كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تبولوجيا2

المحاضرة : الرابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تتمة في الأساس و تحت الأساس في الفضاءات التبولوجية

تعريف:

إذا كانت X مجموعة ما و كانت $S \subseteq P(X)$ أسرة ما، نرمز بالرمز $\varphi(S)$ لأسرة جميع التقاطعات المنتهية لعناصر S أي أن: $\varphi(S) = \{\bigcap_{i=1}^{n} s_i \; ; s_i \in S\}$.

تعريف:

إذا كان (X, τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً و كانت $S \subseteq P(X)$ أسرة كيفية، يقال إن الأسرة S تشكل (تحت أساس) قاعدة جزئية للتبولوجيا τ إذا وفقط إذا كانت الأسرة $\beta = \varphi(S)$ (أسرة جميع التقاطعات المنتهية لعناصر الأسرة S) تشكل قاعدة للتبولوجيا τ.

ملاحظات:

1. إذا كانت S قاعدة جزئية للتبولوجيا τ فإن $S \subseteq \tau$ و ذلك لأنه عندما تكون S قاعدة جزئية للتبولوجيا τ فإن $\varphi(S)$ تشكل قاعدة للتبولوجيا τ أي أن $\varphi(S) \subseteq \tau$ لكن $S \subseteq \varphi(S)$ لذلك فإن $S \subseteq \tau$.
2. إذا β قاعدة كيفية للتبولوجيا τ فإنها تكون قاعدة جزئية للتبولوجيا τ أيضاً لأنه عندما تكون β قاعدة للتبولوجيا τ فإن $\beta \subseteq \tau$ و بما أن $\beta \subseteq \varphi(\beta)$ و كون أي تقاطع منته لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة فإن $\varphi(\beta) \subseteq \tau$ أي أن $\beta \subseteq \varphi(\beta) \subseteq \tau$ و بذلك تكون $\varphi(\beta)$ قاعدة للتبولوجيا τ أيضاً و منه إن β قاعدة جزئية للتبولوجيا τ، نستنتج أن:

كل قاعدة للتبولوجيا هي قاعدة جزئية لها و العكس ليس بالضرورة صحيح كما يوضح المثال الآتي: لتكن $X = \{a, b, c\}$ مع التبولوجيا $\tau = P(X)$ و لنأخذ :

$S = \{\{a, b\}, \{b, c\}. \{a, c\}\}$ عندئذٍ:

$$\varphi(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}$$

نلاحظ أن $\varphi(S)$ تشكل قاعدة للتبولوجيا τ لذلك فإن S قاعدة جزئية لها لكن S ليست قاعدة للتبولوجيا τ لأن المجموعة $\{a\} \in \tau$ لا تكتب كاجتماع لعناصر من الأسرة S.

مما سبق نجد بوضوح أن كل تبولوجيا هي قاعدة لنفسها و كل قاعدة هي قاعدة جزئية بالتالي فإن كل تبولوجيا هي قاعدة جزئية لنفسها.

تمرين: لتكن $X = \{1,2,3,4,5\}$ و لنأخذ الأسرة $S = \{\{1,2,3\}, \{4,5\}\}$ تحقق من كون الأسرة S تشكل قاعدة، قاعدة جزئية لتبولوجيا ما معرفة على X.

الحل: لدينا $\{1,2,3\} \cup \{4,5\} = X$

$\{1,2,3\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2,3\} = \cup_{\{1,2,3\} \in S} \{1,2,3\}$

$\{4,5\} \cap \{4,5\} = \{4,5\} = \cup_{\{4,5\} \in S} \{4,5\}$

$\{1,2,3\} \cap \{4,5\} = \emptyset = \cup_{i \in \emptyset} s_i, s_i \in S$

مما سبق نجد أن الأسرة S تشكل قاعدة لتبولوجيا ما معرفة على X، و بما أن كل قاعدة لتبولوجيا هي قاعدة جزئية فإن الأسرة S تشكل قاعدة جزئية لتبولوجيا ما معرفة على X أيضاً.

تعريف:

إذا كانت $X \neq \emptyset$ و $S \subseteq P(X)$ أسرة ما، تسمى أضعف تبولوجيا معرفة على X و تحوي الأسرة S بالتبولوجيا المولدة بالأسرة S و يرمز لها $\tau(S)$.

مبرهنة:

إذا كانت $X \neq \emptyset$ و $S \subseteq P(X)$ أسرة جزئية ما، فإن الأسرة S تشكل قاعدة جزئية للتبولوجيا المولدة بها $\tau(S)$.

إثبات:

لنضع $\beta = \varphi(S)$ أسرة جميع التقاطعات المنتهية لعناصر الأسرة S و لنعرف على X الأسرة τ بالشكل الآتي: $\tau = \{T \in P(X); T = \text{اجتماع لعناصر من } \beta\}$ و لنبين أولاً أنها تعرف تبولوجيا على X.

