كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي2

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

نظرية الرواسب (البواقي):

تعريف: لتكن Z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة $f(Z)$ يسمى راسب الدالة $f(Z)$ عند النقطة Z_0 وهو عدد ونرمز له بالرمز $res\, f(Z_0)$ ونعرفه بالعلاقة:

$$res\, f(Z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(Z)\, d(Z) \quad \ldots (1)$$

حيث علما (γ) يمكن اعتبارها دائرة مركزها Z_0 ونصف قطرها صغير بشكل كافي حتى تكون الدائرة تماما داخل منطقة تعريف الدالة $f(Z)$ ولا تحوي نقاط شاذة للدالة $f(Z)$ سوى Z_0

$$res\, f(Z),\ res\,[f(Z), Z_0]$$

يمكننا حساب راسب الدالة $f(Z)$ في النقطة Z_0 وذلك عن طريق منشور لوران حيث أن الراسب يعطى بالعلاقة:

$$res\, f(Z_0) = C_{-1} \quad \ldots (2)$$

أي هو الحد الأول من الجزء الرئيسي في سلسلة لوران C_{-1} في جوار Z_0

* الراسب في النقطة الشاذة القابلة للإزالة معدوم.
* الراسب في النقطة الشاذة القطب من المرتبة n للدالة $f(Z)$ يعطى بالعلاقة:

$$res\, f(Z_0) = \lim_{Z\to Z_0} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dZ^{n-1}}\left[(Z-Z_0)^n f(Z)\right] \quad \ldots (3)$$

* إذا كانت النقطة الشاذة قطب بسيط

$$res\, f(Z_0) = \lim_{Z \to Z_0} (Z - Z_0) f(Z) \quad \text{-----} \quad (3)'$$

* في حالة كانت دالة $f(Z)$ في جوار النقطة Z_0 يمكن كتابتها على شكل كسر (قسمة بالشكل تحليلين)

$$f(Z) = \frac{\varphi(Z)}{\psi(Z)}$$

حيث: $\varphi(Z_0) \neq 0$

$$\psi(Z) = 0 \quad , \quad \psi'(Z_0) \neq 0$$

بالتالي Z_0 قطب بسيط للدالة $f(Z)$

$$res\, f(Z) = \frac{\varphi(Z_0)}{\psi'(Z_0)} \quad \text{-----} \quad (5)$$

* إذا كانت النقطة Z_0 شاذة أساسية للدالة $f(Z_0)$ بالتالي لإيجاد الراسب يجب إيجاد المعاملات C_{-1} في سلسلة لوران للدالة $f(Z)$ في جوار Z_0 والراسب يكون:

$$res\, f(Z_0) = C_{-1}$$

أمثلة:

أوجد راسب الدالة $f(Z) = \dfrac{\sin Z^2}{Z^3 - \frac{\pi}{4} Z^2}$ في نقاطها الشاذة.

الحل: نوجد النقاط الشاذة: $Z^3 - \frac{\pi}{4} Z^2 = 0$

$$Z_1 = 0 \quad , Z_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{Z \to Z_1} f(Z) = \lim_{Z \to 0} \frac{\sin Z^2}{Z^2} \cdot \lim_{Z \to 0} \frac{1}{Z - \frac{\pi}{4}} = \frac{-4}{\pi}$$

$Z_1 = 0$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح للدالة $f(Z)$ وبالتالي:

$$\text{res} f(0) = 0$$

من أجل $Z_2 = \frac{\pi}{4}$:

قطب بسيط

$$\lim_{Z \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin Z^2}{Z^2\left(Z - \frac{\pi}{4}\right)} = \infty$$

$$\Rightarrow \text{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{Z \to \frac{\pi}{4}} \left(Z - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sin Z^2}{Z^2\left(Z - \frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{Z \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin Z^2}{Z^2}$$

$$= \frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi^2}{16}$$

نحل أيضاً بالطريقة 5 :

$$f(Z) = \frac{\varphi(Z)}{\psi(Z)} \quad ; \quad \varphi(Z) = \sin Z^2$$

$$\psi(Z) = Z^3 - \frac{\pi}{4} Z^2$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$$

$$\psi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \psi'(Z) = 3Z^2 - \frac{\pi}{2} Z$$

$$\Rightarrow \psi'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16}$$

$$\text{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi^2}{16}$$

أوجد راسب الدالة : $f(Z) = \frac{\sin 3Z - 3 \sin Z}{(\sin Z - Z) \sin Z}$

$$\varphi(Z) = \sin 3Z - 3 \sin Z$$

$$= \underbrace{3Z - \frac{(3Z)^3}{3!} + \frac{(3Z)^5}{5!} + \cdots}_{} - \underbrace{\left[3Z + \frac{3(Z)^3}{3!} - \frac{3}{5!} Z^5 + \cdots\right.}_{}$$

$$= Z^3\left[\left(\frac{-3^3}{3!} - \frac{3}{3!}\right) + \left(\frac{3^5}{5!} - \frac{3}{5!}\right) Z^2 + \cdots\right]$$

$$= Z^3 \varphi_1(Z)$$

$$\varphi_1(0) = \frac{-24}{3!} \neq 0$$

$$\psi(Z) = (\sin Z - Z)\sin Z$$

$$= \left[Z - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} - \cdots - Z\right]\left(Z - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} + \cdots\right)$$

(الأس)

$$= Z^4\left[-\frac{1}{3!} + \frac{Z^2}{5!} + \cdots\right]\left[1 - \frac{Z^2}{3!} + \frac{Z^4}{5!} - \cdots\right]$$

$$\cancel{Z^4} = Z^4 \psi_1(Z)$$

$$\psi_1(0) = \left(\frac{-1}{3!}\right)(1) = \frac{-1}{6} \neq 0$$

$$\text{res } f(0) = \frac{\varphi_1(0)}{\psi_1(0)} = \frac{-24/3!}{-1/6} = 24$$

$\Leftarrow Z=0$ قطب بسيط للدالة.

