كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثالثة

المادة : إحصاء رياضي

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

* المعاينة والتقديرات الإحصائية :

عرضنا في السابق في الفصل الأول أنواع المتغيرات الإحصائية وتوابع توزيعها وقوانين التوزيع الطبيعي والطبيعي المعياري وطرائق حساب الاحتمالات للمتغيرات الخاضعة لها.

أما الآن سوف نقوم بدراسة طرائق جمع البيانات والمعاينة الاحتمالية المتعلقة بظاهرة معينة وكذلك طرائق تقدير المتوسط والمجتمع وذلك باستخدام بيانات العينة.

نعني خلال عينة مأخوذة من مجتمع نقوم بدراسة المؤشرات أو التقديرات عن عالم المجتمع ويمكن أن تكون التقديرات نقطية أو مجالية، على سبيل المثال دراسة الظاهرة المطلوبة للحصول على المعلومات كتحليل التربة - تحليل المياه - واقعية الإنتاج - تقدير صلاحية منتج غذائي - الخ.

لذلك سنجد عينة تمثل هذا المجتمع ونقوم بالدراسة.

المعاينة والتقدير النقطي :

أولاً: المعاينة والمجتمع الإحصائي :

المقصود بالمعاينة هي طرائق الدراسة التي تتم على العينة المأخوذة في مجتمع ما وذلك حسب نوع العينة وطبيعة المجتمع المدروس وهدف الدراسة، وتصنف المعاينات على النحو التالي :

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

1. معاينة عشوائية بسيطة: أبسط أنواع المعاينات العشوائية وتعتمد على سحب عينة من عناصر المجتمع بشكل عشوائي ويكون عادة المجتمع متجانس وعناصره متجانسة.

2. معاينة عشوائية طبقية: يتم فيها تقسيم المجتمع الغير متجانس إلى مجموعات (طبقات) متجانسة في كل طبقة يتم سحب عينة وتتابع الدراسة على كل عينة على حدا.

3. المعاينة العشوائية العنقودية: يتم فيها تقسيم المجتمع الغير متجانس إلى طبقات متجانسة، بدلاً من أن نسحب من كل طبقة عينة منه نقوم باختيار مجموعة جزئية من الطبقات ونأخذ مجموع هذه العينات لتشكل عينة البحث.

4. المعاينة المنتظمة: فيها نرقم عناصر المجتمع ونقوم باختيار هذه العناصر بشكل منتظم وهذه المعاينة قليلة الاستخدام.

المجتمع الإحصائي:

هو جميع المفاهيم المستهدفة بالدراسة فإذا كان N هو جميع عناصر المجتمع ونفرض أن الظاهرة المدروسة يرمز لها بـ Y

عندئذٍ: $Y = y_1, y_2, \dots, y_N$

إن متوسط المجتمع يعطى بالشكل:

$$\bar{Y} = \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

أما تباين المجتمع:

$$V = \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \bar{Y})^2$$

أما النسبة الخامية : يرمز لها بالرمز R ويعطى بالشكل :

$$R = \frac{M}{N}$$

M : هي عدد العناصر التي تتصف بهذه الظاهرة.

* إنّ القيم السابقة (متوسط - تباين - نسبة) تسمى معالم المجتمع ونظراً لصعوبة تقدير معالم المجتمع بالكامل يأخذ عينة Sumple بشكل عشوائي من المجتمع وليكن عدد عناصرها n والخامية المدروسة هي X فتأخذ القيم : $X = x_1, x_2, \dots, x_n$

وتقوم بدراسة هذه المعالم (متوسط - تباين - نسبة) من خلال التقدير النقطي.

ثانياً : المقدر النقطي :

1- تقدير متوسط مجتمع : يسمى عملية تقدير متوسط العينة

$$\hat{y} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

وهو تقدير غير منحاز وفعال ومتماسك ويعتمد عليه في جميع البحوث والدراسات العلمية.