1. نلاحظ أن $S \subseteq \varphi(S) = \beta$ و من تعريف الأسرة τ نستنتج أن $\varphi(S) = \beta \subseteq \tau$ لذلك فإن $S \subseteq \tau$ ، و بما أن $X = \cap_{i \in \emptyset} s_i, s_i \in S$ فإن $X \in \varphi(S) = \beta$ و بالتالي $X \in \tau$ و كذلك إن $\emptyset = \cup_{i \in \emptyset} s_i ; s_i \in \beta$ لذلك فإن $\emptyset \in \tau$ و بهذا يتحقق الشرط الأول من تعريف التبولوجيا.

2. لتكن $\{T_i, i \in I\}$ أسرة جزئية كيفية من τ عندئذٍ بحسب تعريف الأسرة τ فإنه أياً كان $i \in I$ المجموعة T_i تساوي اجتماعاً لعناصر من الأسرة β و بالتالي تكون المجموعة $\cup_{i \in I} T_i$ عبارة عن اجتماع لعناصر من الأسرة β فهي تحقق تعريف الأسرة τ لذلك فإن $\cup_{i \in I} T_i \in \tau$ و الشرط الثاني من تعريف التبولوجيا محقق.

3. ليكن $T \& G$ عنصرين كيفيين من عناصر الأسرة τ عندئذٍ إن: $T = \cup_{i \in I} B_i ; B_i \in \beta$ و $G = \cup_{j \in J} B_j ; B_j \in \beta$ و بالتالي يكون لدينا:

$T \cap G = \left(\cup_i (B_i)\right) \cap \left(\cup_j (B_j)\right) = \cup_{i,j} (B_i \cap B_j)$ ، إن كل B_i و B_j عبارة عن تقاطع منتهٍ لعناصر من β من أجل كل i, j لذلك فإن $B_i \cap B_j$ هو تقاطع منتهٍ لعناصر من S أي أن $\forall i, j, B_i \cap B_j \in \beta$ و منه إن $T \cap G$ تساوي اجتماعاً لعناصر من الأسرة β و لذلك فإن $T \cap G \in \tau$ و الشرط الثالث من تعريف التبولوجيا محقق.

الأسرة τ تعرف تبولوجيا على X.

ثانياً: نلاحظ أن $\beta \subseteq \tau$ و أنه بحسب تعريف التبولوجيا τ فإن كل عنصر من τ هو اجتماع لعناصر من $\varphi(S) = \beta$ لذلك فإنه بحسب تعريف القاعدة للتبولوجيا تكون الأسرة $\varphi(S) = \beta$ قاعدة للتبولوجيا τ و بحسب تعريف القاعدة الجزئية فإن ال S تكون قاعدة جزئية للتبولوجيا τ.

ثالثاً: لنبين أن $\tau = \tau(S)$ بما أن $S \subseteq \tau$ و $\tau(S)$ هي أضعف تبولوجيا على X تحوي S فإن $\tau(S) \subseteq \tau$، من جهة ثانية إذا كان G عنصراً كيفياً من عناصر τ عندئذٍ بحسب تعريف الأسرة τ لدينا $G = \bigcup_i B_i, B_i \in \varphi(S)$ و بما أن عناصر S هي مجموعات مفتوحة في الفضاء $(X, \tau(S))$ و إن أي تقاطع منتهٍ لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة في أي فضاء تبولوجي لذلك فإن جميع عناصر $\beta = \varphi(S)$ هي مجموعات مفتوحة في $(X, \tau(S))$ أي ان الفضاء, أي أن $G \in \tau(S)$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة G من τ نجد أن $\tau \subseteq \tau(S)$ و بالتالي $\tau = \tau(S)$ و سبق أن بينا أن S قاعدة جزئية للتبولوجيا τ لذلك فإن S قاعدة جزئية للتبولوجيا $\tau(S)$.

تمرين: لتكن $X = \{1,2,3, \dots \dots \dots, 12\}$ و لنأخذ الأسرة $S = \{\{1,5\}, \{3,4,5\}\}$ أجد التبولوجيا $\tau(S)$ المولدة بالأسرة S.

الحل: نوجد أولاً $\varphi(S)$:

$$\varphi(S) = \{\{1,5\}, \{3,4,5\}, \{5\}, X\}$$

عندئذٍ نجد: $\tau(S) = \{\{1,5\}, \{3,4,5\}, \{5\}, X, \emptyset, \{1,3,4,5\}\}$

الاستمرار في الفضاءات التبولوجية

تعريف:

إذا كان (X, τ) , (Y, τ^*) فضاءين تبولوجيين كيفيين حيث $Y \neq \emptyset$, $X \neq \emptyset$ و كان $f: (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ تابعاً كيفياً، عندئذٍ:

يقال عن التابع f إنه مستمر عند النقطة $x \in X$ إذا و فقط إذا كانت الصورة العكسية وفق f لأي مجاورة للنقطة $f(x)$ في الفضاء (Y, τ^*) عبارة عن مجاورة للنقطة x في (X, τ).

