كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا عامة2

المحاضرة : الثالثة /عملي/

تمارين (3)

1. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية و لنعرف عليها تبولوجيا المتممات المنتهية τ_{cof}، لنأخذ المجموعات الآتية:

$A = \{0,3,7\}$ ، $B =]-9,14[$، $X =]-15,14[$ ، $Y = [-30,24]$ و المطلوب:

حدد نوع كل من المجموعتين $A\&B$ في كلا الفضاءين (X, τ_X) و (Y, τ_Y).

الحل:

في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ لدينا: $\tau_{cof} = \{T \in P(\mathbb{R}): \mathbb{R}\backslash T \text{ مجموعة منتهية}\} \cup \{\emptyset\}$ ، أسرة المجموعات المغلقة في هذا الفضاء هي: $\mathcal{F} = \{F \in P(\mathbb{R}): F \text{ مجموعة منتهية}\} \cup \{\mathbb{R}\}$

لنحدد نوع كل من المجموعتين $A\&B$ في الفضاء (X, τ_X):

لنوجد τ_X:

$$\tau_X = \{T^*: T^* = T \cap X; T \in \tau_{cof}\}$$

أياً كانت $T \in \tau_{cof}$ إما $T = \emptyset$ و $\emptyset \cap X = \emptyset \in \tau_X$ أو $T \neq \emptyset$ و عندئذٍ إن $\mathbb{R}\backslash T$ مجموعة منتهية و لدينا: $X\backslash T^* = X\backslash(T \cap X) = X \cap (\mathbb{R}\backslash T)$ و كون $\mathbb{R}\backslash T$ مجموعة منتهية فإن $X \cap (\mathbb{R}\backslash T)$ منتهية أي $X\backslash T^*$ مجموعة منتهية ومنه:

$$\tau_X = \{T \in P(X): X\backslash T \text{ مجموعة منتهية}\} \cup \{\emptyset\}$$

المجموعة A:

نعلم أن $\bar{A}_X = \bar{A} \cap X$ فإن $\bar{A}_X = A \cap X = \{0,3,7\} \cap]-15,14[= A$ بالتالي A مجموعة مغلقة في (X, τ_X) .

$X\backslash A =]-15,0[\cup]0,3[\cup]3,7[\cup]7,14[$ مجموعة غير منتهية بالتالي $A \notin \tau_X$ فهي ليست مفتوحة في (X, τ_X).

المجموعة B:

نعلم أن $\bar{B}_X = \bar{B} \cap X$ فإن $\bar{B}_X = \mathbb{R} \cap X = \mathbb{R} \cap]-15,14[=]-15,14[\neq B$

بما أن $\bar{B}_X \neq B$ فإن B ليست مجموعة مغلقة في (X, τ_X) .

$X \backslash B =]-15, -9[$ مجموعة غير منتهية بالتالي $B \notin \tau_X$ فهي ليست مفتوحة في (X, τ_X).

لنحدد نوع كل من المجموعتين $A \& B$ في الفضاء (Y, τ_Y):

بطريقة مماثلة نجد أن $\tau_Y = \left\{T \in P(Y): Y \backslash T \text{ مجموعة منتهية}\right\} \cup \{\emptyset\}$

المجموعة A:

$\bar{A}_Y = \bar{A} \cap X = A \cap Y = A$ بالتالي A مجموعة مغلقة في (Y, τ_Y) .

$Y \backslash A = [-30,0[\cup]0,3[\cup]3,7[\cup]7,24]$ مجموعة غير منتهية بالتالي $A \notin \tau_Y$ فهي ليست مفتوحة في (Y, τ_Y).

المجموعة B:

نعلم أن $\bar{B}_Y = \bar{B} \cap X$ فإن $\bar{B}_Y = \mathbb{R} \cap Y = \mathbb{R} \cap \mathrm{Y} = \mathrm{Y} \neq B$ بما أن $\bar{B}_Y \neq B$ فإن B ليست مجموعة مغلقة في (Y, τ_Y) .

$Y \backslash B = \cup [-30, -9] \cup [14,24]$ مجموعة غير منتهية بالتالي $B \notin \tau_Y$ فهي ليست مفتوحة في (Y, τ_Y).

2. إذا كان (Y, τ_Y) فضاءً جزئياً من الفضاء التبولوجي (X, τ) فتحقق أن:

a. إذا كان $\tau = P(X)$ فإن $\tau_Y = P(Y)$.

