كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : نظرية المعادلات

المحاضرة : الثالثة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

تكملة المبرهنة السابقة:

$\phi(\tau)$

$\|\phi(\tau) - x_0\| = b$

$\forall \; t_0 \le t \le \tau$

$\|\phi(t) - x_0\| \le \int_{t_0}^{t} \|f(s,\phi(s)) - f(s,x_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s,x_0)\| ds$

$\le L\int_{t_0}^{t} (\|\phi(s) - x_0\| + M) ds \le (Lb+M)\int_{t_0}^{t} ds$

عندما $t = \tau$

$b = \|\phi(\tau) - x_0\| \le (Lb+M)(\tau - t_0) = (Lb+M)\mu$

$\tau = t_0 + \mu$

من أجل قيمة بحيث $\tau \ge 0$

δ أكبر قبل لوجود الحل $(**)$ $\mu \ge \dfrac{b}{Lb+M} \ge \delta$

حسب $(**)$

$\phi(t)$ يبقى محصوراً داخل S ~~...~~ بأي حل لمسألة القيم الابتدائية وحيد X

ملاحظة: إذا كانت $\frac{\partial f}{\partial x}$ مستمر على المنطقة المحددة R بالتالي $\frac{\partial f}{\partial x}$ محدود على هذه المنطقة.

$L = \sup\limits_{(t,x)\in R} \left\| \dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x} \right\|$

$f \Leftarrow$ يحقق شرط ليبشتز على هذه المنطقة، نبرهن من أجل $n=1$

لدينا حسب نظرية القيمة الوسطى من أجل $(t,x_1),(t,x_2)\in R$

فإنه يوجد (t,x^*) بحيث $x^* \in (t,x_1),(t,x_2)$ تحقق:

$$f(t,x_2)-f(t,x_1)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x^*)(x_2-x_1)$$

ولكن $(t,x^*)\in R$

$$\Leftarrow \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x^*)\right\|\leq L$$

$$\Leftarrow \|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leq L\|x_2-x_1\|$$

نتيجة: يمكن استبدال نظرية ليبشتز بنظرية الوجود والوحدانية بشرط أعم وهو كون $\frac{\partial f}{\partial x}$ مستمر في منطقة محدودة.

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ مستمرة

نص النظرية بالشكل:

لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية: $x'=f(x)$ ؛ $x(t_0)=x_0$

حيث f تابع معرف ومستمر على منطقة $R\subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$

$$R=\{(t,x_0),\ |t-t_0|\leq a\ ;\ \|x-x_0\|\leq b$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ مستمر عندئذٍ يوجد $\delta>0$ بحيث

$$0<\delta\leq\alpha=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$$

بحيث يكون لمسألة القيم حل وحيد على المجال $|t-t_0|\leq\delta$

أو $[t_0-\delta,\ t_0+\delta]$

ملاحظة:

حلين أو مسارين منطلقين من مسارين مختلفين لا يجوز أن يتقاطعا أو يتماسا.

ملاحظة:

اشترطنا في نظرية الوجود والوحدانية أن يحقق f ~~[illegible]~~ شرط ليبشتز

أو أن يكون $\frac{\partial f}{\partial x}$ مستمر وذلك كي نضمن وحدانية الحل لمسألة القيم الابتدائية ولكن هذا الشرط لا يتحقق دوماً لذلك نذكر نظرية (بيانو) التي تضمن وجود الحل دون وحدانية.

مبرهنة (بيانو):

إذا كان f تابع مستمر على منطقة R حيث $R=[t+x_0, t+y_0)$

فإن مسألة القيم الابتدائية

$x'=f(x)$ & ~~f(x)~~ $x(t_0)=x_0$

لها حل على الأقل في الفترة $|t-t_0|\le h$

$$h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$$

$$M=\max_{(t,x)\in R}\|f(t,x)\|$$

تمديد الحل والحل الأعظمي:

لتكن $f(t,x)$ دالة تحقق نظرية الوجود على المنطقة $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \supseteq R$

حسب النظرية فإنه يوجد حل

$R\ni(t_0,x_0)$ يوجد حل $\phi(t)$ ~~[illegible]~~ لندرس إمكانية توسيع هذه

الجوار إلى أكبر مجال مفتوح ممكن (إلى أقرب قيمة ممكنة لـ h)

*** تعريف:**

ليكن $\varphi(t)$ حل معرف على المجال I

$\phi(t)$ حل معروف على المجال J الذي يحوي I $\quad I\subset J$

يسمى $\phi(t)$ تمديد للحل $\varphi(t)$ إذا تحقق $\phi(t)=\varphi(t)$

$\forall t\in I$

تعريف: نقول عن حل أنه غير قابل للتمديد أي (حل أعظمي)

إذا انطبق أي تمديد له عليه أي $\mathbb{R}\supset I_1$ حيث $I_1\subset I_2$ ، $\mathbb{R}_2\supset I_2$

نقول أن (ϕ, I_1) أنه أعظمي في ΔI_2 إذا لم يقبل أي تمديد (ϕ^*, I^*) بحيث $I_1 \subset I^* \subset I_2$

*نظرية:

من أجل كل (t_0, x_0) من R يوجد حل أعظمي وحيد لمسألة كوشي

*تعريف:

نقول عن الحل (ϕ, I_1) أنه حل مشارك على I_2 حيث $I_1 \subset I_2$ إذا كان ϕ يقبل التمديد ϕ^* على كامل المجال I_2.

