



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي 2

المحاضرة : الثالثة / عملي /

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z Facebook Group :

كلية العلوم

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

2026

2



المحاضرة الثالثة (عملي)

السؤال الأول: أنجز التكامل التالي

$$I = \int e^{\sqrt{x}} dx$$

الحل:

نضع $t = \sqrt{x}$ بالتالي $t^2 = x$ بالتالي $2t dt = dx$

$$I = \int e^{\sqrt{x}} dx = \int 2te^t dt$$

نكامل بالتجزئة

$$u = 2t, \quad du = 2dt$$

$$dv = e^t dt, \quad v = e^t$$

$$I = \int 2te^t dt = 2te^t - \int 2e^t dt = 2te^t - 2e^t + c = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$$

السؤال الثاني: أنجز التكاملين التاليين:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}, \quad \int \frac{dx}{3x^2 - x + 1}$$

الحل:

التكامل الأول

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$$

نضع

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$$

نلاحظ بأن $a^2 = 9$ نجد

$$I_2 = I_{1+1} = \frac{1}{2 \times 9 \times 1} \left[\frac{x}{(x^2 + 9)^1} + (2 \times 1 - 1)I_1 \right]$$

$$I_2 = \frac{1}{18} \left[\frac{x}{x^2 + 9} + I_1 \right]$$

لنوجد I_1 :

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c_1$$

نعوض بشكل تراجمي نجد

$$I_2 = \frac{x}{18(x^2 + 9)} + \frac{1}{54} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

التكامل الثاني

$$\int \frac{dx}{3x^2 - x + 1}$$

نلاحظ بأن $a = 3, b = -1, c = 1$

$$\Delta = -11 < 0$$

$$3x^2 - x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{3}\right) = 3\left(\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}\right)$$

$$I = \int \frac{dx}{3x^2 - x + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}}$$

نفرض $x - \frac{1}{6} = u$ بالتالي $dx = du$

$$I = \int \frac{dx}{3x^2 - x + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2 + \frac{11}{36}} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{11}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{11}{36}}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan\left(\frac{6u}{\sqrt{11}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan\left(\frac{6x - 1}{\sqrt{11}}\right) + c$$

السؤال الثالث: أنجز التكامل التالي:

$$I = \int \frac{x}{x^2 + 3x + 2} dx$$

الحل: نكتب I بالشكل:

$$\int \frac{x}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \frac{A(2x + 3)}{x^2 + 3x + 2} dx + \int \frac{B}{x^2 + 3x + 2} dx$$

نشتق الطرفين ثم نضرب بـ $x^2 + 3x + 2$ نجد

$$x = A(2x + 3) + B$$

بالمطابقه نجد $A = \frac{1}{2}$ و $B = -\frac{3}{2}$ بالتالي

$$I = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 3x + 2| - \frac{3}{2} I_1$$

حيث

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$$

لنوجد I_1

لنحلل الكسر التالي

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x + 2)(x + 1)}$$

إلى مجموع كسرين بالشكل:

$$\frac{1}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1} \dots (*)$$

■ إيجاد A : نضرب (*) بـ $(x + 2)$ ثم نعوض في العلاقة الناتجه $x = -2$ بالتالي نجد

$$A = -1$$

- إيجاد B : نضرب (*) بـ $(x + 1)$ ثم نعوض في العلاقة الناتجة $x = -1$ بالتالي نجد

$$B = 1$$

$$I_1 = -\ln|x + 2| + \ln|x + 1| + c_1 = \ln \left| \frac{x + 1}{x + 2} \right| + c_1$$

بالتالي

$$I = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 3x + 2| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x + 1}{x + 2} \right| + c$$

السؤال الرابع: أنجز التكامل التالي:

$$I = \int \frac{x + 3}{x^2 + 4x - 1} dx$$

الحل:

نكتب I بالشكل:

$$\int \frac{x + 3}{x^2 + 4x - 1} dx = \int \frac{A(2x + 4)}{x^2 + 4x - 1} dx + \int \frac{B}{x^2 + 4x - 1} dx$$

نشتق الطرفين ثم نضرب بـ $x^2 + 4x - 1$ نجد $x + 3 = A(2x + 4) + B$ بالمطابقه نجد $A = \frac{1}{2}$ و $B = 1$ بالتالي

$$I = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4x - 1| + I_1$$

حيث

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 4x - 1}$$

لنوجد I_1

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 4x - 1} = \int \frac{dx}{(x + 2 + \sqrt{5})(x + 2 - \sqrt{5})}$$

لنحلل الكسر التالي

$$\frac{1}{(x + 2 + \sqrt{5})(x + 2 - \sqrt{5})}$$

إلى مجموع كسريين بالشكل:

$$\frac{1}{(x + 2 + \sqrt{5})(x + 2 - \sqrt{5})} = \frac{A}{x + 2 + \sqrt{5}} + \frac{B}{x + 2 - \sqrt{5}} \dots (*)$$

- إيجاد A : نضرب (*) بـ $(x + 2 + \sqrt{5})$ ثم نعوض في العلاقة الناتجة $x = -2 - \sqrt{5}$ بالتالي نجد

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

- إيجاد B : نضرب (*) بـ $(x + 2 - \sqrt{5})$ ثم نعوض في العلاقة الناتجة $x = -2 + \sqrt{5}$ بالتالي نجد

$$B = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln|x + 2 + \sqrt{5}| + \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln|x + 2 - \sqrt{5}| + c_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x + 2 - \sqrt{5}}{x + 2 + \sqrt{5}} \right| + c_1$$

$$I = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4x - 1| + \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x + 2 - \sqrt{5}}{x + 2 + \sqrt{5}} \right| + c$$