كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي4

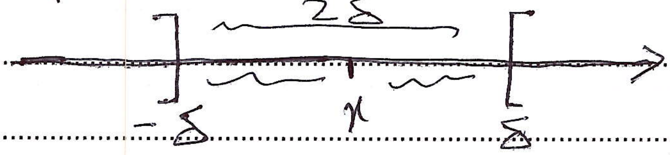
المحاضرة : الثانية/نظري/

الجوار المستطيلي:

لتكن $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ و $\delta_i>0$ من أجل $i=1,2,\ldots,n$
نرمز للجوار المستطيلي للنقطة x في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ذي n بعداً بالرمز $P=(x,\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ حيث:

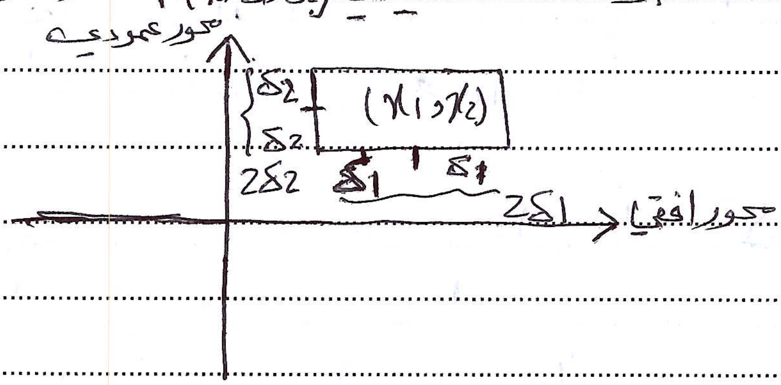
$$P(x,\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)=\{y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n;\ |x_i-y_i|<\delta_i;\ i=1,2,\ldots,n\}$$

عندما $n=1$ عندئذٍ فإنه الجوار المستطيلي للنقطة x هو $P(x,\delta)$ وهو عبارة عن مجال مفتوح مركزه النقطة x ونصف قطره δ وطوله 2δ أي بالشكل:



$$P(x,\delta)=\{y\in\mathbb{R};\ |x-y|<\delta\}$$

عندما $n=2$ فإنه الجوار المستطيلي $P(x,\delta_1,\delta_2)$ وهو مستطيل أبعاده هي



أي أنه أبعاده هي $2\delta_1$ و $2\delta_2$ وتكون موازية

للمحاور الاحداثية حيث:

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_2$, $y = (y_1, y_2) \in P(x_1, \delta_1)$

$|x_1 - y_1| < \delta_1$

$|x_2 - y_2| < \delta_2$

وهكذا.

عندما $n=3$ عندئذٍ فإنّ الجوار المستطيلي هو $P(x, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ وندعوه متوازي سطوح بثلاثة ابعاد حيث $2\delta_1, 2\delta_2, 2\delta_3$ ومركزه هو $x=(x_1, x_2, x_3)$ ويكون لدينا:

$|x_1 - y_1| < \delta_1$

$|x_2 - y_2| < \delta_2$

$|x_3 - y_3| < \delta_3$

وهكذا.

ملاحظة هامة: ندعو الجوار المستطيلي للنقطة x في الفضاء $\mathbb{R}^n$ بمتوازي السطوح ذو n بُعداً.

ملاحظة:

عندما $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n$ نحصل على مكعب ذو n بعداً ونرمز له بالرمز $P(x, \delta)$

تعريف: نقول عن المجموعة الجزئية A في الفضاء $\mathbb{R}^n$ أنّها مجموعة محدودة في $\mathbb{R}^n$ إذا كان بالأمكان

إيجاد كرة مفتوحة أو جوار مستطيلي بحيث تكون جميع نقط المجموعة A محتواة بهذا الجوار الكروي أو الجوار المستطيلي أي:

$\exists N(a,\varepsilon) ; A \subset N(a,\varepsilon)$

أو $\exists P(a,\delta_1,\dots,\delta_n) ; A \subset P(a,\delta_1,\dots,\delta_n)$

(C): هذه الإشارة تعني محتواة.

