



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي 2

المحاضرة : الخامسة / نظري /

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z Facebook Group :

كلية العلوم

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

2026

5



المحاضرة الخامسة (نظري)

المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:

- ❖ دراسة أنماط من التكاملات الكسرية.
- ❖ العديد من الأمثلة المتعلقة بهذه التكاملات.

دراسة التكامل من الشكل $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

❖ لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود، عندئذ إذا كانت درجة كثيرة الحدود في البسط

أكبر أو تساوي درجة كثيرة الحدود في المقام فإننا نقسم البسط على المقام أي نجري القسمة الإقليدية لنجد:

$$P(x) = H(x) \times Q(x) + S(x)$$

حيث

- $H(x)$ يمثل ناتج القسمة وهو كثير حدود
- $S(x)$ (باقي القسمة) وهو كثير حدود درجته أصغر تماماً من درجة $Q(x)$ (المقسوم عليه)

بالتالي

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

عندئذ

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int H(x) dx + \int \frac{S(x)}{Q(x)} dx$$

$\int H(x) dx$ يُنجز بسهولة

التكامل $\int \frac{S(x)}{Q(x)} dx$ إما أن يُنجز بسهولة أو يتطلب تفريق (تحليل) $\frac{S(x)}{Q(x)}$ إلى مجموع كسور جزئية بسيطه

مثال 1: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x^5}{x^2 + 1} dx$$

الحل:

نلاحظ بأن درجة كثيرة الحدود في البسط أكبر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام لذلك نجري القسمة الإقليدية:

$$x^5 = (x^3 - x)(x^2 + 1) + x$$

بالتالي:

$$\frac{x^5}{x^2 + 1} = x^3 - x + \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$I = \int \left(x^3 - x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \int (x^3 - x) dx + \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

تفريق الكسور:

لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود، و درجة كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من

درجة كثيرة الحدود في المقام، بالتالي يمكن كتابة الدالة الكسرية $R(x)$ على شكل مجموع منته من الدوال الكسرية البسيطة

و بالتالي فإن $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ يؤول إلى إيجاد تكاملات لكسور بسيطة.

نميز الحالات الآتية:

الحالة الأولى: لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود، و درجة كثيرة الحدود في البسط

أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام عندئذ إذا كانت:

$Q(x)$ تتحلل إلى جداء عوامل جميعها من الدرجة الأولى و غير مكررة.

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \text{ : أي}$$

عندئذٍ

$$\frac{P(x)}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

حيث A_1, A_2, \dots, A_n ثوابت عددية تُعيّن بطريقتين:

إما بتوحيد المقامات ثم نضرب بالمقام المشترك ثم المطابقة بين طرفي المساواة

أو نتبع الطريقة الآتية: لتعيين A_k نضرب الطرفين بالمقدار $(x - a_k)$ ثم نعوض $x = a_k$ في العلاقة الناتجة.

مثال 2: أنجز التكامل التالي

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 1)(2 - x)} dx$$

الحل: نلاحظ بأن درجة كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام، بالتالي نفرق الكسر إلى

مجموع كسور جزئية بالشكل التالي

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 1)(2 - x)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{A_3}{2 - x} \dots (*)$$

• لتعيين A_1 : نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(x - 1)$ نجد

$$\frac{x^2 + 1}{(x + 1)(2 - x)} = A_1 + \frac{A_2(x - 1)}{x + 1} + \frac{A_3(x - 1)}{2 - x}$$

نعوض $x = 1$ في العلاقة الناتجة نجد:

$$\frac{1^2 + 1}{(1 + 1)(2 - 1)} = A_1 + 0 + 0 \Rightarrow A_1 = 1$$

• لتعيين A_2 : نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(x + 1)$ ثم نعوض $x = -1$ في العلاقة الناتجة

$$\text{نجد: } A_2 = -\frac{1}{3}$$

• لتعيين A_3 : نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(2 - x)$ ثم نعوض $x = 2$ في العلاقة الناتجة

$$\text{نجد: } A_3 = \frac{5}{3}$$

ومنه:

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 1)(2 - x)} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \frac{1}{x + 1} + \frac{5}{3} \frac{1}{2 - x}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x + 1)(2 - x)} dx &= \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 1} + \frac{5}{3} \int \frac{dx}{2 - x} \\ &= \ln|x - 1| - \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{5}{3} \ln|2 - x| + c \end{aligned}$$

مثال 3: أنجز التكامل التالي

$$\int \frac{7x - 5}{x^3 + x^2 - 6x} dx$$

الحل: لدينا $x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x(x - 2)(x + 3)$

$$\frac{7x - 5}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{7x - 5}{x(x - 2)(x + 3)}$$

$$\frac{7x - 5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3} \dots (*)$$

• لتعيين A_1 : نضرب طرفي العلاقة (*) بـ x نجد

$$\frac{7x - 5}{(x-2)(x+3)} = A_1 + \frac{x A_2}{x-2} + \frac{x A_3}{x+3}$$

و نجعل $x = 0$ في العلاقة الناتجة نجد:

$$\frac{7(0) - 5}{(0-2)(0+3)} = A_1 + 0 + 0 \Rightarrow A_1 = \frac{5}{6}$$

• لتعيين A_2 : نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(x-2)$ و نجعل $x = 2$ في العلاقة الناتجة

$$\text{نجد: } A_2 = \frac{9}{10}$$

• لتعيين A_3 : نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(x+3)$ و نجعل $x = -3$ في العلاقة الناتجة نجد

$$A_3 = -\frac{26}{15} \text{ و منه:}$$

$$\frac{7x - 5}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{7x - 5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \frac{1}{x-2} - \frac{26}{15} \frac{1}{x+3}$$

و بالتالي:

$$\int \frac{7x - 5}{x^3 + x^2 - 6x} dx = \frac{5}{6} \int \frac{dx}{x} + \frac{9}{10} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{26}{15} \int \frac{dx}{x+3}$$

$$\int \frac{7x - 5}{x^3 + x^2 - 6x} dx = \frac{5}{6} \ln|x| + \frac{9}{10} \ln|x-2| - \frac{26}{15} \ln|x+3| + c$$

الحالة الثانية: لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود، و درجة كثيرة الحدود في البسط

أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام عندئذ إذا كانت:

$Q(x)$ تتحلل بالشكل $Q(x) = (x-a)^k$ أي $(x-a)$ مكرر k مره حيث k عدد طبيعي، عندئذ

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_3}{(x-a)^{k-2}} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^1}$$

حيث $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ ثوابت عددية يجب تعيينها.

مثال 4: أنجز التكامل التالي

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx$$

الحل:

$$\frac{x^2}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{(x+1)^3} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)} \dots (*)$$

• لتعيين A_1 : نضرب (*) بـ $(x+1)^3$

$$x^2 = A_1 + A_2(x+1) + A_3(x+1)^2$$

ثم نعوض $x = -1$ في العلاقة الناتجة نجد:

$$A_1 = 1$$

• نضرب طرفي العلاقة (*) بـ x ثم نجعل $x \rightarrow +\infty$ نجد

$$A_3 = 1$$

• نعوض $x = 0$ في طرفي العلاقة (*) نجد

$$0 = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\text{بالتالي } A_2 = -2$$

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)} + \ln|x+1| + c$$

مثال 5: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx$$

الحل: لدينا

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x(x-1)^3$$

مقام الكسر $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$ فيه x من الدرجة الأولى و $(x-1)$ مكرر ثلاث مرات عندئذ

$$\frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)}$$

بتوحيد المقامات في الطرف الثاني ثم نضرب الطرفين بالمقام المشترك $x(x-1)^3$ نجد:

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2$$

بالإصلاح:

$$x^3 + 1 = (A+D)x^3 + (-3A+C-2D)x^2 + (3A+B-C+D)x - A$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$\begin{cases} A+D=1 \\ -3A+C-2D=0 \\ 3A+B-C+D=0 \\ -A=1 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد $A = -1, B = 2, C = 1, D = 2$ ومنه:

$$\frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx = -\int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2 \int \frac{dx}{x-1}$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx = -\ln|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2 \ln|x-1| + c$$

الحالة الثالثة: لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود، و درجة كثيرة الحدود في البسط

أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام عندئذ إذا كانت:

$Q(x) = (ax^2 + bx + c)^k$ حيث $k \geq 1$ عدد طبيعي و ثلاثي الحدود التربيعي $ax^2 + bx + c$ مميزه سالب

عندئذ الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يتحلل بالشكل التالي:

$$\frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^k} = \frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)^k} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^{k-1}} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^1}$$

لتعيين الثوابت العددية نضرب الطرفين بـ $(ax^2 + bx + c)^k$ ثم نقوم بعملية المطابقة.

كما توجد طرق أخرى لإيجاد الثوابت نوضحها من خلال بعض الأمثلة.

ملاحظة عامة: لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود، و درجة كثيرة الحدود في البسط

أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام عندئذ إذا كانت:

$$Q(x) = (x - \alpha)^m (ax^2 + bx + c)^r$$

علماً أنّ $ax^2 + bx + c$ كثير حدود تربيعي مميزه سالب عندئذ

$$\frac{P(x)}{(x - \alpha)^m (ax^2 + bx + c)^r} = \frac{A_1}{(x - \alpha)^m} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{(x - \alpha)} + \frac{B_1x + C_1}{(ax^2 + bx + c)^r} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^{r-1}} + \dots + \frac{B_rx + C_r}{(ax^2 + bx + c)}$$

مثال 6: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$$

الحل:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx + D}{x^2+1} \dots (*)$$

■ نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(x-1)^2$ ثم نجعل $x = 1$ نجد $A = 2$

■ نضرب طرفي العلاقة (*) بـ x ثم نجعل $x \rightarrow \infty$ بالتالي

$$0 = B + C \dots (1)$$

■ نعوض $x = 0$ في طرفي العلاقة (*) نجد

$$-1 = D - B \dots (2)$$

■ نعوض $x = -1$ في طرفي العلاقة (*) نجد

$$0 = -B - C + D + 1 \dots (3)$$

من (1) نجد $C = -B$ ومن (2) نجد $D = B - 1$

نعوض في (3) نجد: $B = 0$ و $C = 0$ و $D = -1$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$I = \int \left(\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = -\frac{2}{x-1} - \arctan(x) + c$$

مثال 7: أنجز التكامل التالي

$$\int \frac{7x^2 + 26x - 9}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9} dx$$

الحل:

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 = x^2(x^2 + 4x + 4) - 9 = x^2(x+2)^2 - (3)^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x^2 + 2x)^2 - (3)^2 = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$$

$$= (x^2 + 2x + 3)(x-1)(x+3)$$

$$\frac{7x^2 + 26x - 9}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3}$$

نضرب الطرفين بـ $(x^2 + 2x + 3)(x-1)(x+3)$

وبعد الإصلاح نحصل على:

$$7x^2 + 26x - 9 = (A + B + C)x^3 + (5A + B + 2C + D)x^2 + (9A + B - 3C + 2D)x + (9A - 3D - 3B)$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 5A + B + 2C + D = 7 \\ 9A + B - 3C + 2D = 26 \\ 9A - 3D - 3B = -9 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد أن

$$A = 1, B = 1, C = -2, D = 5$$

$$\begin{aligned} \int \frac{7x^2 + 26x - 9}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9} dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{-2x+5}{x^2+2x+3} dx \\ &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{2x+2-7}{x^2+2x+3} dx \\ &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx + \int \frac{7}{(x+1)^2+2} dx \\ &= \ln|x-1| + \ln|x+3| - \ln|x^2+2x+3| + \frac{7}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c \end{aligned}$$

