كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

# المادة : معادلات تفاضلية2

## المحاضرة : الرابعة/نظري/

تعريف المجموعة التفاضلية: إذا كان لدينا مجموعة معادلات تفاضلية عادية تحوي متحول مستقل $x$ وعدد من التوابع ومشتقاتها تدعى هذه المعادلات بالمجموعة التفاضلية.

مرتبة المجموعة التفاضلية: ~~مجم~~ مجموع مراتب كل من معادلاتها

مثال:

$$y''' + xyy'' = 0$$

$$y' + xy = 0$$

مرتبة هذه المجموعة ٤.

ملاحظة: إذا كانت المجموعة التفاضلية مؤلفة من $n$ معادلة كل منها من المرتبة الاولى فتكون مرتبة المعادلة التفاضلية واحد

وتكون بالشكل: $F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0$

إذا أمكن كتابة هذه ~~المعادلة~~ المعادلات محلولة بالنسبة للمشتق تكون المجموعة التفاضلية بالشكل:

$$y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n),\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_2), \ldots, y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

وتسمى بالمجموعة التفاضلية النظامية (محلولة بالنسبة لأعلى مشتق)

إذا كانت $f_i,\ i = 1, \ldots, n$ خطية بالنسبة لـ $i = 1, \ldots, n$ ~~الحد~~ تكون المجموعة التفاضلية الخطية بالشكل:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + R_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + R_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{2n}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + R_n(x) \end{aligned}\right\} (*)$$

تكون $R_1(x)=R_2(x)=\dots=R_n(x)=0$ خطية متجانسة إذا كانت أحد التوابع $R_1,\dots,R_n$ سميت المجموعة بالخطية غير المتجانسة.
إذا كانت $a_{ij}$ ; $i,j=\overline{1,n}$ أعداد ثابتة سميت المجموعة الخطية ذات الأمثال الثابتة.

ملاحظة: إذا كانت الأطراف اليمنى من المجموعة * لا تتعلق بالمتحول $x$ سميت المجموعة بجملة ~~تابعة~~ ذاتية.

$F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$

$y'_1 = f_1(y_1, \dots, y_n)$

$y'_2 = f_2(y_1, \dots, y_n)$

$\vdots$

$y'_n = f_n(y_1, \dots, y_n).$

ملاحظة: إذا كانت لدينا ~~مجموعة~~ مجموعة تفاضلية خطية من المرتبة $n$ يكون من المعادلات بعدد $n$ على الأكثر ويمكن تحويل هذه المجموعة إلى مجموعة ثانية نوعه $n$ معادلة تفاضلية كل منها من المرتبة الأولى والعكس صحيح أي يمكن تحويله المجموعة التفاضلية من المرتبة $n$ إلى معادلة واحدة من المرتبة $n$

مثال: $y''' + 3y'' + 4y = x.$

معادلة من المرتبة 3 سنحولها لمجموعة تفاضلية.

سنفرض مجموعة توابع:

$y = y_1 ,\ y' = y_2 ,\ y'' = y_3 \Rightarrow y_1 = y \Rightarrow y'_1 = y_2$

$y_2 = y' \Rightarrow y'_2 = y_3$

$y_3 = y'' \Rightarrow y'_3 = -3y_3 - 4y_1 + x.$

مثال: لتكن المجموعة التفاضلية $x' - 3y = 0$ ---(1)

$y' + 3x = 0$ ---(2)

منه المرتبة 2

منه $y = \frac{1}{3}x' \Leftarrow y' = \frac{1}{3}x''$ نعوضه في 2

$\frac{1}{3}x'' + 3x = 0$

$\boxed{x'' + 9x = 0} \Rightarrow$

حصلنا على معادلة خطية متجانسة

تعريف: الحل العام، الحل الخاص، الحل الشاذ

ليكن لدينا المجموعة التفاضلية

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y'_2 &= f(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y'_n &= f_n(x, y, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}\right\} \text{---- (I)}$$

نسمي مجموعة التوابع $y_1(x), \dots, y_n(x)$ المستمرة والقابلة للاشتقاق حلاً للجملة إذا تحولت المجموعة 1 من أجل تلك التوابع إلى مطابقة من أجل جميع قيم $x$.

