كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بحوث عمليات

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

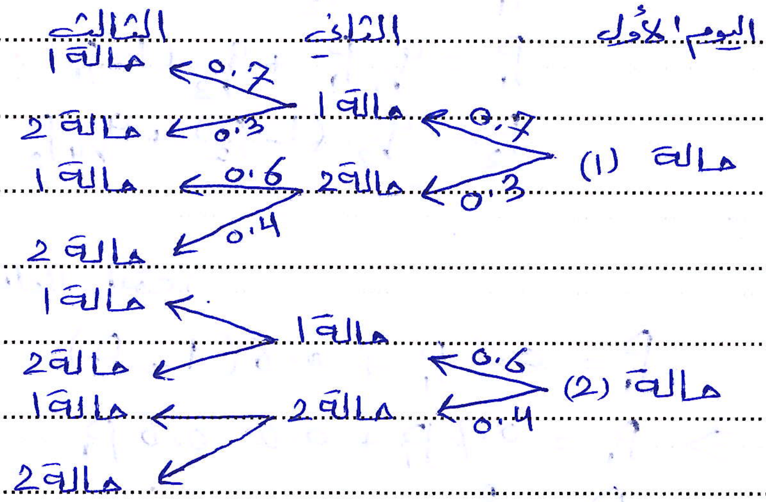
Facebook Group : A to Zمكتبة

عمليات ماركوف:

تعتبر أحد الأساليب الرياضية الهامة التي يمكن استخدامها في عدد من القرارات الإدارية، وفي عملية ماركوف فإنه يمكن تعريف العديد من الحالات واحتمالات الانتقال إلى كل حالة يعتمد على الحالة الحالية ومستقل عن كيفية وصولنا إلى هذه الحالة

مثال: قد تكون الآلة في حالة عمل (1) أو في حالة عدم عمل (2)
فإذا كانت احتمالات التغير لليوم الثاني مبينة بالجدول:

من \ إلى	حالة (1)	حالة (2)
حالة (1) حالة عمل	0.7	0.3
حالة (2) حالة عدم عمل	0.6	0.4



P(الحالة في اليوم الأول / الحالة في اليوم الثالث) $= 0.7 \times 0.7 + 0.3 \times 0.6 = 0.67$

P(الحالة في اليوم الثالث / الحالة في اليوم الأول) $= 0.7 \times 0.3 + 0.3 \times 0.4 = 0.33$

احتمال أن تكون الآلة في حالة (1) في يوم ما في المستقبل بغض النظر عن حالة الآلة في اليوم الأول نسميها نسبة التوازن للحالة (1) وتسمى النسبة المقابلة للحالة 2 "نسبة احتمالات التوازن للحالة 2".

لنفرض P_1 نسبة التوازن للحالة (1) و P_2 الحالة المقابلة للحالة (2)

فيمكن حساب احتمالات التوازن لعملية ماركوف كالتالي:

من \ إلى	حالة 1	حالة 2
حالة 1	q_1	q_2
حالة 2	q_3	q_4

$$P_1 = q_1 P_1 + q_3 P_2$$
$$P_1 = 1 - P_2$$
$$P_1 = q_1 P_1 + q_3 (1 - P_1)$$
$$P_2 = q_2 (1 - P_2) + q_4 P_2$$

* حالة التوازن على المثال السابق:

$$P_1 = 0.7 P_1 + 0.6 (1 - P_1)$$
$$\Rightarrow P_1 = 0.7 P_1 + 0.6 - 0.6 P_1$$
$$P_1 = \frac{2}{3}$$
$$P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

* إذا كنا أمام اتخاذ قرار باستئجار الآلة السابقة أو آلة أخرى فإن احتمالات توازن الحالة 2 تظهر لنا نسبة الوقت الذي ستكون فيه الآلة في حالة عدم عمل للأجل الطويل. وهذه النسبة في مثالنا تساوي $\frac{1}{3}$ وسيكون لهذه النسبة أهمية كبيرة في اتخاذ القرار بشأن الآلة التي سيتم استئجارها حيث نحسب نسبة التوازن الحالة 2 في الآلتين ونقرر استئجار الآلة التي احتمالها أقل أو نسبة احتمالات توازنها أقل لأنه يعني أنها ستكون أقل تعطيلاً.

* خصائص عملية ماركوف:

① احتمالات الانتقال إلى كل حالة يتوقف فقط على الحالة الحالية وليس على الطريقة التي توصلنا بها إلى تلك الحالة. ويطلق على هذه الخاصية بخاصية عدم التذكر أي ليس هناك حاجة إلى تذكر كيفية وصول العملية إلى حالة معينة في فترة معينة وحالة العملية في لحظة معينة في وقت معين تتضمن جميع المعلومات الضرورية عن العملية واحتمالات التغير في المستقبل.

② وجود اشتراطات مبدئية تتناقص أهميتها باستمرار مع استمرار العملية حتى تتلاشى تماماً عند وصول العملية إلى مرحلة التوازن ويمكن تعريف احتمالات التوازن بأنها احتمالات طويلة الأجل للبقاء في حالة معينة بعد أن استمرت العملية مدة كافية حتى تلاشي الاشتراطات المبدئية.

