كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : نظرية البيان

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

برهنة: إذا كانت البيانة G غير مترابطة فإن $\overline{G}$ هو بيانة مترابطة.

الإثبات:

ليكن u, w رأسين كيفيين في بيانة $\overline{G}$ وبالتالي uw هما رأسان في G، إذا كان u, w ينتميان لمركبتين مختلفتين في G عندئذٍ فإن الضلع uw ينتمي إلى مجموعة أضلاع البيانة المتمم $\overline{G}$.

* إذا كان uw ينتميان إلى المركبة نفسها في G ولتكن G_1 ونفرض أن w رأس في G ينتمي إلى مركبة أخرى G_2 عندئذٍ وبالتالي uw, ww ينتميان لمجموعة اضلاع البيانة المتمم $\overline{G}$ أصبح لدينا u, w, w ثلاثة رؤوس في $\overline{G}$ يصل uw إذاً $\overline{G}$ مترابطة.

مثال:

يمكن أن يكون G و $\overline{G}$ مترابطتان.

الكتلة في البيانة:

ليكن لدينا البيانة المترابطة $G(P,q)$ نسمي البيانة G كتلة إذا كانت المجموعة رأساً قاطعاً.

مثال: ليكن لدينا البيانة: G

نحذف v_1

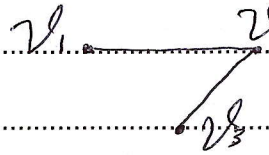
بعد حذف v_1 البيانة مترابطة.

نحذف v_1 v_2 (مترابط)

نحذف v_3 v_1

(مترابط)

إذاً البيانه G هو كتلة.

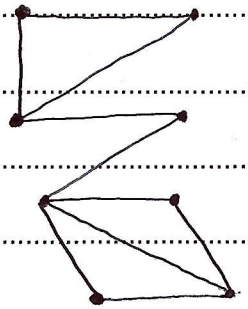


نحذف v_1 : v_2 (مترابط)

نحذف v_3 v_1 v_2 (غير مترابط)

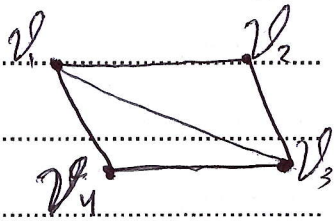
G_2 ليس كتلة.

مثال: ليكن لدينا البيانه:

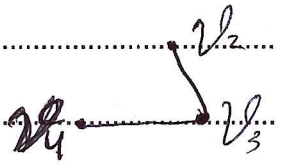


فكك هذا البيانه إلى الكتل المكونة له:

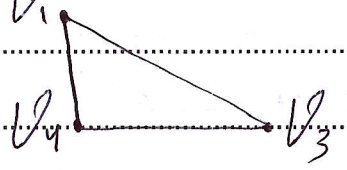
الحل:



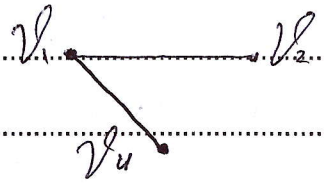
نحذف v_1:



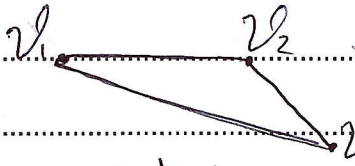
نحذف v_2:



نحذف v_3:



نحذف v_4:



ممتد البيانه مترابط لعدم ازدياد مركبات البيانه.

مبرهنة: ليكن البيانه المترابط G عندئذٍ يقع مركزه في كتلة واحدة.

الاثبات:

* إذا لم يحوي G رؤوساً قاطعة فإنه رؤوس المركز تقع ضمنه هذا البيانه المكلل لكتلة واحدة ويتم المطلوب.

** إذا حوى G رأساً قاطعاً v عندئذٍ $G-v$ يحوي مركبتين هما G_1, G_2 بفرض أنه رؤوس المركز لا تقع في كتلة واحدة عندئذٍ إنه كلٌ من G_1, G_2 يحوي رؤوساً من المركز $Z(G)$.

ليكن $u \in G$ بحيث أنه $d(u,v) = e(v)$.

* ليكن P_1 ساراً له الطول $e(v)$ عندئذٍ احدى مركبات البيانه G_1 و G_2 لا تحوي رؤوساً من P_1 وليكن G_2.