ملاحظة: أي مجموعة جزئية A في الفضاء $\mathbb{R}^n$ تحوي كرة مفتوحة مركزها النقطة x ونصف قطرها ε حيث $x \in A$ ندعوها جوار كروي للنقطة x.

المتتاليات في $\mathbb{R}^n$:

تعريف: ندعو كل تطبيق $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ والمعرف وفق العلاقة:

$1 \xrightarrow{f} f(1) = U^{(1)} = (U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, \dots, U_n^{(1)}) \in \mathbb{R}^n$

$2 \xrightarrow{f} f(2) = U^{(2)} = (U_1^{(2)}, U_2^{(2)}, \dots, U_n^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$

$\vdots$

$n \xrightarrow{f} f(n) = (U_1^{(n)}, \dots, U_n^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$

متتالية عددية في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ونرمز لها بالرمز $(U^{(n)})_{n\geq 1}$ أو $(U^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ أو $(U^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ وحدودها هي $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(n)}$ حيث $U^{(1)}$ حدها الأول و $U^{(n)}$ حدها العام.

تعريف نهاية متتالية: ندعو النقطة $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ نهاية للمتتالية $(U^{(n)})_{n\geq 1}$ من نقط الفضاء $\mathbb{R}^n$ إذا تحقق

الشرط التالي:

أولاً:

في حالة الجوار الكروية:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; \forall m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow d(U^{(m)}, a) < \varepsilon$

وبلغة الجوارات نكتب:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; \forall m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow U^{(m)} \in N(a, \varepsilon) ;$

$m = 1, 2, \ldots$

ثانياً: في حالة الجوار المستطيلي يصبح الشرط السابق بالشكل:

~~$\forall P(a, \delta_1, \ldots, \delta_n) \ \exists N_0 \in \mathbb{N} ; \forall m \geq N_0$~~

~~الملاحظة~~

$\forall P(a, \delta_1, \ldots, \delta_n) \ \exists N_0 \in \mathbb{N} ; \forall m \geq N_0$

$\Rightarrow |U_1^{(m)} - a_1| < \delta_1$

$|U_2^{(m)} - a_2| < \delta_2$

$\vdots$

$|U_n^{(n)} - a_n| < \delta_n$

وبلغة الجوارات يصبح الشرط السابق هو:

$\forall P(a, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \ \exists N_0 \in \mathbb{N} ; \forall m \geq N_0 \Rightarrow$

$U^{(n)} \in P(a, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) ; n = 1, 2, \ldots$

إذا تحقق الشرط السابق بجميع أشكاله نقول أنه a نهاية للمتتالية $(U^{(n)})$ في $\mathbb{R}^n$ ونكتب في هذه الحالة $\lim_{n \to \infty} U^{(n)} = a$ وخلاف ذلك نقول أنه هذه المتتالية متباعدة في $\mathbb{R}^n$

ملاحظة هامة:

① $(U^{(n)})_{n\geq 1} = (U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)})_{n\geq 1}$ في IR^n وهي مؤلفة من n متتالية عددية حقيقية.

② عندما نعطي n قيمة أي نحددها مثلاً 2 أو 3 أو 4 أي نأخذ الفضاء لـ IR^2 أو IR^3 أو IR^4 عندئذٍ لا يوجد التباس بين n و m وعندئذٍ يمكن أن نرمز للمتتالية السابقة بالرمز $(U^{(n)})_{n\geq 1}$ في الفضاء IR^2 أو IR^3 أو IR^4 ...

