\lambda_1 , \lambda_2 \in \mathbb{R}$ عندئذ فإن $\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 \in S^0$

$\Phi_1'(t) = A(t)\Phi_1(t) \Rightarrow$ نضرب بـ λ_1

$\Phi_2'(t) = A(t)\Phi_2(t) \Rightarrow$ نضرب بـ λ_2

$$\lambda_1 \Phi_1'(t) + \lambda_2 \Phi_2'(t) = A(t)\left(\lambda_1 \Phi_1(t) + \lambda_2 \Phi_2(t)\right)$$

$$\left(\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2(t)\right)' = A(t)\left(\lambda_1 \Phi_1(t) + \lambda_2 \Phi_2(t)\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \Phi_1(t) + \lambda_2 \Phi_2(t) \in S^0$$

نتيجة : أي تركيب خطي كلين هو حل للجملة المتجانسة

ملاحظة : إذا كانت $A(t)$ معرفة ومستمرة على I عندئذٍ فإن S^0 فضاء شعاعي معرف فوق $\mathbb{R}$ و بعد n (n حل مستقل خطياً)

البرهان :

لتكن $t_0 \in I$ و $e_1 , \ldots , e_n$ القاعدة القانونية لـ $\mathbb{R}^n$ و ليكن Φ_i حل المعادلة (2) الذي يحقق الشرط $\Phi_i(t_0) = e_i$

$$c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + \cdots + c_n \Phi_n$$

الحل المار من (t_0 , e_i)

هو أيضاً حل لـ (2) , ليكن $\Phi(t) \in \mathbb{R}^n$ حل كيفي لـ (2)

$$\Phi(t) = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n$$

$\{e_i\}$ قاعدة قانونية لـ $\mathbb{R}^n$ بالتالي

عند اللحظة $t = t_0$ $\quad \Phi(t) = c_1 e_1 + \cdots c_n e_n$

$\Phi(t_0) = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n$

$= c_1 \Phi_1(t_0) + c_2 \Phi_2(t_0) + \cdots + c_n \Phi_n(t_0)$

$\Phi(t) = c_1 \Phi_1(t) + c_2 \Phi_2(t) + \cdots + c_n \Phi_n(t)$, $\Phi(t)$

$c_1 \Phi_1(t) + c_2 \Phi_2(t) + \cdots + c_n \Phi_n(t)$ حلان عرّفت من نقطة واحدة

t_0 بالتالي حسب نظرية الوجود والوحدانية فإن الحلان منطبقان

$\Phi(t) = c_1 \Phi_1(t) + \cdots + c_n \Phi_n(t)$ على كامل I.

$\{\Phi_1(t), \ldots, \Phi_n(t)\}$ مجموعة مولدة لمجموعة الحلول S

نبرهن: $c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + \cdots c_n \Phi_n = 0$ فإن $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

من أجل $t = t_0$

$c_1 \Phi_1(t_0) + \cdots + c_n \Phi_n(t_0) = 0$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

لأن e_i هي القاعدة القانونية لـ $\mathbb{R}^n$

نتيجة:

معرفة n حل مستقل خطياً لـ (2) على المجال I يسمح بحل أي مسألة قيم ابتدائية متعلقة بـ (2).

تعريف: نقول عن مجموعة مؤلفة من n حل للمعادلة المتجانسة مستقلة خطياً $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ مجموعة حلول أساسية على I.

مصفوفة الحلول والمصفوفة الأساسية:

نقول عن مصفوفة توابع $\Phi(t)$ بـ t والمعرفة على مجال I أنها مصفوفة حلول للجملة المتجانسة (2) إذا كان كل عمود من أعمدتها هو حل للمعادلة $n \times n$

(2) $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ ... (3)

وتسمى مصفوفة الحلول $\Phi(t)$ مصفوفة أساسية إذا كانت أعمدتها تشكل من مجموعة حلول أساسية لـ (2).

ونقول عن مصفوفة أساسية أنها مصفوفة أساسية رئيسية إذا كانت
$\Phi(t_0) = I$ مصفوفة الواحدة

نتيجة: إذا كانت $\Phi(t)$ مصفوفة أساسية والتي أعمدتها مجموعة الحلول الأساسية $\Phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$

فإنه من أجل كل حل φ لـ (2) يوجد $C = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$

بحيث يكون $\varphi(t) = c_1\phi_1(t) + \dots + c_n\phi_n(t)$

$$= \Phi(t) C^T \quad ; \quad C^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

وبالتالي كل مسألة القيم الابتدائية $x'(t) = A(t)x(t)$

$x(t_0) = x_0$

$$\varphi(t) = \Phi(t) C^T$$

$$x_0 = \varphi(t_0) = \Phi(t_0) C^T \Rightarrow C^T = \Phi^{-1}(t_0) x_0$$

Φ المصفوفة الأساسية

$\varphi(t)$ حل لمسألة القيم الابتدائية لـ (3)

$$\varphi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) x_0$$

مبرهنة: إذا كان معين رونسكي لمجموعة الأشعة $\phi_1, \dots, \phi_n$ يختلف عن الصفر من أجل نقطة واحدة على الأقل t_0 من المجال I عندئذ فإن هذه الثوابت تكون مستقلة

صيغة آبل: نظرية: لتكن $A(t)$ مصفوفة تابعية مربعة $n \times n$ مستمرة على I ولتكن $\Phi(t)$ مصفوفة مربعة $n \times n$ بحيث يكون $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ عندئذ $(\det\Phi(t))' = (\operatorname{tr} A(t)) \det\Phi$

$$\operatorname{tr} A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t)$$

$$\det\Phi(t) = \det\Phi(\tau) \exp\int_{\tau}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds$$

نظرية: إذا كان Φ_1 و Φ_2 حلان مستقلان خطياً للمعادلة المتجانسة يكون $\det\{\Phi_1^{(t)}, \Phi_2^{(t)}\} \neq 0$

من أجل كل $t \in I$

نظرية:

الشرط اللازم والكافي لكي تكون مصفوفة الحلول التي تحقق (3) هي المصفوفة الأساسية هو أن يكون محدد هذه المصفوفة لا يساوي الصفر ولو من نقطة

أي يوجد نقطة $t_0 \in I \Leftarrow$. $\det\{\phi(t_0)\} \neq 0$

$\Leftarrow \Phi(t)$ مصفوفة أساسية لـ (2).

The End