كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عددي1

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

المحاضرة الرابعة - التحليل العددي م2 - السنة الثانية - قسم الرياضيات
- نظري - : الاستيفاء

تعد عملية الاستيفاء (Interpolation) في التحليل العددي أداة مهمة جداً تفيد في تقدير قيم مجهولة بين مجموعة من النقاط المعلومة، مثلاً إذا كان لديك جدول بيانات محددة (مثل درجات الحرارة في ساعات معينة)، يتيح لك الاستيفاء استنتاج قيم درجة الحرارة في أوقات لم يتم قياسها فعلياً، وذلك عبر إيجاد دالة رياضية تمر بكل تلك النقاط بدقة.

ليكن لدينا الجدول التالي الذي يمثل تابعاً ما عند نقاط محددة x_i بالشكل:

x	x_0	x_1	...	x_i	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_i)$	...	$f(x_n)$

بالاعتماد على هذا الجدول سوف نقوم بتقريب التابع $f(x)$ بكثيرة الحدود $P_n(x)$ وذلك يعتمد على تطابق قيم التابع $f(x)$ وكثيرة الحدود $P_n(x)$ عند نقاط محددة $x_i ; i=0,1,2,...,n$ فنكتب: $f(x_i)=P_n(x_i)$.

إن عملية تعيين كثيرة الحدود $P_n(x)$ التي تمكننا من تعيين قيم التابع $f(x)$ عند نقاط واقعة بين النقاط $x_i ; i=0,1,...,n$ تسمى بالاستيفاء الداخلي وتسمى كثيرة الحدود $P_n(x)$ كثيرة حدود الاستيفاء، كما تسمى النقاط $x_i ; i=0,1,...,n$ بنقاط الاستكمال.

سنقوم بدراسة ثلاث طرق في الاستيفاء وهي:

1- طريقة نيوتن غريغوري الأمامية

2- طريقة لاغرانج

3- طريقة المربعات الصغرى.

جدول الفروقات الأمامية:

من أجل إيجاد كثيرة الحدود الملائمة للتابع $y=f(x)$ (1) أو بشكل أعم نقول كثيرة حدود الاستيفاء للتابع $y=f(x)$ (2) المعرف بالجدول التالي:

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_0	y_1	...	y_n

نفرض أن المسافة بين كل نقطتين متتاليتين ثابتة وتساوي h:

$$x_1-x_0=h,\quad x_2-x_1=h,\quad \dots,\quad x_n-x_{n-1}=h$$

نعرف المؤثر التفاضلي Δ بالصيغة التالية:

$$\Delta y_i=\Delta f(x_i)=f(x_{i+1})-f(x_i)=y_{i+1}-y_i$$

تسمى هذه الفروق بالفروق الأمامية الأولى للتابع $y=f(x)$ وقد تكون هذه الفروق موجبة أو سالبة.

بالاعتماد على الفروق الأمامية الأولى يمكن إيجاد الفروق الأمامية الثانية والثالثة والرابعة وما إلى ذلك بالشكل التالي:

$$\Delta^2 y_i=\Delta(\Delta y_i)=\Delta(y_{i+1}-y_i)=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i$$

$$=y_{i+2}-y_{i+1}-(y_{i+1}-y_i)=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i$$

فتصبح الفروقات الأمامية الثانية بالشكل:

$$\Delta^2 y_i=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i$$

نوجد الفروقات الأمامية الثالثة بالشكل:

$$\Delta^3 y_i=\Delta(\Delta^2 y_i)=\Delta(y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i)$$

$$=\Delta y_{i+2}-2\Delta y_{i+1}+\Delta y_i=y_{i+3}-y_{i+2}-2(y_{i+2}-y_{i+1})+(y_{i+1}-y_i)$$

$$=y_{i+3}-3y_{i+2}+3y_{i+1}-y_i$$

فتصبح الفروقات الأمامية الثالثة بالشكل:

$$\Delta^3 y_i=y_{i+3}-3y_{i+2}+3y_{i+1}-y_i$$

بأسلوب مشابه نجد أن:

$$\Delta^4 y_i=y_{i+4}-4y_{i+3}+6y_{i+2}-4y_{i+1}+y_i$$

وبشكل عام نكتب:

$$\Delta^n y_i = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y_{i+n-k}$$

نكتب جدول الفروقات الأمامية بالشكل التالي:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

ملاحظة: عادةً جداول الفروقات الأمامية تكون منتهية

مثال: أكتب جدول الفروق الأمامية للتابع $f(x) = \ln x$ حيث:

$x_0 = 0.30,\ x_1 = 0.40,\ x_2 = 0.50,\ x_3 = 0.60,\ x_4 = 0.70,$
$x_5 = 0.80,\ x_6 = 0.90$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0.30	-1.20397						
		0.28768					
0.40	-0.91629		-0.06454				
		0.22314		0.02373			
0.50	-0.69315		-0.04081		-0.01110		
		0.18233		0.01263		0.00603	
0.60	-0.15082		-0.02818		-0.00507		-0.00365
		0.15415		0.00756		0.00238	
0.70	-0.35667		-0.02062		-0.00269		
		0.13353		0.00487			
0.80	-0.22314		-0.01575				
		0.11778					
0.90	-0.10536						

