كلية العلوم

القسم :**الكيمياء**

السنة : **الرابعة**

المادة : سطوح وحفز

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

جامعة طرطوس   مقرر السطوح والحفز
كلية العلوم   السنة الرابعة-المحاضرة الرابعة
قسم الكيمياء   د: مروة رباح

الفصل الثاني

السطوح البينية للسوائل

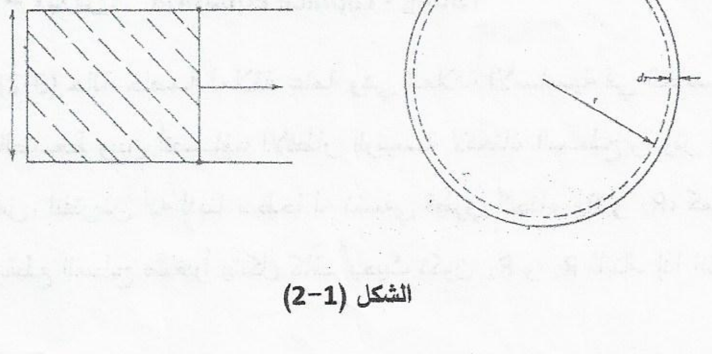
LIQUID INTERFACES

تتميز السطوح البينية للسوائل بأنها مُعرّفة تماماً وسهلة المعالجة. وتتركز دراسة هذه السطوح البينية حول قياس التوتر السطحي والذي بدوره يرتبط مع دراسة خواص السطوح المنحنية للسوائل (curved surface)، وحيث إنّ السوائل مُتنقلة بصورة كبيرة، وأنّ الشعرية تهتم بالسطوح البينية المتنقلة بشكل كاف لتتخذ الوضع التوازني، كما عند تشكل الهلال والقُطيرات السائلة في الهواء أو في سائل آخر والغشاوات الرقيقة (thin films)، وحيث أنّ الشعرية تشغل حيزاً في الترموديناميك، إذ تتعامل مع السلوك العيناتي والإحصائي للسطوح البينية أكثر من تعاملها مع البنية الجزيئية، لذا سنهتم أولاً بالشعرية ومن ثم بالطرائق المستخدمة لقياس التوتر السطحي. وسنعالج الانتشار والالتصاق في الجمل المكونة من سائلين لا يمتزجان.

2-1: التوتر السطحي والطاقة الحرة السطحية:

يُعدّ التوتر السطحي بأنّه قوة على واحدة الطول، كما يساوي تماماً الطاقة الحرة من أجل واحدة المساحة. لتوضيح ذلك لنأخذ المثالين التاليين:

إذا أخذنا غشاوة صابون موجودة على إطار سلكي بحيث يكون أحد أطرافه قابلاً للحركة، كما في الشكل (2-1). نلاحظ تجريبياً أنّ هناك قوة تعمل على الطرف القابل للحركة باتجاه معاكس للقوة المطبقة. فإذا كانت القوة من أجل واحدة الأطوال هي γ فإنّ العمل اللازم لتحريك الطرف الحر مسافة قدرها dx هو:



الشكل (1-2)

(قوة) $w = \gamma l dx$ (1-2)

ولكن $da = l dx$ ما هو إلا تغير مساحة الغشاوة، ويكون بالتالي:

(طاقة) $w = \gamma da$ (2-2)

تظهر γ في العلاقـــــة (2-2) على أنّها طاقة من أجل واحدة المســـاحة، وهذا يعني أنّ واحدة γ هي erg/cm^2 والتي تكون متكافئة الأبعاد مع dyne/cm، وفي الجملة الدولية تكون واحدة γ هي J/m^2 أو N/m.