2- تقدير التباين

مثال (1) : لتقدير متوسط سن الزواج عند الشباب الريفي في إحدى القرى قمنا بسحب عينة عشوائية من الرجال المتزوجين مؤلفة من 10 رجال فوجدنا أعمارهم كانت عند الزواج كالآتي :

X : 20, 22, 28, 30, 26, 25, 40, 32, 33, 34

إنّ تقدير متوسط العينة :

$$\hat{y} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{290}{10} = 29 \text{ سنة}$$

TEL:0931497960 - مكتبة A to Z

2 تقدير التباين والانحراف المعياري:

يعرف تباين المجتمع بالشكل:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad ; n \leq 30$$

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n} \quad ; n > 30$$

3 تقدير الانحراف:

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad ; n \leq 30$$

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n}} \quad ; n > 30$$

بالعودة للمثال ① : أوجد تقدير تباين سن الزواج وتقدير انحرافه.

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{(20-29)^2 + \cdots\cdots + (64-29)^2}{9}$$

$$S^2 = 36.44$$

أما تقدير الانحراف:

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{36.44} = 6.03 \text{ سنة}$$

4 تقدير النسبة:

$$r = \frac{m}{n}$$

m : عدد المفردات التي تحمل الصفة.

5.1 تقدير الخطأ:

إن تقدير متوسط المجتمع بواسطة متوسط العينة $\bar{X}$ يختلف من عينة لأخرى ممن أجل عدة عينات يكون لدينا عدة تقديرات للمتوسط يسمّى تقدير متوسط الأوساط $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$ أو تقدير الخطأ المعياري.

$\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ تقدير التباين للاختلاف.

$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ تقدير الخطأ

أو بصورة:

$$E = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

تمرين ②: بفرض أن X تمثل علامات عشوائية لـ 40 طالب لمادة الصفوف الابتدائية فكانت بيانات بالجدول الآتي:

الوزن: X_i	30	32	35	40	42	46	48	50	54	60	70	Sum
عدد الطلاب: P_i	1	1	2	3	6	8	10	5	2	1	1	40

المطلوب:

1- أوجد تقدير المتوسط وتقدير التباين وتقدير الخطأ.

2- بفرض أن عدد المختبرين من هذه المجموعة 3 أوجد تقدير النسبة

3- أوجد تقدير الخطأ.

الحل:

$$\hat{\bar{Y}} = \bar{X} = \frac{\sum P_i x_i}{n} = \frac{1840}{40} = 46$$

تقدير التباين والانحراف:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum F_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1918}{40} = 47.9$$

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{47.9} = 6.92$$

تقدير الخطأ:

$$E = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{6.92}{\sqrt{40}} = 1.094$$

أو بطريقة أخرى: تسهيلاً للعمليات الحسابية ننقل المثال إلى الحالة المبوبة بإيجاد طول الفئة حسب طريقة سترجس

$$d = \text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{1+3.322 \log n} = \frac{70-30}{1+3.322 \times \log(40)} = 6.32 \approx 6$$

الفئات	F_i	x_i'	$F_i x_i'$	$F_i(x_i' - \bar{x})^2$
[30, 36[	4	33	132	676
[36, 42[	3	39	117	147
[42, 48[	14	45	630	14
[48, 54[	15	51	765	375
[54, 60[	2	57	114	242
[60, 66[	1	63	63	289
[66, 72[	1	69	69	529

$\Rightarrow \frac{\sum F_i(x_i - \bar{x})^2}{n} = 56.8$

بالنسبة تقدير الخطأ بالطريقة التالية:

$$E_p = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{rq}}{\sqrt{n}} , \sqrt{\frac{rq}{n}} \quad ; \quad q = 1 - r$$

$$E_p = \sqrt{\frac{(0.075)(0.925)}{40}} = 0.0416$$ (3)

تمرين ⑤: لتقدير نسبة المدخنين من الطلاب حسبنا عينة من الطلاب حجم 160 طالب فوجدنا أن 35 منهم مدخنين أوجد نسبة المدخنين ومقدار الخطأ في المجتمع.

الحل: نسبة المدخنين:

$$r = \frac{m}{n} = \frac{35}{160} = 0.2188 \ (21.88\%)$$

مقدار الخطأ:

$$E = \sigma_r = \sqrt{\frac{rq}{n}} = \sqrt{\frac{0.2188(1-0.2188)}{160}} = 0.0327$$

$$= 3.27\%$$

إذاً: نسبة المدخنين 21.88%

وبخطأ معياري قدره 3.27%

6. تقدير الفرق بين متوسطي مجتمعين:

نفرض أنه: $\hat{Y}_1 = \bar{X}_1$

$\hat{Y}_2 = \bar{X}_2$

إن متوسط الفرق بين المتوسطين:

$$\hat{Y}_1 - \hat{Y}_2 = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$$

والفرق يوجب وجود:

× تقدير فرق التباين:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}^2 = \sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2$$

× تقدير فرق الانحراف:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2}$$

TEL:0931497960 - A to Z مكتبة

* تقدير الخطأ المعياري:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

(7) تقدير الفرق بين نسبتين مأخوذتين:

$$P_1 - P_2 = p_1 - p_2$$

$$p_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad p_2 = \frac{m_2}{n_2}$$

* تقدير فرق التباين للنسبتين:

$$\sigma_{p_1 - p_2}^2 = \sigma_{p_1}^2 + \sigma_{p_2}^2$$

* تقدير الخطأ:

$$\sigma_{p_1 - p_2} = E = \sqrt{\sigma_{p_1}^2 + \sigma_{p_2}^2}$$

$$E_p = \sqrt{\frac{r_1 q_1}{n_1} + \frac{r_2 q_2}{n_2}}$$

تمرين (4): لإيجاد تقدير الفرق بين متوسطي الصروف الشهري لطلاب كلية العلوم في جامعتين مختلفتين حسبنا عينة من الجامعة الأولى حجم 30 طالب وكان متوسط الصروف الشهري لها $\bar{X}_1 = 8000$ ليرة والانحراف $S_1 = 360$ ليرة، ولمتوسط العينة الثانية $\bar{X}_2 = 10000$ والانحراف $S_2 = 150$ كان $n_2 = 20$ طالب

1- أوجد تقدير الخطأ بين متوسطي الصروف وتقدير الفرق.

2- أوجد تقدير الفرق بين نسبتين من عدد الطلاب يقرين أن $r_1 = 0.35$, $r_2 = 0.27$ وتقدير الخطأ.

TEL:0931497960 - A to Z مكتبة

الحل: ① تقدير الفرق:

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_1 = 10000 - 8000 = 2000$$

تقدير الخطأ:

$$\sigma_{\bar{X}_2 - \bar{X}_1} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(360)^2}{30} + \frac{(150)^2}{20}}$$

$$= 73.79 \text{ L.S}$$

② تقدير النسبة بين عدد الطلاب:

$$P_1 - P_2 = r_1 - r_2 = 0.35 - 0.27 = 0.08$$

أما تقدير الخطأ:

$$\sigma_{r_1 - r_2} = \sqrt{\frac{r_1 q_1}{n_1} + \frac{r_2 q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(0.35)(1-0.35)}{30} + \frac{(0.27)(1-0.27)}{20}}$$

$$= 0.13$$

التقدير الجالي وتقدير حجم العينة

أولاً: التقدير الجالي:

① تقدير جال الثقة لمتوسط مجتمع: عند إنشاء جال ثقة لمتوسط مجتمع يكفي أن نميز حالتين:

a- التباين معلوم (σ^2):

عندما نقوم بتقدير متوسط مجتمع من خلال متوسط العينة فإننا قد نرتكب خطأ نرمز له E وفي هذه الحالة نعلم أن متوسط المجتمع يقع ضمن جال الثقة:

$$\bar{X} - E < \bar{y} < \bar{X} + E$$

إذا كان احتمال الوقوع بالخطأ α فإن مقدار الخطأ المرتكب:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: هي القيمة الحرجة المقابلة لمساحة $\frac{\alpha}{2}$ في يسار التوزيع الطبيعي المعياري، وفي هذه الحالة نكتب بحال الثقة لمتوسط مجتمع على الشكل التالي:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{Y} < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (*)$$

(حجم العينة) $n > 30$:

(b) تباين العينة مجهول:

في هذه الحالة نستخدم تباين العينة S^2 كتقدير لتباين المجتمع ويكون مقدار الخطأ المرتكب لتقدير متوسط مجتمع:

$$E = T_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{S}{\sqrt{n}}$$

يكون بحال الثقة:

$$\bar{X} - T_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + T_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (**)$$

(2) تقدير بحال الثقة لنسبة مجتمع:

إذا كان احتمال الوقوع في الخطأ α فإن مقدار الخطأ المرتكب من تقدير النسبة:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}} \quad ; \quad \sigma = \sqrt{pq}$$