* استخدام عملية ماركوف في اتخاذ القرارات:

يمكن حل بعض مشاكل اتخاذ القرارات بتصميم نموذج عملية ماركوف للمشكلة المعينة ثمّ حساب احتمالات التوازن بين احتمالات التغير ولنقم باستمرار المثال (1) ولنفرض أنّه لدينا الاختيار التالي

استبدال الآلة التي تم تحليلها سابقاً بالآلة 2 وبافتراض أن تكلفة الإيجار لهما واحدة فإذا كانت احتمالات التغير للآلة 2 في الجدول:

من / إلى	حالة1	حالة2
حالة1	0.8	0.2
حالة2	0.5	0.5

$$P_1 = 0.8 P_1 + 0.5(1 - P_1)$$

$$P_1 = 0.8 P_1 + 0.5 - 0.5 P_1$$

$$P_1 - 0.3 P_1 = 0.5$$

$$P_1 = 0.71$$

$$P_2 = 1 - 0.71 = 0.29$$

نقارن نسبة توازن P_1 للآلة (1) مع نسبة التوازن P_1 للآلة (2)

ثانية P_2		أولى P_1
0.71	>	0.67

بالتالي القرار الإداري الأمثل هو اختيار الآلة 2 وذلك لأن احتمال أن تكون في حالة عمل في يوم ما من المستقبل أكبر.

مثال:

إذا افترضنا أن أحد مصانع البن يفكر في القيام بحملة إعلانية ضخمة لحث المستهلكين على تجربة البن الذي يقوم بإنتاجه وبين بعض أبحاث السوق أمكن التوصل إلى تقدير للاحتمالات الحالية لتحول المستهلكين من البن الذي ينتجه هذا المصنع إلى أي نوع آخر وبالعكس كما يظهر الجدول:

من \ إلى	حالة 1	حالة 2	
حالة 1	0.8	0.2	(البن الذي ينتجه المصنع)
حالة 2	0.2	0.8	(البن الذي ينتجه الآخرون)

(احتمالات تغير أذواق المستهلكين بدون حملة إعلانية)

وكذلك نفترض أن باحثي السوق قدروا احتمالات المقابلة التي ستوجد بعد الحملة الإعلانية وبعد الأخذ بعين الاعتبار رد فعل المنافسين وكانت كما تظهر في الجدول:

من \ إلى	حالة 1	حالة 2
حالة 1	0.8	0.2
حالة 2	0.3	0.7

(احتمالات تغير أذواق المستهلكين بعد الحملة الإعلانية)

فإذا افترضنا أن الحملة الإعلانية ستكلف 12000 SP وإن هنالك 50000 مستهلك للبن في السوق (قبل الحملة) وأن كل مستهلك يدر الشركة متوسط ربح سنوي قدره 2 SP

فهل المصنع يقوم بحذو الحملة الإعلانية أو لا ؟

الحل:

احتمالات التوازن بدون حملة إعلانية:

$P_1 = 0.8\,P_1 + 0.2\,(1 - P_1)$

$P_1 = 0.8P_1 + 0.2 - 0.2P_1$

$P_1 = 0.6P_1 + 0.2$

$P_1 = 0.5 \Rightarrow P_2 = 0.5$

احتمالات التوازن للحالة الثانية:

$$P_1 = 0.8P_1 + 0.3(1 - P_1)$$

$$P_1 = 0.8P_1 + 0.3 - 0.3P_1$$

$$P_1 = 0.6$$

الآن نقوم بتحليل النتائج:

- الفوائد التي تعود بها الحملة هي أن احتمالات التوازن لأن يقوم العميل بشراء سلعتنا سيزداد من 50% إلى 60% أي أن المستهلكين سيزداد عددهم بنسبة 10% أي 5000 مستهلك جديد وبالتالي فإن كل مستهلك سيزودنا بربح سنوي قدره ليرتان أي الأرباح الإجمالية $5000 \times 2 = 10000$ في كل عام وهي أقل من تكلفة الإعلان البالغة 12000 sp إذاً سيكون القرار بعدم القيام بالحملة الإعلانية.

* بفرض غيرنا نتائج الجدول التالي:

من \ إلى	حملة 1	حملة 2
حملة 1	0.9	0.1
حملة 2	0.2	0.8

$$P_1 = \frac{2}{3} = 0.67$$

زاد عدد المستهلكين الجدد 17%

$$\frac{17}{100} \times 50000 = 8333$$ شخص

الربح السنوي: $8333 \times 2 = 16666$

حالات التوازن في المشاكل الكبيرة:

لم تتعدى الحالات في الأمثلة السابقة الحالتين فقط ويمكن في الواقع أن نستخدم نفس المدخل لحل المشاكل الأكبر التي تتضمن أكثر من حالتين والاختلاف الوحيد هو وجود أكثر من معادلة واحدة في هذه الحالة الأخيرة ويتطلب الأمر بهذه الحالة أن نقوم بحل هذه المعادلات للوصول إلى احتمالات التوازن، عدد المعادلات الواجب حلها يساوي دائماً: (عدد الحالات −1)

مثال: تظهر احتمالات التغير لإحدى عمليات ماركوف تتضمن ثلاث حالات والجدول يعطي جدول التغيرات:

من \ إلى	حالة 1	حالة 2	حالة 3
حالة 1	q_1 0.6	q_2 0.3	q_7 0.1
حالة 2	q_3 0.7	q_4 0.2	q_8 0.1
حالة 3	q_5 0.2	q_6 0.4	q_9 0.4

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

$$P_3 = 1 - P_1 - P_2$$

$$\Rightarrow P_1 = 0.6\,P_1 + 0.7\,P_2 + 0.2(1 - P_1 - P_2) \quad \text{---}\ (1)$$

$$P_2 = 0.3\,P_1 + 0.2\,P_2 + 0.4(1 - P_1 - P_2) \quad \text{---}\ (2)$$

$$\begin{cases} 0.6P_1 - 0.5P_2 = 0.2 \\ 0.1P_1 + 1.2P_2 = 0.4 \end{cases}$$

بالحل المشترك: $P_1 = \frac{4}{7}$, $P_2 = \frac{2}{7}$ $\Rightarrow$ $P_3 = \frac{1}{7}$

انتهت المحاضرة