- ليكن لدينا سـائل نقي (جملة وحيدة المكون) وهناك فقاعة بخار في حالة توازن مع السـائل، أو لنأخذ فقاعة صـابون، تتخذ الفقاعة الشـكل الكروي، الموافق للمسـاحة السـطحية الدنيا لحجم مغلق، في حال غياب أي حقل خارجي. وليكن نصـف قطرها r، كما في الشـكل (1-2)، تكون الطاقة الحرة السـطحية الكلية للفقاعة هي $4\pi r^2\gamma$، لاحظ أنّ γ يعبر عنها طاقة/واحدة المسـاحة، إذا تناقص r بالمقدار dr، فإنّ تغير طاقتها السـطحية يكون $8\pi r\gamma dr$ وذلك لأنّ المسـاحة تتغير بالمقدار: $da = 4\pi(r-dr)^2 - 4\pi r^2$ أي $-8\pi r dr$، وبما أنّ التقلص ينقص الطاقة السـطحية فإنّه حتى يتم ذلك يجب أن يتوازن مع العمل الناتج عن فرق الضـغط عبر الغشـاوة Δp، والذي يدعى **بالضـغط الداخلي الزائد**، ويكون العمل الناتج عن الضغط الداخلي الزائد هو:

$\Delta p \times$ مساحة الفقاعة $\times$ مسافة الانكماش$) = \Delta p 4\pi r^2 dr$

وعند التوازن يكون: $8\pi r\gamma dr = \Delta p 4\pi r^2 dr$ ومنه:

$$\Delta p = 2\gamma/r \qquad (3-2)$$

نسـتنتج من هذه العلاقة النتيجة الهامة التالية: **عندما تكون الفقاعة أصـغر فإنّ ضـغط الهواء داخلها يكون أعلى من الضـغط خارجها.** نلاحظ أيضـاً من هذه العلاقة أنّه **حتى يكون Δp موجباً فإنّ الضغط دوماً سيكون في الطرف المقعر للسطح البيني أكبر منه في الطرف المحدب.**

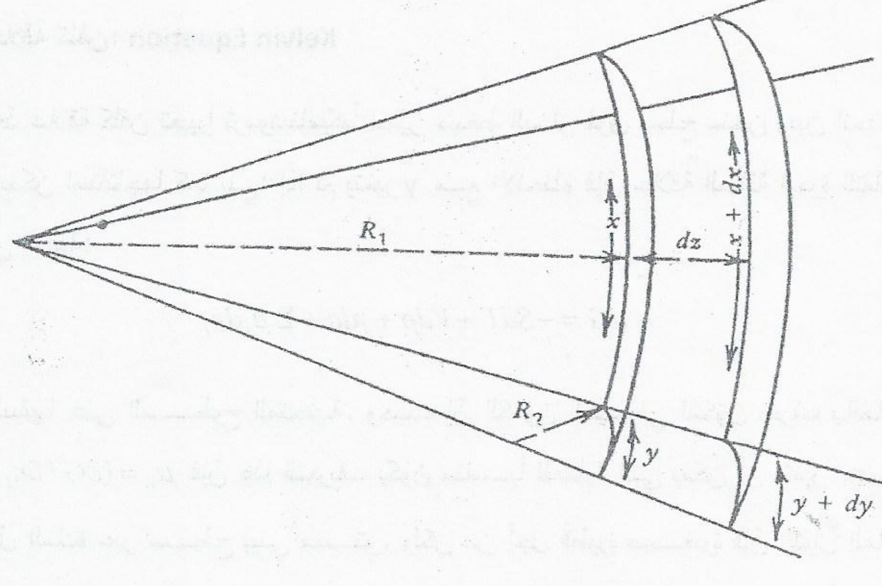
يتضح مما سبق أنّ السطوح المتوازنة يمكن أن تعالج رياضياً إما باستخدام نظرية التوتر السطحي أو نظرية الطاقة الحرة السطحية المكافئة رياضياً.

2-2: معادلة يانغ – لابلاس: Young - Laplace Equation

تُعدّ العلاقة (2-3) حالة خاصـة لعلاقة عامة وهي العلاقة الأسـاسـية في الخاصـة الشـعرية والتي تربط بين انخفاض الضـغط وبين أنصـاف الأقطار الرئيسـة لانحناء السـطح والتوتر السـطحي وتدعى بعلاقة يانغ – لابلاس. لنفترض أنه لدينا سطحاً له نصفي قطري انحناء R_1 و R_2، كما في الشكل (2-2)، وبحيث يكون مقطع السطح صغيراً بشكل كاف بحيث تكون R_1 و R_2 ثابتة. إذا انتقل السطح مسافة

صغيرة قدرها dz فإنّ هذا الانتقال سيزيد المساحة السطحية بالمقدار:

$$da = (x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx$$



الشكل (2–2) يمثل جزء من سطح منحني.