الحل العام: تدعى مجموعة حلول المعادلات والمتعلقة بـ n ثابت اختياري بالحل العام للمجموعة التفاضلية و تعطى بالعلاقة

$y_i = \varphi_i(x, c_1, \dots, c_n)$ --- (2).

$\varphi_i$ توابع معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق.

الحلة الخاصة: يدعى كل حلة للمجموعة 1 نحصل عليها من الحل العام لمدد الثوابت قيم عددية خاصة بالحلة الخاصة.

الحلة الشاذ: يدعى كل حلة للمجموعة 1 لا يمكن الحصول عليها من صيغة الحل العام باعطاء الثوابت قيم عددية، قيم معينة بالحلة الشاذ.

ملاحظة: قد تكون العلاقة 2 قابلة للحلة بالنسبة للثوابت

$C_i = \varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ ---- (3).

- التكامل العام والتكامل الأولي:

التعريف الأول للتكامل: نقول عن التابع $\varphi$ و

$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$, $(\varphi \not\equiv C)$

أنه تكامل للمجموعة 1 إذا آل هذا التابع إلى عدد ثابت نتيجة استبدال $y_1, \ldots, y_n$ بأي حلة خاصة للمجموعة المعطاة أي أنه التابع $\varphi$ يساوي ثابت على طول كل حلة خاصة أي يصبح بشكل (3).

التعريف الثاني للتكامل: نسمي التابع $\varphi$ الذي تابع لـ $(x, y_1, \ldots, y_n)$ والذي له مشتقات جزئية بالنسبة لجميع متحولاته وغير معدومة في آنٍ واحد وذلك إذا طابق تفاضله الكلي الصفر وفقاً للمجموعة 1

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} dy_n = 0$$

أي أنه $y_1, \ldots, y_n$ يحققون العلاقة (1)

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \Rightarrow dy_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_n)dx$$

$$dy_n = f_n(x, y_1, \dots, y_n)dx$$

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} f_1 dx + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial y_n} f_n dx \equiv 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial y_n} \equiv 0.$$

ملاحظة: التكامل وفق التعريف الثاني هو تكامل وفق التعريف الأول لكن العكس ليس صحيح بالضرورة لأن المشتقات الجزئية ليس من الضروري أن تكون موجودة دوماً.

التكامل الاولي: نقول عن العلاقة $\Psi(x, y_1, \dots, y_n)$ أنها تكامل للمجموعة 1 إذا كانت التابع $\Psi$ تكاملاً للمجموعة 1 وفق التعريف الأول أو الثاني.

التكامل العام: نسمي كل مجموعة مؤلفة من $n$ تكامل أولي للمجموعة 1 مستقلة عن بعضها البعض بالتكامل العام لهذه المجموعة

مبرهنة: إذا كانت للتكاملات $\Psi_1, \dots, \Psi_n$ مشتقات جزئية مستمرة فإن الشرط اللازم و الكافي كي تكون هذه التكاملات مستقلة أن يكون المميز اليعقوبي للتوابع $\Psi_1$ حتى $\Psi_n$ بالنسبة لـ $n$ من متحولاتها ولتكن $y_1, \dots, y_n$ مختلف عن الصفر

$$\cancel{\frac{D(\Psi_1, \dots, \Psi_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} \\ \partial \Psi_1 \end{vmatrix}}$$

أعيد أُسبقة

$$\frac{D(\psi_1,\dots,\psi_n)}{D(y_1,\dots,y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2}, & \dots, & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

نظرية: كل مجموعة تفاضلية من المرتبة n لها n تكامل أولي مستقلة على الأكثر:

المجموعة التفاضلية غير الخطية بالصيغة التناظرية:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n)$$

ليكن لدينا المجموعة التفاضلية غير الخطية محلولة بالنسبة للمشتقات يمكن كتابة هذه المجموعة بالشكل:

$$dx = \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n} \quad \text{--- (5)}$$

لإيجاد الحل العام للمجموعة 4 نكتبها بالشكل 5 (النسب التفاضلية) ثم نحاول إيجاد التكاملات الأولية بالاستفادة

من خواص التناسب المعروفة لدينا من المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الأولى

مثال:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{y}$$

(1) (2) (3)

مرتبة 2 نحتاج تكاملين أوليين ولحل هذه المجموعة نختار تناسبين.