و يقال عن التابع f إنه مستمر على X إذا و فقط إذا كان مستمراً عند كل $x \in X$.

مثال:

لتكن $X = \{a, b, c, d\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ و لتكن

$Y=\{1,2,3\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau^*=\{Y,\emptyset,\{1,3\},\{2\}\}$ و لنعرف التابع:

$f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ وفق: $f(a)=f(b)=1$ & $f(c)=f(d)=2$

ادرس استمرار التابع f على المجموعة X.

الحل: أسرة مجاورات النقطة $f(a)=f(b)=1$ في (Y,τ^*) هي $V(1)=\{Y,\{1,3\}\}$

و نلاحظ أن $f^{-1}(Y)=X$ و $f^{-1}(\{1,3\})=\{a,b\}$ و هما مجاورتان لكلتا النقطتين a, b فالتابع مستمر عند كل من a,b.

من جهة ثانية أسرة مجاورات النقطة $f(c)=f(d)=2$ هي

$V(2)=\{Y,\{2\},\{1,2\},\{2,3\}\}$ و لدينا: $f^{-1}(Y)=X$ و $f^{-1}(\{2\})=\{c,d\}$ و

$f^{-1}(\{1,2\})=X$ و $f^{-1}(\{2,3\})=\{c,d\}$ و كل مجموعة منها عبارة عن مجاورة لكل من النقطتين c,d فالتابع مستمر عندهما، و بهذا يكون f مستمراً على X.

ملاحظات:

1. التابع $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ مستمر عند النقطة $x\in X$ إذا و فقط إذا تحقق الشرط:
$f^{-1}(V)\in V_X(x),\forall V\in V_Y(f(x))$.
2. التابع $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ غير مستمر عند النقطة $x\in X$ إذا و فقط إذا تحقق الشرط:
$\exists V_0\in V_Y(f(x)):f^{-1}(V_0)\notin V_X(x)$
3. التابع $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ مستمر على X إذا و فقط إذا كان مستمراً عند كل $x\in X$.
4. التابع $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ غير مستمر على X إذا و فقط إذا تحقق الشرط:
$\exists x_0\in X;\ \exists V_0\in V_Y(f(x_0)):f^{-1}(V_0)\notin V_X(x_0)$ ، بكلامٍ آخر :
f غير مستمر على X إذا و فقط إذا وجدت نقطة واحدة على الأقل مثل x_0 بحيث إن f غير مستمر عند x_0.

5. يكون التابع $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ مستمراً عند النقطة $x\in X$ إذا و فقط إذا كان من أجل أي مجاورة V للنقطة $f(x)$ في (Y,τ^*) توجد مجاورة U للنقطة x في (X,τ) بحيث يكون $f(U)\subseteq V$.

إثبات:

$\Leftarrow$: لدينا بالفرض أن f تابع مستمر عند النقطة $x\in X$ و لتكن $V\in V_Y(f(x))$ مجاورة كيفية، عندئذٍ بحسب تعريف الاستمرار تكون $f^{-1}(V)$ مجاورة للنقطة x في (X,τ) ، ثم إن:
$f(f^{-1}(V))\subseteq V$ أي أننا وجدنا مجاورة للنقطة x في (X,τ) هي $U=f^{-1}(V)$ بحيث

يكون $f(U) \subseteq V$.

$\Longrightarrow$: لدينا بالفرض أنه من أجل أي مجاورة V للنقطة $f(x)$ في (Y, τ^*) توجد مجاورة U للنقطة x في (X, τ) بحيث يكون $f(U) \subseteq V$ لنبرهن أن f تابع مستمر عند النقطة $x \in X$:

لتكن V مجاورة كيفية للنقطة $f(x)$ في الفضاء (Y, τ^*) عندئذٍ بحسب الفرض توجد مجاورة U للنقطة x في (X, τ) بحيث يكون $f(U) \subseteq V$ ، بأخذ الصور العكسية وفق التابع f لطرفي العلاقة نجد أن: $f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$

لكن $U \subseteq f^{-1}(f(U))$ بالتالي $U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$ و منه $\mathrm{U} \subseteq f^{-1}(V)$

و بما أن U مجاورة للنقطة x في (X, τ) فإنه توجد مجموعة مفتوحة مثل G بحيث يكون:

$x \in G \subseteq U$ و هذا يعني أن $x \in G \subseteq U \subseteq f^{-1}(V)$

أي أن $f^{-1}(V)$ مجاورة للنقطة x في (X, τ) و هذا يكافئ القول عن f تابع مستمر عند النقطة x.

6. إذا كان (X, τ) فضاءً تبولوجياً قوياً، عندئذٍ أياً كان التابع f ينطلق من (X, τ) و يستقر في أي فضاء تبولوجي آخر فإنه يكون مستمراً أيا كانت قاعدة ربطه.

انتهت المحاضرة 4