الاحتواء $\tau_Y \subseteq P(Y)$ محقق دوماً، لنبرهن الاحتواء المعاكس:

أياً كانت $A \in P(Y)$ فإن $A \subseteq Y \subseteq X$ و بالتالي $A \in P(X)$ و بالتالي $A \in \tau$ و بالتالي $A \cap Y \in \tau_Y$ و لكن $A \cap Y = A$ و منه $A \in \tau_Y$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة A من $P(Y)$ نجد أن $P(Y) \subseteq \tau_Y$ و بالتالي $\tau_Y = P(Y)$.

b. إذا كان $\tau = \{X, \emptyset\}$ فإن $\tau_Y = \{Y, \emptyset\}$.

لدينا $\emptyset \cap Y = \emptyset \in \tau_Y$ و $X \cap Y = Y \in \tau_Y$ لأن $Y \subseteq X$ و بالتالي فإن $\tau_Y = \{Y, \emptyset\}$.

3. إذا كان (X, τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً، و $A, B \subseteq X$، تحقق من صحة القضايا الآتية:

1. إذا كان $A' = \emptyset$ (في الفضاء (X, τ)) فإن $\tau_A = P(A)$.

لنبرهن أنه أياً كانت $M \subseteq A$ فإن M مجموعة مغلقة في (A, τ_A) :

نعلم أنه إذا كانت $M \subseteq A$ فإن $\acute{M} \subseteq \acute{A}$ و بالتالي حسب الفرض $\acute{M} \subseteq \emptyset$ و منه إن $\acute{M} = \emptyset$ و بما أن $\overline{M} = M \cup \acute{M}$ فإن $\overline{M} = M \cup \emptyset = M$ و هذا يكافئ القول إن M مجموعة مغلقة في الفضاء (X,τ)، لكن $A \cap M = M$ (لأن $M \subseteq A$) بالتالي إن B مجموعة مغلقة في (A,τ_A) (لأنها كتبت بالشكل $A \cap F = M$ حيث $F = M$ مجموعة مغلقة في الفضاء (X,τ) و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة $M \subseteq A$ نجد أن $\tau_A = P(A)$.

2. إذا كان $\bar{A} \cap B = \emptyset$ فإن A مجموعة مغلقة في الفضاء $(A \cup B, \tau_{A\cup B})$.

بما أن $\bar{A}$ مجموعة مغلقة في الفضاء (X,τ) فإن $(A \cup B) \cap \bar{A}$ مجموعة مغلقة في الفضاء $(A \cup B, \tau_{A\cup B})$ و لكن: $(A \cup B) \cap \bar{A} = (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup \emptyset = A$

و هذ يعني أن A مجموعة مغلقة في الفضاء $(A \cup B, \tau_{A\cup B})$.

4. لتكن $X = \{1,2,3,\dots\dots,10\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau = \mathrm{P}(X)$، تحقق أن الأسرة $\beta = \{\{1\},\{2\},\dots\dots,\{10\}\}$ تشكل قاعدة للتبولوجيا τ، ثم هات أمثلة لثلاث قواعد أخرى للتبولوجيا τ .

الحل:

كل عنصر من الأسرة β هو مجموعة جزئية من X، أي أن:

$$\forall \mathrm{B} \in \beta : B \in P(X) \implies \beta \subseteq \tau$$

و بملاحظة أن الأسرة β هي أسرة كل المجموعات وحيدة العنصر في X نجد أن:

$\emptyset = \cup_{i\in\emptyset} B_i, B_i \in \beta$ و $\forall\ \mathrm{T} \in \tau \backslash \{\emptyset\} : \mathrm{T} = \cup_{x\in T}\{x\}$ و بما أن كل مجموعة وحيدة العنصر هي عنصر من الأسرة β، فإن كل مجموعة مفتوحة تكتب على شكل اجتماع لعناصر من الأسرة β و بالتالي الأسرة β تشكل قاعدة للتبولوجيا τ.

5. ليكن (X,τ_d) فضاءً تبولوجياً مترياً كيفياً، و لنأخذ فيهالأسرة:

$\beta = \left\{ B; (X,\tau_d) \text{ كرة مفتوحة في } B \right\}$ تحقق فيما إذا كانت الأسرة β تشكل قاعدة للتبولوجيا τ_d أم لا.

الحل:

أياً كانت $B \in \beta$ كرة مفتوحة في (X,τ_d) عندئذٍ إن B مجموعة مفتوحة في (X,τ_d) لأن

كل كرة مفتوحة في أي فضاء متري هي مجموعة مفتوحة فيه، بالتالي $B \in \tau_d$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للكرة المفتوحة $B \in \beta$ نجد أن $\beta \subseteq \tau_d$.

من أجل أي مجموعة مفتوحة T من τ_d فإن T مجموعة مفتوحة في (X, d) بالتالي T تكتب على شكل اجتماع لكرات مفتوحة في الفضاء المتري (X, d) أي تكتب على شكل اجتماع لعناصر من الأسرة β ، مما سبق نجد أن β تشكل قاعدة للتبولوجيا τ_d.