مثال:

أوجد الحل $x' = -2t\,x^2$

بتكامل $x = \dfrac{1}{t^2 - c}$

$c \in R$ ثابتة حقيقي

* $c > 0$ $]-\infty, -\sqrt{c}[\,\cup\,]-\sqrt{c}, +\sqrt{c}[\,\cup\,]\sqrt{c}, +\infty[$

الحل أعظمي لا شامل.

* $c < 0$ الحل معرف على كامل IR بالتالي الحل شاملة.

* $c = 0$ تكون ~~[illegible]~~ أعظمي على IR^* ~~وليس~~ وليس شامل

*نظرية بدون برهان:

نظرية الشمولية:

نفرض أن $f(t,x)$ معرف ومستمر $t_1 < t < t_2$

و $X \in IR^n$ ونفرض أنه يوجد تابع $\phi(t)$ يحقق:

a) ϕ و ϕ' توابع مستمرة على المجال I محتوى في $t_1 < t < t_2$

b) $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ في I عندها

إما: $\phi(t)$ يمكن تمديده على كامل المجال ~~[illegible]~~ $t_1 < t < t_2$ لكل معادلة $x' = f(t,x)$

أو $\lim_{t \to T} \phi(t) = \infty$ من أجل قيمة معينة في T في المجال $t_1 < t < t_2$

ملاحظة: لبرهان أن الحل شامل $t_1 < t < t_2$ بأن الحل الأعظمي إذا أمكننا من برهان أن: $\|\phi(t)\| \leq 1$ على $[T_1, T_2]$

$$\lim_{t \to T_2} \|\phi(t)\| \leq c$$

التعلق المستمر للحل بالقيم الابتدائية:

نفرض f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ توابع مستمرة على منطقة محدودة R

وليكن ϕ_{t_0, x_0} هو حل لمسألة كوشي بمعرفة $t_0\, x_0$ وليكن $\psi_{t_0^*, x_0^*}$

ولنفرض أن ψ و ϕ توابع موجودة على مجال

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0,\ |t - t^*| < \delta,\ \|x_0 - x_0^*\| < \delta$$

$$\Rightarrow \|\phi(t) - \psi(t^*)\| < \varepsilon \qquad \forall t, t^* \in I = ([T_1, T_2]) \in \mathbb{R}$$

البرهان:

سنعتمد في هذا البرهان على مبرهنة غرونوال، إذا كان $g(t)$ تابع مستمر على $t_1 \leq t \leq t_2$

من أجل $t_1 \leq t \leq t_2$ $g(t)$ يحقق

$$0 \leq g(t) \leq K + L \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

$$0 \leq g(t) \leq K e^{L(t - t_0)}$$ من أجل $t_0 \leq t \leq t$ $\quad t_0 \leq t \leq t_1$

نأخذ ϕ_{t_0, x_0} حلاً في (t_0, x_0)

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds$$

$\psi_{t_0^*, x_0^*}$ حل مار من (t_0^*, x_0^*)

$$\psi(t) = x_0^* + \int_{t_0^*}^{t^*} f(s, \psi(s))\, ds$$

$$\int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds = \int_{t_0}^{t_0^*} f(s,\phi(s))\,ds + \int_{t_0^*}^{t} f(s,\phi(s))\,ds$$

$$\phi(t) - \psi(t^*) = \phi(t) - \psi(t) + \psi(t) - \psi(t^*)$$

$$\phi(t) - \psi(t) = x_0 - x_0^* + \int_{t_0}^{t_0^*} f(s,\phi(s))\,ds + \int_{t_0^*}^{t} f(s,\phi(s))\,ds - \int_{t_0^*}^{t} f(s,\psi(s))\,ds$$

$$\|\phi(t) - \psi(t)\| \le \|x_0 - x_0^*\| + \int_{t_0}^{t_0^*} \|f(s,\phi(s))\|\,ds + \int_{t_0^*}^{t_0} \|f(s,\phi(s)) - f(s,\psi(s))\|\,ds$$

$$\le \|x_0 - x_0^*\| + M|t_0^* - t_0| + L\int_{t_0^*}^{t} \|\phi(s) - \psi(s)\|\,ds$$

$$\le (1+M)\delta + L\int_{t_0}^{t} \|\phi(s) - \psi(s)\|\,ds$$

تباين حسب مبرهنة غرونوال

$$0 \le g(t) = \|\phi(t) - \psi(t)\|$$

$$\|\phi(t) - \psi(t)\| \le (L+M)\delta e^{L|t-t_0|} \le \delta(L+M)e^{L(T_2-T_1)} \quad (1)$$

$$\|\psi(t) - \psi(t^*)\| = \left\|\int_{t_0^*}^{t} f(s,\psi(s))\,ds - \int_{t_0^*}^{t^*} f(s,\psi(s))\,ds\right\|$$

$$\left\|\int_{t^*}^{t} f(s,\psi(s))\,ds\right\| \le \int_{t^*}^{t} \|f(s,\psi(s))\|\,ds \le M|t - t^*| \le M\delta \quad (2)$$

من المتراجحتين (1) و (2) :

$$\|\phi(t) - \psi(t)\| \le \|\phi(t) - \psi(t)\| + \|\psi(t) - \psi(t^*)\|$$

$$\le \delta\left((1+M)e^{L(T_2-T_1)} + M\right)$$

$$\delta > \frac{\varepsilon}{(1+M)e^{2(T_2-T_1)} + M}$$

تعريف: نقول عن مسألة القيم الابتدائية أنها معرفة جيداً إذا كان الحل موجود ووحيد ~~وقطع~~ متعلق بشكل مستمر بالقيم الابتدائية.

- the End -