ويكون العمل المبذول لتشكيل هذه الزيادة من السطح هو:

$$w_1 = \gamma\,(xdy + ydx) \qquad (4\text{-}2)$$

وأما العمل الناتج عن فرق الضغط Δp عبر السطح، وهو يؤثر على المساحة xy عند انتقالها مسافة dz، فيساوي إلى:

$$w_2 = \Delta p\; xy\; dz \qquad (5\text{-}2)$$

ونجد من التشابه في الشكل (2–2) أنّ:

$$dy = \quad (x + dx)/x = (R_1 + dz)/R_1 \qquad dx = (x/R_1)dz \qquad \Rightarrow$$

وبالتعويض في العلاقة (4-2) $\quad (y + dy)/y = (R_2 + dz)/R_2 \quad \Rightarrow \quad (y/R_2)dz$

ينتج لدينا:

$$w_1 = \gamma\,[xy(dz/R_2) + yx(dz/R_1] = \gamma xy[(1/R_2) + (1/R_1)]\,dz \qquad (6\text{-}2)$$

إذا كان السطح في حالة توازن ميكانيكي فإنّ العمل المبذول لتوسيع السطح (w_1) يجب أن يساوي العمل المبذول من الجملة في التمدد تحت الضغط الزائد Δp، أي w_2، ويكون:

$$\Delta p\; xy\; dz = \gamma xy\,[(1/R_2) + (1/R_1)\,]\,dz \qquad (7\text{-}2)$$

وبالاختصار نحصل على ما يلي:

$$\mathbf{\Delta p = \gamma\,[(1/R_2) + (1/R_1)]} \qquad \mathbf{(8\text{-}2)}$$

تعرف العلاقة (2-8) بعلاقة **يانغ – لابلاس**، وهي العلاقة الأساسية في الشعرية. عندما يكون $R_1 = R_2$، كما هي الحال في الكرة، فإنّ العلاقة (2-8) تؤول إلى العلاقة (2-3)، أما من أجل السطوح المستوية فإنّ $R_1 = R_2 = \infty$ ومن ثم فإنّ $\Delta p = 0$ أي **ليس هناك فرق ضغط عبر السطح المستوي.**

2-3: علاقة كلفن: Kelvin Equation

تُعدّ علاقة كلفن تعبيراً ترموديناميكياً لتغيّر ضغط البخار فوق سطح منحن وبين انحنائية السطح (1/r). ويمكن استنتاجها كما يلي: إذا لم يتغير γ مع الانحناء فإنّ علاقة الطاقة الحرة التفاضلية لسطحٍ مستوٍ هي التالية:

$$dG = -SdT + Vdp + \gamma da + \sum_i \mu_i dn_i \qquad (9\text{-}2)$$

يمكن تطبيقها على السطوح المنحنية. وحيث إنّ الكمون الكيميائي لمُكوّن يعرف بالعلاقة التالية: $\mu_i = (\partial G / \partial n_i)_{T,p,n_j,a}$ فإنّ هذا التعريف يكون مناسباً للعملية التي يمكن أن يتغيّر n_i بثبات a، كما عند انتقال المادة عبر سطح بيني مستوٍ. ولكن من أجل قُطيرة صغيرة فإنّ انتقال المادة سيؤدي بالضرورة إلى تغيّر في المساحة، وهكذا فعند إضافة dn_i مول من المُكوّن i إلى القُطيرة فإنّ حجمها سيتغير بالمقدار dV:

$dV = \sum_i V_{m,i} dn_i$ حيث تمثل $V_{m,i}$ الحجم المولي الجزئي للمُكوّن i في السائل. وبما أنّ حجم القُطيرة التي نصف قطرها r هو $4\pi r^3/3$ فإنّ $dV = 4\pi r^2 dr$ ويكون تغيّر المساحة السطحية للقُطيرة هو $da = 8\pi r dr$، ومن ثم يكون لدينا:

$$da = \frac{2dV}{r} = \sum_i \frac{2V_{m,i}}{r} dn_i \qquad (10\text{-}2)$$

وبالتعويض في العلاقة (2-9) ينتج لدينا:

$$dG = -SdT + Vdp + \gamma \sum_i (2V_{m,i}/r) dn_i + \sum_i \mu_i dn_i \Rightarrow$$

$$dG = -SdT + Vdp + \sum_i [\gamma(2V_{m,i}/r) + \mu_i] dn_i \qquad (11\text{-}2)$$