** ليكن $w \in G_2$ بحيث أنه $w \in Z(G)$ وليكن P_2 هو أقصر سار في $w-u$ إنه P_3: $u-w$ مكلل من P_1 و P_2 وليس منه

TEL:0931497960 — مكتبة A to Z

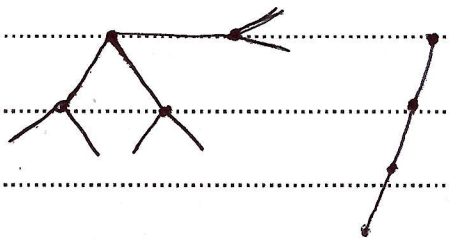
الضروري أنه يكون أقصر مسار من u إلى w.

مما سبق نجد أن $P(v) \subset P(w)$ وهذا يناقض تعريف عناصر مركز البيانة والتي لها أصغر بعد مركزي (نصف القطر) أي يناقض كون $w \in Z(G)$ وبالتالي عناصر $Z(G)$ تقع في كتلة واحدة.

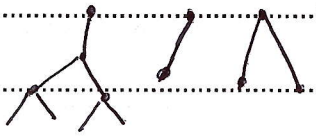
الأشجار

الشجرة: هي بيانة مترابطة لا يوجد فيها حلقات

مثال:



الغابة: هي بيانة غير مترابطة لا يوجد فيها حلقات.



مبرهنة:

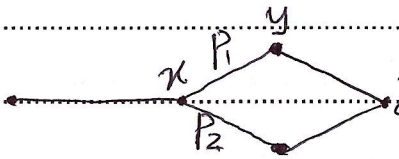
ليكن $T(P,q)$ بياناً عندئذٍ العبارات التالية متكافئة

1. T شجرة
2. بين كل رأسين في T يوجد مسار وحيد.
3. T مترابط وكل ضلع فيه هو جسر
4. T مترابط وعدد أضلاعه $P-1$
5. T لا يوجد فيه $P-1$ ضلع ولا يوجد حلقات.
6. T لا يوجد فيه حلقات ولكنه إذا وصلنا أي رأسين غير متجاورين ينتج لدينا بيانة يوجد فيه حلقة واحدة فقط.

الاثبات:

① ⟸ ②: بما أنّ T شجرة إذاً T مترابط وبالتالي بين أي رأسين كيفيين يوجد مسار واحد على الأقل ولنفرض فيه وجود مسارين بين P_1 و P_2 مختلفين بين رأسين x و z وبالتالي يوجد ضلع xy مثلاً من احدهما يؤدي ذلك إلى وجود مسارين xy لا يحوي الضلع xy وليكن P إذاً اصبح $P(xy)$ حلقة وهذا يناقض كون T شجرة وبالتالي $P_1 = P_2$

مثال:



② ⟸ ③: T مترابط لوجود مسار بين أي رأسين كيفيين وليكن $P(u,v)$ ضلع كيفي فيه عندئذٍ $T_1 = T - P$ غير مترابط وإلا لاحتوى T مسار بين متباينين بين x و z وهذا يناقض وحدانية المسار إذاً T شجرة.

③ ⟸ ①: نستقرأ على عدد الرؤوس يفرض أنّ $P = 1$ عندئذٍ $q = 0$ ويفرض $P = 2$ عندئذٍ $q = 1$ والمبرهنة صحيحة لأجل هاتين القيمتين الابتدائيتين.

نفرض أنّ المبرهنة صحيحة لأجل أي بيان متراابط عدد رؤوسه أقل من P بما أنّ T مترابط وكل ضلع فيه هو جسر فإذا حذفنا أي ضلع نرى عدد مركبات البيان وبالتالي ينتج لدينا على الأقل مركبتين هما T_1 و T_2 حيث T_1 عدد رؤوسه P_1 و T_2 عدد رؤوسه P_2 و $P_1 < P$ و $P_2 < P$ وبالتالي بحسب الفرضية بالاستقراء إنّ q_1 (عدد أضلاع T_1) يساوي $P_1 - 1$ و q_2 (عدد أضلاع T_2) يساوي $P_2 - 1$

TEL:0931497960 - مكتبة A to Z

إذن $P = P_1 + P_2$ ، $q = q_1 + q_2 + 1$ بالجمع

$(P_1 - 1) + (P_2 - 1) = q_1 + q_2$

$(P_1 + P_2) - 2 + 1 = q_1 + q_2 + 1$

$P_0 - 1 = q_0$ ← وهو المطلوب

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 — مكتبة A to Z

مكتبة A to Z