باختيار التناسب نختار 2 (1 تابع و الثاني متحول)

تكامل اولي $(2),(3): \; dy = z\,dz \Rightarrow \boxed{y = \frac{z^2}{2} + c_1}$

من (1) و (2)

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln(x) = \ln(y) + \ln(c)$$

تكاملي اولي 2 $\Leftarrow \boxed{x = c_2\, y}$

$$\psi_1 : y - \frac{1}{2}z^2 = c_1$$

$$\psi_2 : \frac{x}{y} = c_2$$

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(z, y)} = \begin{vmatrix} -z & 1 \\ 0 & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{xz}{y^2} \neq 0$$

ومنه ا و 2 يشكلان التكامل العام.

مثال:

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x}$$

(1) (2) (3)

من 2 و 3 :

$$dy = dZ \Rightarrow y - Z = C_1$$

من 1 و 2 وبالاستفادة من التكامل الأول:

$$\frac{dx}{C_1} = \frac{dy}{x}$$

$$x\,dx = C_1 dy \Rightarrow x^2 = 2C_1 y + C_2 \Rightarrow x^2 = 2(y - Z)y + C_2$$

$$C_2 = x^2 - 2(y - Z)y$$

$$\Psi_1 : y - Z = C_1$$

$$\Psi_2 : x^2 - 2(y - Z)y = C_2$$

$$\frac{D(\Psi_1, \Psi_2)}{D(x, Z)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2x \neq 0$$

$\Psi_1$ و $\Psi_2$ مستقلان.

مثال:

$$\frac{dx}{dZ} = \frac{dy}{y} = \frac{dZ}{0}$$
$$-(1)- \quad -(2)- \quad -(3)-$$

$$dZ = 0 \Rightarrow Z = C_1 \quad \Leftarrow \text{من } (3)$$

من (1) و (2)

$$\frac{dx}{C_1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{x}{C_1} = \ln y + \ln C_2$$

$$\ln e^{\frac{x}{C_1}} = \ln y + \ln C_2 \Rightarrow e^{x/C_1}/y = C_2$$

$\psi_1 : C_1 = z$ , $\psi_2 : e^{x/z}/y = C_2$

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ (اختيار خاطئ)

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{e^{x/z}}{y^2} & -\frac{x}{z}\frac{e^{x/z}}{y} \end{vmatrix} = \frac{-e^{x/z}}{y^2} \neq 0$$

مثال

$$\frac{2dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{2z(x+y)}$$

-(1)- -(2)- (3)-

$(1) + 2(2) = (3)$.

$$\frac{2dx+2dy}{x^2+y^2+2xy} = \frac{dz}{2z(x+y)}$$

$$\frac{2(dx+dy)}{(x+y)^2} = \frac{dz}{2z(x+y)} \Longrightarrow \frac{2(dx+dy)}{x+y} = \frac{dz}{2z}$$

$$4\ln(x+y) = \ln z + \ln c$$

$$(x+y)^4 = cz$$

$(1) + 2(2) = (1) - 2(2)$

$$\frac{2dx+2dy}{x^2+y^2+2xy} = \frac{2dx-2dy}{x^2+y^2-2xy} \Longrightarrow \psi_1 : \frac{(x+y)^2}{z} = C_1$$

$$\frac{2(dx+dy)}{(x+y)^2}=\frac{2(dx-dy)}{(x-y)^2} \Rightarrow \frac{1}{x+y}=\frac{1}{x-y}+C_2$$

$$\psi_2 : \frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}=C_2$$

انتهت المحاضرة