نلاحظ من هذه العلاقة أنّ الكمون الكيميائي للمُكوّن i في القُطيرة، $\bar{\mu}$، هو:

$$\bar{\mu} = (\partial G / \partial n_i)_{T,p,n_j} = \frac{2V_{m,i}\gamma}{r} + \mu_i \qquad \bar{\mu} - \mu = \frac{2V_{m,i}\gamma}{r} \Rightarrow \qquad (12\text{-}2)$$

ولكن $\mu_i = \mu_i^o + RT\ln p_i^o$ ، حيث تمثل p_i^o ضغط بخار المُكوّن i فوق السطح المستوي، وأيضاً $\bar{\mu} = \mu_i^o + RT\ln p_i$ ، حيث تمثل p_i ضغط بخار المُكوّن i فوق السطح المنحني. وبالتعويض في العلاقة (2-12) نحصل على ما يلي:

$$\ln\frac{p_i}{p_i^o} = \frac{2V_{m,i}\gamma}{rRT} \tag{13-2}$$

ويكون من أجل جملة وحيدة المُكوّن ما يلي:

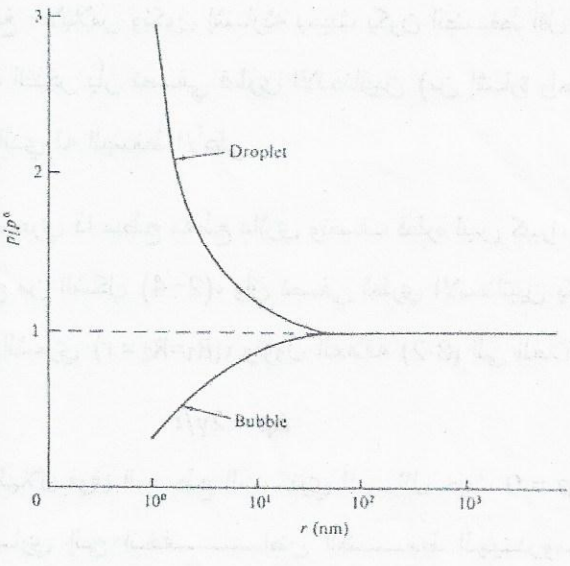
$$\ln\frac{p}{p^o} = \frac{2V_m\gamma}{rRT} \tag{14-2}$$

في القطرات (+)

حيث تمثل V_m الحجم المولي للسائل. تمثل العلاقة (2-14) أحد أشكال **علاقة كلفن**. بينما من أجل فقاعة بخار في سائل فإنّ نصف قطر الانحناء يأخذ إشارة معاكسة وبالتالي يكون لدينا ما يلي:

$$\ln\frac{p}{p^o} = -\frac{2V_m\gamma}{rRT} \tag{15-2}$$

في الفقاعات (-)



الشكل (2-3) يُبيّن تأثير الانحناء على ضغط بخار الماء (γ مستقلة عن الانحناء).

يُبيّن الشكل (2-3) تأثير الانحناء على ضغط بخار الماء من أجل الهلال المحدب (القُطيرة) ومن أجل الهلال المقعر (الفقاعة). يلاحظ من هذا الشكل أنّ الانحناء (1/r) له تأثير ضعيف على ضغط البخار حتى نصف القطر ~10 nm، ويجب التذكير هنا بأنّ علاقة كلفن هي علاقة ترموديناميكية والتي لا يمكن أن تتحقق في الجمل ذات الأبعاد الجزيئية.

مثال: إذا علمت أنّ الحجم المولي للماء عند الدرجة 20^oC يبلغ $18.05x10^{-6}\ m^3/mol$ وأن توتره السطحي يساوي $72.88\ mN/m$. فأوجد الضغط النسبي p/p^o عندما يساوي نصف قطر قطيرة الماء $10^{-6}\ cm$.