نظرية كوشي للرواسب (النظرية البواقي لكوشي):

نظرية: لتكن الدالة $f(Z)$ تحليلية على المحدد C للمجال D وفي كل مكان داخل المجال باستثناء عدد محدود من النقاط الشاذة $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ بالتالي:

$$\int_C f(Z)\,dZ = 2\pi i \sum_{K=1}^{n} \text{res } f(Z_K) \quad \text{------} (6)$$

مثال: احسب التكامل

$$\int_{|Z|=4} \frac{e^{Z-1}}{Z^2+Z}\,dZ$$

$Z_1 = -1 \;,\quad Z_2 = 0$

وهي أقطاب بسيطة للدالة وتقع داخل قرص الدائرة وهو
$|Z| < 4$

حسب (3) الراسب عند Z_2

$$\operatorname{res} f(Z_2) = \operatorname{res} f(0) = \lim_{Z\to 0} Z \cdot \frac{e^{Z-1}}{Z(Z+1)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

الراسب عند Z_1 حسب 5: نكتب الدالة $f(Z)$ بالشكل $\frac{\varphi(Z)}{\psi(Z)}$

حيث:

$\varphi(Z) = e^{Z-1}$

$\psi(Z) = Z(Z+1)$

$\varphi(-1) = e^{-2} \neq 0$

$\psi(-1) = 0 \Rightarrow \psi'(-1) = 2Z+1$

$\psi'(-1) = \cancel{2} - 1 \neq 0$

بالتالي $Z = -1$ قطب بسيط للدالة إذاً:

$$\operatorname{res} f(-1) = \frac{\varphi(-1)}{\psi(-1)} = \frac{e^{-2}}{-1} = \frac{-1}{e^2}$$

$$\int_{|Z|=4} \frac{e^{Z-1}}{Z^2+1} = 2\pi i \left(\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(-1)\right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right) = 2\pi i \left(\frac{e-1}{e^2}\right)$$

تمرين:

$$\int_{|Z|=4} \frac{e^{Z}-1}{Z^2+Z}$$

راسب الدالة عند $Z=\infty$

يقال إن الدالة $f(Z)$ تحليلية عند $Z=\infty$ إذا كانت الدالة $\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ تحليلية في النقطة $\xi=0$

على سبيل المثال الدالة $f(Z)=\sin\frac{1}{Z}$ تحليلية في النقطة $Z=\infty$ لأن الدالة $\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\sin\xi$ ~~تحليلية~~ تحليلية في النقطة $Z=0$

* يقال إن الدالة تملك نقطة شاذة معزولة $Z=\infty$ إذا وجد جوار لهذه النقطة لا يحوي سواها نقطة شاذة.

مبرهنة (1): إذا كانت $Z=\infty$ نقطة شاذة قابلة للإزالة للدالة $f(Z)$ بالتالي منشور لوران للدالة $f(Z)$ في جوار هذه النقطة لا يحوي قوى موجبة لـ Z

و إذا كانت $Z=\infty$ نقطة شاذة قطب بالتالي منشور لوران يحوي عدد محدود من القوى الموجبة لـ Z.

و إذا كانت $Z=\infty$ نقطة شاذة أساسية بالتالي منشور لوران يحوي عدد لا نهائي من الحدود ذات القوى الموجبة لـ Z

* لتكن الدالة $f(Z)$ تحليلية في الجوار المثقوب للنقطة $Z=\infty$ بالتالي حسب راسب الدالة $f(Z)$ في هذه النقطة يعطى بالعلاقة:

$$\operatorname{res} f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(Z)\,dZ \quad \text{------} (7)$$

حيث علما دائرة كبيرة بما فيه الكفاية $|Z|=\gamma$ [الاتجاه يعاكس عقارب الساعة]

* من هذا التعريف ينتج أن راسب الدالة عند ∞ يساوي معامل Z^{-1} في منشور لوران لدالة $f(Z)$ في جوار $Z=\infty$ ومضروباً بإشارة سالب

$$res f(\infty) = -C_{-1} \quad \text{---}(8)$$

مثال: أوجد راسب الدالة $f(Z) = \frac{Z+1}{Z}$ في $Z=\infty$

$$f(Z) = 1 + \frac{1}{Z}$$

$$\Rightarrow C_{-1} = 1$$

بالتالي $res f(\infty) = -C_{-1} = -1$

$$\lim_{Z\to\infty} f(Z) = \lim_{Z\to\infty} \frac{Z+1}{Z} = 1$$

نقطة شاذة قابلة للإزالة

انتهت المحاضرة