مثال 8: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x^2 + x + 5}{(1+x)(x^2+4)} dx$$

الحل:

$$\frac{x^2 + x + 5}{(1+x)(x^2+4)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

نلاحظ بأن $A = 1$ و $B = 0$ و $C = 1$

$$I = \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^2+4} \right) dx = \ln|1+x| + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

❖ نقدم الآن العديد من الأمثلة من أجل ترسيخ المفاهيم السابقة

مثال 9: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x^4 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$$

الحل: بإجراء القسمة الإقليدية نجد

$$x^4 + 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + 2$$

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} &= x - 1 + \frac{2}{x^3 + x^2 + x + 1} \\ I &= \int \left(x - 1 + \frac{2}{x^3 + x^2 + x + 1} \right) dx = \int \left(x - 1 + \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} \right) dx \\ I &= \int (x-1) dx + \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} dx = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} dx \text{ و } I_1 = \int (x-1) dx \text{ حيث}$$

$$I_1 = \int (x-1) dx = \frac{x^2}{2} - x + c_1 \quad \blacksquare$$

$$I_2 = \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} dx \text{ لإيجاد التكامل } A, B, C \text{ نبحث عن الثوابت}$$

$$\frac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \dots (*)$$

إيجاد A

نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(x+1)$ ثم نضع $x = -1$ نجد $A = 1$

إيجاد B

نضرب طرفي العلاقة (*) بـ x ونجعل $x \rightarrow \infty$ نجد: $A + B = 0$ بالتالي $B = -1$

إيجاد C

نعوض $x = 0$ في (*) نجد $A + C = 2$ بالتالي $C = 1$

نلاحظ مما سبق بأن $A = 1$ و $B = -1$ و $C = 1$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1} \right) dx \\
 &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\
 &= \ln(|x+1|) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan x + c_2
 \end{aligned}$$

عندئذ

$$I = \frac{x^2}{2} - x + \ln(|x+1|) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan x + c$$

مثال 10: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x^5 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^3 + x} dx$$

الحل: بإجراء القسمة الإقليدية نجد $x^5 + x^3 + 2x^2 + 1 = x^2(x^3 + x) + (2x^2 + 1)$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left(x^2 + \frac{2x^2 + 1}{x^3 + x} \right) dx = \int \left(x^2 + \frac{2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} \right) dx \\
 \frac{2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

نلاحظ بأن $A = 1$ و $B = 1$ و $C = 0$

$$I = \int \left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

مثال 11: أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x}{x^4 - 16} dx$$

الحل: لدينا $\frac{x}{x^4 - 16} = \frac{x}{(x+2)(x-2)(x^2+4)}$ عندئذ

$$\frac{x}{(x+2)(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \dots (*)$$

- نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(x+2)$ ثم نجعل $x = -2$ نجد $A = \frac{1}{16}$
- نضرب طرفي العلاقة (*) بـ $(x-2)$ ثم نجعل $x = 2$ نجد $B = \frac{1}{16}$
- نضرب طرفي العلاقة (*) بـ x ثم نجعل $x \rightarrow \infty$ بالتالي $0 = A + B + C$ عندئذ $C = -\frac{2}{16}$
- نعوض $x = 0$ في (*) نجد $D = 0$

بالتالي

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x}{x^4 - 16} dx = \int \left(\frac{\frac{1}{16}}{x+2} + \frac{\frac{1}{16}}{x-2} - \frac{\frac{2}{16}x}{x^2+4} \right) dx \\
 &= \frac{1}{16} \ln|x+2| + \frac{1}{16} \ln|x-2| - \frac{1}{16} \ln(x^2+4) + c \\
 &= \frac{1}{16} \ln \left| \frac{(x+2)(x-2)}{x^2+4} \right| + c = \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x^2-4}{x^2+4} \right| + c
 \end{aligned}$$



مكتبة AZ to Z