الحل: نطبق علاقة كلفن، العلاقة (14-2)، حيث $r = 10^{-6}\ cm = 10^{-8}\ m$ و$T=293.15K$ و$\gamma = 72.88x10^{-3}\ N/m$، نحصل على ما يلي:

$$\ln\frac{p}{p^o} = \frac{2x72.88x10^{-3}x18.05x10^{-6}}{8.314x293.15x10^{-8}} = 0.107948$$

$$p/p^o = e^{0.107948} = 1.114$$

2-4: معالجة الارتفاع الشعري: The treatment of capillary rise

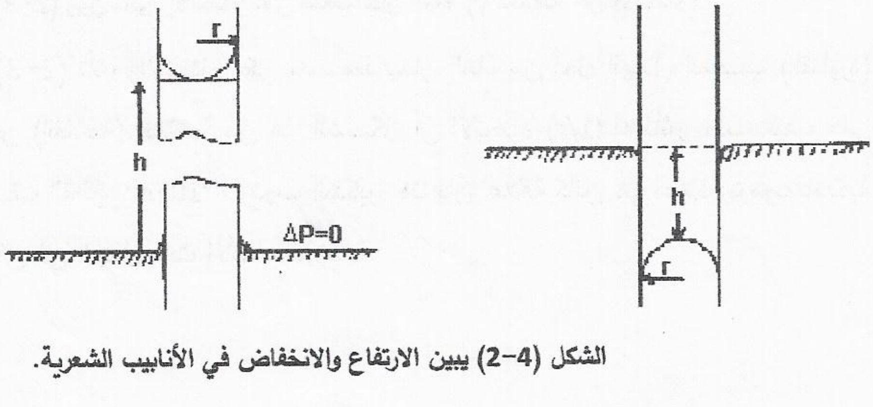
يمكن أن نعالج ظاهرة الارتفاع في الأنبوب الشعري بصورة تقريبية وبسهولة باستخدام علاقة يانغ- لابلاس، العلاقة (2-8). إذا كان السائل يبلل جدار الأنبوب الشعري فإنّ سطح السائل يكون مقيداً ليرتكز موازياً للجدار، ومن ثم فإنّ السطح الكلي يجب أن يتخذ الشكل المقعر. يعطى فرق الضغط عبر السطح البيني بعلاقة يانغ -لابلاس وتكون إشارته بحيث يكون الضغط أقل في جهة السائل منه في الطور الغازي. وهنا يجب التذكر بأنّ نصفي قطري الانحنائيين (من إشارة واحدة) تكون دوماً متوضعة في جانب السطح البيني الذي له الضغط الأعلى.

$\Delta P = \gamma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

إذا كان الأنبوب الشعري ذا سطح مقطع دائري ونصف قطره ليس كبيراً، فإنّ الهلال سيكون تقريباً نصف كروي، كما يتضح من الشكل (4-2)، وأنّ نصفي قطري الانحنائيين يكونان متساويين ومساوية إلى نصف قطر الأنبوب الشعري ($R_1=R_2 = r$)، وتؤول العلاقة (2-8) إلى العلاقة (2-3)، أي إنّ:

$$\Delta p = 2\gamma/r \qquad (16\text{-}2)$$

إذا رمزنا لارتفاع الهلال فوق السطح المستوي للسائل حيث $\Delta p = 0$، بالرمز h فإنّ Δp في العلاقة (16-2) تساوي إلى انخفاض الضغط الهيدروستاتيكي في عمود



الشكل (4-2) يبين الارتفاع والانخفاض في الأنابيب الشعرية.

السائل داخل الأنبوب، أي $\Delta p = gh(\Delta\rho)$، حيث تمثل $\Delta\rho$ فرق الكثافة بين السائل والطور الغازي، و g تسارع الثقالة الأرضية، وتؤول العلاقة (2-16) إلى الشكل التالي:

$$g\,h(\Delta\rho) = 2\gamma/r \qquad (17\text{-}2)$$

ومنها يمكن أن نكتب:

$$r\,h = 2\gamma/g(\Delta\rho) = a^2 \qquad (18\text{-}2)$$

تعرف الكمية a المُعرّفة بالعلاقة السابقة **بثابت الأنبوب الشعري**(capillary constant) وبالمشابهة من أجل السوائل التي لا تبلل جدار الأنبوب، حيث $\theta = 180^o$، فإنّ المعالجة البسيطة تعطي العلاقة (2-17) ذاتها، ولكن هنا يحدث انخفاض شعري (depression)، وحيث إنّ الهلال محدب فإنّ h تمثل مقدار الانخفاض كما هو مبين في الشكل (2–4).