طريقة نيوتن غريغوري الأمامية:

تعطى كثيرة حدود الاستيفاء للتابع $y=f(x)$ وفقاً لطريقة نيوتن بالعلاقة التالية:

$$P_n(\alpha) = y_0 + \alpha \Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3}\Delta^3 y_0 + \dots + \binom{\alpha}{n}\Delta^n y_0$$

حيث: $h = x_i - x_{i-1}$ ، $\alpha = \frac{x-x_0}{h}$

عند الحصول على كثيرة حدود الاستيفاء بطريقة نيوتن من الدرجة K يكون الخطأ المرتكب متعلق بالحد الذي يلي الحد K الذي توقفنا عنده في حساب $P_K(x)$ ويعطى بالعلاقة التالية:

$$E = \binom{\alpha}{K+1}\Delta^{K+1}y_0 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-K)}{(K+1)!}\Delta^{K+1}y_0$$

تمرين:

أوجد بطريقة نيوتن الأمامية الحدود الخاصة للتابع $y=f(x)$ المعرف بالجدول.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	16	81	256	625	1296

نكتب جدول الفروقات الأمامية للدالة $y=f(x)$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0	0	1	14	36	24	0	0
1	81	15	50	60	24	0	
2	16	65	110	84	24		
3	81	175	194	108			
4	256	369	302				
5	625	671					
6	1296						

Sudject

Year: Month: Date: NOTE BOOK

$$P_n(\alpha) = y_0 + \Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3}\Delta^3 y_0 + \binom{\alpha}{4}\Delta^4 y_0 + \binom{\alpha}{5}\Delta^5 y_0 + \binom{\alpha}{6}\Delta^6 y_0$$

حيث:

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0}{1} = x$$

$$P_6(x) = 0 + x(1) + \frac{x(x-1)}{2!}(14) + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}(36) + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}(24)$$

$$P_6(x) = x + 7(x^2 - x) + 6x(x^2 - 3x + 2) + (x^2 - x)(x^2 - 5x + 6)$$

بالإصلاح نجد $P_6(x) = x^4$

تمرين: لتكن لدينا الدالة $y = \cos x$ المقدر قيمها بالراديان وفق الجدول الآتي:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	0.98007	0.92106	0.82534	0.6967	0.54030

المطلوب:

١. أكتب جدول الفروق الأمامية للدالة المعطاة

٢. أوجد حدودية استيفاء نيوتن غريغوري من الدرجة الثالثة الموافقة لمعطيات الدالة y

٣. أوجد قيمة تقريبية للدالة y عند $x = 0.7$ ثم احسب الخطأ المرتكب:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.2	0.98007				
		-0.05901			
0.4	0.92106		-0.03671		
		-0.09572		0.00379	
0.6	0.82534		-0.03292		0.00137
		-0.12864		0.00516	
0.8	0.6967		-0.02776		
		-0.1564			
1	0.54030				

NOTE BOOK

Sudject

Year: Month: Date: NOTE BOOK

$x_0 = 0.2$, $h = x_1 - x_0 = 0.2$

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0.2}{0.2} = 5x - 1$$

$$P_3(\alpha) = y_0 + \alpha \Delta y_0 + \binom{\alpha}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3} \Delta^3 y_0$$

$$P_3(\alpha) = y_0 + \alpha \Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \Delta^3 y_0$$

$$P_3(x) = 0.98007 + (5x-1)(-0.05901) + \frac{(5x-1)(5x-2)}{2}(-0.03671)$$

$$+ \frac{(5x-1)(5x-2)(5x-3)}{6}(0.00379)$$

~~$P_3(x) = 0.98007 + (5x-1)(-0.05901) +$~~

بالإصلاح نجد:

$$P_3(x) = 0.985798 + 0.01498x - 0.55363x^2 + 0.07896x^3$$

$$P_3(0.7) = 0.764871$$

والخطأ المرتكب هو:

$$E = \binom{\alpha}{4} \Delta^4 y_0 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} \Delta^4 y_0$$

$$\alpha = 5x - 1 = 5(0.7) - 1 = 2.5$$

$$E = \binom{2.5}{4} \Delta^4 y_0 = \left| \frac{2.5(1.5)(0.5)(-0.5)}{4!}(0.00137) \right| = 0.000053$$

وهي قيمة الخطأ المرتكب.

Sudject

Year: Month: Date: NOTE BOOK

ملاحظة مهمة:

لو طلب منا تقدير قيمة تقريبية عند $x = 0.7$ بالاعتماد على جدول الفروق الأمامية فقط أي من دون إيجاد حدودية الاستيفاء الملائمة فإننا نوجدها بالشكل الآتي:

عندما $x = 0.7$ فإن $\alpha = 5x - 1 = 5 \times 0.7 - 1 = 2.5$

$$P_3(\alpha) = y_0 + \alpha \Delta y_0 + \binom{\alpha}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3} \Delta^3 y_0$$

$$f(0.7) \simeq P_3(2.5) = 0.98007 + \binom{2.5}{1}(-0.05901) + \binom{2.5}{2}(-0.03671) + \binom{2.5}{3}(0.00379)$$

$$f(0.7) \simeq P_3(2.5) = 0.764898$$

انتهت