مثال:

إن المتتالية التي حدها العام هو:

$$U^{(n)} = (U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, U_3^{(n)}) = \left((1+\frac{1}{n})^n, n^2, \frac{2n+1}{3n+1} \right)$$

متتالية من نقط الفضاء الاقليدي IR^3 حيث

$$U_1^{(n)} = (1+\frac{1}{n})^n, \quad U_2^{(n)} = n^2, \quad U_3^{(n)} = \frac{2n+1}{3n+1}$$

أيضاً:

المتتالية $(U^{(n)})_{n\geq 1} = (U_1^{(n)}, U_2^{(n)})_{n\geq 1}$

$$= (e^{-n}, \frac{1}{n})_{n\geq 1}$$

متتالية من نقط الفضاء لـ IR^3

بوضع النتائج والملاحظات من تعريف نهاية متتالية أن $\lim_{m\to\infty} U^{(m)} = a$ في IR^n $\Leftrightarrow$ تحقق الشرط السابق بحالة أولاً وثانياً أي بمعنى أنّ a هي نهاية.

للمتتالية $(U^{(m)})_{m\geq 1}$ في الفضاء $\mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا
تحقق الشرط في حالتي أولاً وثانياً

2"- إذا تحقق الشرط (نهاية متتالية) في حالتي أولاً وثانياً في الفضاء $\mathbb{R}^n$ يعني أنه جميع حدود المتتالية $(U^{(m)})_{m\geq 1}$ تقع ضمن جوار كروي أو مستطيلي في $\mathbb{R}^n$ مركزه نهاية هذه المتتالية وهي a حيث $a\in\mathbb{R}^n$ باستثناء عدد محدود من حدود هذه المتتالية أي

$$\lim_{m\to\infty} U^{(m)} = a \text{ في } \mathbb{R}^m \iff U^{(m)} \in N(a,\varepsilon),\ m=1,2,\dots \text{ في } \mathbb{R}^m$$

أو

$$U^{(m)} \in P(a, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n),\ m=1,2,\dots \text{ في } \mathbb{R}^m$$

3"-

$$\lim_{n\to\infty} d(U^{(m)}, a) = 0 \iff \lim_{m\to\infty} U^{(m)} = a$$

ملاحظة هامة:

في التطبيقات العملية عند اثبات أنه a هي نهاية للمتتالية $(U^{(m)})_{m\geq 1}$ في $\mathbb{R}^n$ فإنه الاعتماد على تعريف نهاية متتالية يكون في بعض الحالات من الصعب تطبيقه لذلك نستخدم احياناً في التطبيقات العملية ~~التي~~ النتيجة 3 وهي

$$d(U^{(m)}, a) \xrightarrow[m\to 0]{} 0 \iff U^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} a$$

مثال: إنه المتتالية

$$(U^{(m)})_{m\geq 1} = \left(\left(\frac{1}{m+1},\ \left(1+\frac{1}{m}\right)^m,\ e^{-m}\right)\right)_{m\geq 1}$$

من نقط الفضاء $\mathbb{R}^3$ متقاربة من النقطة

$a = (a_1, a_2, a_3)$ ⟸ $a(a_1, a_2, a_3) = (0, e, 0) \in IR^3$

لأنّه:

$d(U^{(m)}, a) = d\left(\left(\frac{1}{m+1}\right), \left(1+\frac{1}{m}\right)^m, e^{-m}\right) \Rightarrow (0, e, 0)$

⟸ a

$= \sqrt{\left(\frac{1}{m+1} - 0\right)^2 + \left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m - e\right)^2 + \left(e^{-m} - 0\right)^2} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

نظرية هامة:

لتكن $(U^{(m)})_{m \geq 1} = ((U_1^{(m)}, U_2^{(m)}, \dots, U_n^{(m)}))_{m \geq 1}$

و $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ نقطة في الفضاء IR^n، إنّه

الشرط اللازم والكافي حتى تكون المتتالية $(U^{(m)})_{m \geq 1}$

متقاربة نحو النقطة a في الفضاء IR^n هو أن

يكون

$\lim_{m \to \infty} U_i^{(m)} = a_i ; i = 1, 2, \dots, n$ في IR.

أي أنّه: $\lim_{m \to \infty} U^{(m)} = a$ في IR^n ⟺

$\lim U_i^m = a_i ; i = 1, 2, \dots, n$ في IR.

وبناءاً على النظرية السابقة فإنّه جميع الخواص

والمبرهنات التي تكون صحيحة من أجل المتتاليات

العددية في IR تكون صحيحة من أجل المتتاليات

في IR^n نذكر منها.

