كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية القياس

المحاضرة : الثالثة/**عملي**/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

التمرين الأول:

ليكن $X \subseteq \mathbb{R}$ وليكن $R_1 = \{A \subseteq \mathbb{R};$ جميع عناصر A زوجية$\} \cup \{\phi\}$

$R_2 = \{B \subseteq \mathbb{R};$ جميع عناصر B أعداد فردية$\} \cup \{\phi\}$

والمطلوب:

1- تحقق أن R_1 و R_2 حلقة.

2- تحقق أن $R_1 \cup R_2$ حلقة.

الحل: من تعريف R_1 و R_2 نجد أن R_1 و R_2 مجموعتين غير خالية من أجزاء $X = \mathbb{R}$

① لنأخذ $A_1 \in R_1$ فإنَّ جميع عناصر A_1 أعداد زوجية

ولنأخذ المجموعة $A_2 \in R_1$ فإنَّ جميع عناصر A_2 أعداد زوجية

ومنه نجد أن $A_1 - A_2 = \phi \in R_1$ حسب تعريف R_1 فإنَّ

$A_1 - A_2 \in R_1$ لأن فرق مجموعتين من الأعداد الزوجية هو مجموعة من الأعداد الزوجية

$\Leftarrow R_1$ مغلقة بالنسبة لعملية الفرق البسيط.

ولدينا أيضاً $A_1 \cup A_2 \in R_1$ لأن اجتماع مجموعتين جميع عناصرهما أعداد زوجية هو مجموعة من الأعداد الزوجية وبالتالي R_1 مغلقة بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي $\Leftarrow$

نجد أن R_1 هي حلقة في R.

نفس الطريقة نثبت أن R_2 حلقة في $\mathbb{R}$

(2) $R_1 \cup R_2$ لها الحالات الآتية:

أ- جميع عناصرها أعداد زوجية

ب- إما جميع عناصرها أعداد زوجية

ت- إما جميع عناصرها أعداد زوجية وفردية

ليكن: $A = \{3\}$ $B = \{2\}$

$A \in R_2$ $B \in R_1$

$\Rightarrow A \in R_1 \cup R_2$

$B \in R_1 \cup R_2$

$A \cup B = \{2, 3\} \notin R_1 \cup R_2$

إذاً $R_1 \cup R_2$ ليست مغلقة بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي

بالتالي $R_1 \cup R_2$ ليست حلقة في $X = \mathbb{R}$

التمرين الثاني:

إذا كانت X مجموعة ما غير خالية منتهية أثبت أن:

$E = \{A \in P(X)\ ;$ منتهية $\bar{A}$ أو منتهية $A\}$ هو جبر

في X وليس جبراً تاماً في الحالة العامة.

الحل:

بما أن X مجموعة ما غير منتهية أي أنها تحوي على الأقل عنصراً واحداً.

$\{a\} \in P(X) \Leftrightarrow \{a\} \in F \Leftrightarrow F \neq \{\phi\}$

(1) بما أن ϕ منتهية فإن $\phi \in F$ و X غير منتهية لكن

$\bar{X} = \phi$ أي أن $X \in F \Leftarrow X, \phi \in F$ والشرط الأول محقق.

② لنفرض أنَّ $\forall A, B \in F$

ولنثبت أنَّ $A \cup B \in F$

وهنا نميز الحالات :

الحالة الأولى : A و B مجموعتين منتهيتين ومنه كتب اجتماع مجموعتان منتهيات هو مجموعة منتهية وبالتالي $A \cup B \in F$

الحالة الأولى محققة

الحالة الثانية : إذا كان A و B مجموعتين غير منتهيتين فإنَّ $\bar{A}$، $\bar{B}$ مجموعتان منتهيات عندئذٍ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cup B}$ مجموعة منتهية لأنَّ $\bar{A} \cap \bar{B}$ مجموعة منتهية وبالتالي

$A \cup B \in F$

الحالة الثالثة : إذا كان A و $\bar{B}$ مجموعتان منتهيات بالتالي :

$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \bar{B}$

و $\bar{B}$ مجموعة منتهية فإنَّ $\overline{A \cup B}$ مجموعة منتهية بالتالي

$A \cup B \in F$

الحالة الرابعة : إن كان $\bar{A}$ و B مجموعتان منتهيات :

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \bar{A}$

و $\bar{A}$ مجموعة منتهية عندئذٍ $\overline{A \cup B}$ مجموعة منتهية بالتالي

$A \cup B \in F$

بالتالي نجد من دراسة الحالات الأربعة أنَّ :

$\forall A, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$

والشرط الثاني محقق

③ $\forall A \in F$ نميز حالتين :

الحالة الأولى : A غير منتهية بالتالي $\bar{A}$ منتهية $\Leftarrow$ $\bar{A} \in F$

الحالة الثانية: A منتهية بالتالي $\bar{\bar{A}} = A \in F \Leftarrow \bar{A} \in F$

الشرط الثالث محقق.

مما سبق نجد أن F جبر في X

لنبين أن F ليس جبراً تاماً في X بشكل عام:

من أجل ذلك نأخذ $X = R$ ولتكن:

$$F = \{A \in P(\mathbb{R}) ; \ A \text{ منتهية أو } \bar{A} \text{ منتهية}\}$$

ولنتحقق أن F مغلقة بالنسبة للاجتماع المعدود، بالتالي لتكن

$$A_i = \{i\} \quad ; \quad i = 0, 1, \ldots$$

بالتالي A_i مجموعات منتهية ومنه فإن $A_i \in F$

لكن $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \{0, 1, \ldots\} = \mathbb{N} \notin F$ لأن $\mathbb{N}$ ليست منتهية

ومتممها غير منتهية $\Leftarrow$

F ليست مغلقة بالنسبة للاجتماع المعدود $\Leftarrow$

F ليست جبر بالحالة العامة في X

انتهت المحاضرة