TEL:0931497960 - مكتبة A to Z

ويكون مجال الثقة لنسبة مجتمع بمستوى

$$r - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{rq}{n}} < R < r + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{rq}{n}}$$

r : النسبة المحسوبة وإذا كانت σ^2 مجهولة نضع العلاقة

بدلاً من $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ هي $T_{\frac{\alpha}{2}}$

مثال: أوجد مجال الثقة باحتمال قدره 95% أي بمستوى معنوية 5% لمتوسط الإنفاق الأسبوعي لكل المكالمات بالهاتف الجوال لطلاب الجامعة علماً أنه حسبنا عينة عشوائية بحجم $n=5$ متوسطها الحسابي $\bar{X}=1220$ وانحرافها $S=75.5$

الحل:

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري العيارية Z المقابلة $\alpha=0.05$

بالتالي $\frac{\alpha}{2}=0.025$ لا تنطبق إلا بتوزيع ستودنت T وإذا تباين المجتمع مجهول بالتالي النظام المركب هو

$$E = T_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

في جدول ستودنت درجات الحرية $(50-1=49)$ قيمة محددة درجة غير موجودة في الجدول نقارنها مع $\frac{\alpha}{2}=0.025$ تكون $T_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$

ونعتبر المجاهيل معلومة

من العلاقة ** نجد:

$$1220 - 1.96 \times \frac{75.5}{\sqrt{50}} < \mu < 1220 + 1.96 \frac{75.5}{\sqrt{50}}$$

$$\mu \in]1199.07 ; 1240.93[$$

× إذا اعتبرنا أن نسبة المدخنين في العينة السابقة هي 0.4
أوجد مجال الثقة لنسبة المدخنين في الجامعة باحتمال ثقة
95% (مستوى دلالة 5%)

علماً أن $T_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ في مستوى الدلالة 5% و σ^2 مجهولة
بالتالي صيغة المجال الثقة:

$$r - T_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{r \cdot q}{n}} < R < r + T_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{r \cdot q}{n}}$$

$$0.4 - 1.96\sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{50}} < R < 0.4 + 1.96\sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{50}}$$

$$0.4 - 0.135 < R < 0.4 + 0.135$$

$$0.264 < R < 0.535$$

$$R \in]0.264, 0.535[$$

ملاحظة: إذا كان توزيع المجتمع غير طبيعي وحجم العينة المأخوذة صغيرة $(n < 30)$ عندئذٍ يستخدم طرق لامعلمية في التقدير كما سنرى لاحقاً.

ثانياً: تقدير حجم العينة:

وجدنا في السابق أن الخطأ المرتكب في تقدير متوسط المجتمع والمقابل لمستوى دلالة α يكتب على الشكل:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \sigma^2}{E^2} = \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{E}\right]^2$$

* حجم العينة لمجتمع فيه σ^2 :

$$n = \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right]^2$$

* حجم العينة لمجتمع فيه σ مجهول:

$$n = \left[\frac{T_{\frac{\alpha}{2}} \cdot S}{E}\right]^2$$

* حجم العينة اللازمة لتقدير نسبة ظاهرة:

$$n = \frac{(T_{\frac{\alpha}{2}})^2 \cdot r \cdot q}{E^2}$$

مثال:

a. أوجد حجم العينة لتقدير متوسط مجتمع متباين العينة هي $S^2 = 90$ بمستوى دلالة 5% وخطأ مرتكب 5

b. أوجد حجم العينة لتقدير نسبة المدخنين التي تساوي 0.6 بمستوى دلالة 5% وخطأ مرتكب بنسبة المدخنين 0.1

الحل:

a. $S^2 = 90 \Leftarrow T_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$n = \left[\frac{T_{\frac{\alpha}{2}} \cdot S}{E}\right]^2 = \frac{(1.96)^2 \times 90}{25} = 13.82 \approx 14$$

b. $$n = \frac{(T_{\frac{\alpha}{2}})^2 \times r \cdot q}{E^2} = \frac{(1.96)^2 \times 0.4 \times 0.6}{0.01} = 92.19 \approx 92$$

تابع للتمرين ② الحالة المبوبة :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n} = 47.25$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2 = 2209.5$$

التباين :

$$\sigma^2 = 55.23$$

$$\sigma = \sqrt{55.23} \doteq 7.43$$

تقدير الخطأ

$$E = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.17$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - مكتبة A to Z

مكتبة A to Z