أ: كل متتالية متقاربة في IR^n لها نهاية وحيدة

ب: كل متتالية متقاربة في IR^n محدودة.

3ً- كل متتالية جزئية متقاربة في $\mathbb{R}^n$ تكون متقاربة لنفس النقطة.

4ً- نظرية بولزانو فايرشتراس:

من كل متتالية محدودة في $\mathbb{R}^n$ يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة في $\mathbb{R}^n$.

- الفضاءات المنظمة والاقليدية والمترية والعلاقة بينها.

تعريف الفضاء الخطي (الفضاء الشعاعي - المتجهي):

إذا كانت V مجموعة ما غير خالية و F حقل تبديلي

~~أي~~ إذا كانت V مزودة بالعمليتين الجبريتين الاولى ~~داخلية~~ داخلية وهي عملية (+) عملية الجمع والمعرفة بالشكل

$\forall x,y \in V: x+y = z \in V$

والثانية خارجية وهي عملية الضرب ومجموعة مؤثراتها من الحقل F وهي معرفة بالشكل $\forall \alpha \in F \ \& \ \forall x \in V: \alpha x \in V$

عندئذ ندعو الثلاثية $(V,+,\cdot)$ او اختصاراً V فضاء خطياً أو فضاء شعاعي فوق الحقل F إذا تحققت الشروط التالية:

أولاً

$(V,+)$ زمرة تبديلية أي أنه V تحقق الشروط التالية

أً- $V \neq \phi$

2ً- (+) مغلقة على عناصر V أي:

$\forall x,y \in V \Rightarrow x+y \in V$

3ً- (+) تجميعية على عناصر V أي أنه

$\forall x,y,z \in V : (x+y)+z = x+(y+z)$

4) يوجد عنصر حيادي في V بالنسبة لـ $(+)$ هو الصفر يحقق $0 \in V$ ومن جهة أخرى فإنه صفر يحقق

$\forall x \in V : x+0=x$ و $0+x=x$.

5) يوجد لكل عنصر x من V نظير بالنسبة لـ $(+)$ هو $(-x)$ هو عنصر منه V يحقق

$x+(-x)=0$

$(-x)+(x)=0.$

6) $(+)$ تبديلية على عناصر V أي أنه:

$\forall x,y \in V : x+y=y+x$

ثانياً: إن العملية $(\cdot)$ تحقق الشروط التالية

1). $1_F \cdot x = x ; \forall x \in V$

حيث 1_F هو واحدة الضرب في الحقل F بالنسبة للعملية المعرفة على F

2). $\forall \alpha \in F$ & $\forall x,y \in V$:

$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y.$

3). $\forall \alpha,\beta \in F$ & $\forall x \in V \Rightarrow (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x.$

4). $\forall \alpha,\beta \in F$ & $\forall x \in V \Rightarrow \alpha(\beta . x) = (\alpha\beta).x$

- ندعو عناصر الفضاء الشعاعي V أشعة أو متجهات

وندعو الصفر الحيادي في V بالنسبة لعملية الجمع $(+)$ بصفر الفضاء الشعاعي.

ملاحظة: إذا كان V فضاء شعاعي فوق الحقل F عندئذٍ لدينا ما يأتي:

a) إذا كانت $F = IR$ عندئذٍ ندعو V فضاء شعاعي حقيقي

b) إذا كانت $F = C$ عندئذٍ ندعو V فضاء شعاعي عقدي

مثال:

الفضاء الحقيقي IR هو فضاء شعاعي فوق الحقل IR (فوق نفسه) بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديات

IR^n فضاء شعاعي فوق الحقل IR إذاً IR^n هو فضاء شعاعي حقيقي بالنسبة للعمليات:

الأولى (+): $\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$

الثانية (.): $\forall \alpha \in IR \ \& \ \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in IR^n$

$\alpha . x = \alpha (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

يبرهن بالعملي.

انتهت المحاضرة