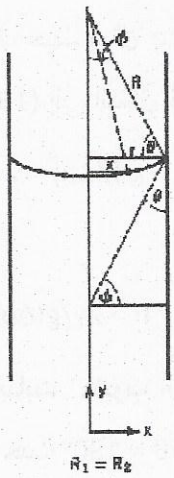
عندما يصنع السائل مع محيط جدار الأنبوب الأسطواني زاوية θ، كما في الشكل (2–5)، وبحيث لا يزال الهلال كروي الشكل فإنّه ينتج مباشرة أنّ $R_1 = R_2 = R$ وأنّ $r = R\cos\theta$، وتؤول العلاقة (2-17) إلى الشكل الآتي:

$$\mathbf{gh(\Delta\rho) = 2\gamma\cos\theta\,/r} \qquad \mathbf{(19\text{-}2)}$$

يجب أن تأخذ المعالجة الدقيقة للارتفاع الشعري بعين الاعتبار انحراف الهلال عن الكروية، أي أنّ الانحناء يجب أن يوافق $\Delta g = yp(\Delta\rho)$ عند أيّة نقطة من الهلال، حيث تمثل y ارتفاع النقطة فوق السطح المستوي. وكذلك يجب أن يؤخذ بعين الاعتبار وزن الهلال، ولهذا يجب تعديل علاقة يانغ–لابلاس. نذكر من التعديلات الهامة على العلاقة (2-18) التعديل الذي أدخله اللورد **رايلاي** (Rayleigh) عندما $\theta = 0$، ومن أجل الهلال القريب من الكروي ($r<<h$) لتصبح بالشكل الآتي:

$$a^2 = r\left(h + \frac{r}{3} - \frac{0.1088r^2}{h} + \frac{0.1312r^3}{h^2} + ...\right) \qquad (20\text{-}2)$$

فالحد الأول يعطي العلاقة الأساسية (2-17)، علاقة يانغ–لابلاس، ويأخذ الحد الثاني بعين الاعتبار وزن الهلال الكروي، أما الحدود الباقية فأدخلت من أجل الانحراف عن الكروية.



الشكل (5-2) الهلال كدورة.

نذكر أيضاً من المعالجات التي تمت على علاقة يانغ - لابلاس تلك التي تعتبر الهلال بشكل دورة، كما في الشكل (5-2). تكتب علاقة يانغ - لابلاس من أجل نقطة من الهلال إحداثياتها (x, y)، وبتبديل R_1 وR_2 بالتعابير الموافقة التالية:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{y``}{(1+y`^2)^{3/2}};\ldots;\frac{1}{R_2} = \frac{y`}{x(1+y`^2)^{1/2}}$$

حيث $y`= dy/dx$ و$y``= d^2y/dx^2$، وحيث إنّ R_1 تترنح في مستوي الورقة وR_2 في المستوي العمودي على الورقة، فإنّ علاقة يانغ - لابلاس تؤول إلى الشكل الآتي:

$$gh(\Delta\rho) = \gamma[\frac{y``}{(1+y`^2)^{3/2}} + \frac{y`}{x(1+y`^2)^{1/2}}] \qquad (21\text{-}2)$$

حل **باشفورث وآدمز** (Bashforth &Adams) هذه العلاقة كما يلي: من أجل الدورة تتساوى أنصاف أقطار الانحناء عند مقعر الهلال عند الارتفاع الشعري، وإذا رمزنا إلى نصف قطر الانحناء عند مقعر الهلال بالرمز b ولارتفاع نقطة من السطح البيني بالرمز z، $z = y\text{-}h$، فإنّ علاقة يانغ - لابلاس تصبح بالشكل الآتي:

$$\gamma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) = (\Delta\rho)gz + \frac{2\gamma}{b} \qquad (22\text{-}2)$$

نلاحظ من هذه العلاقة أنّه عندما $z = 0$، يكون $\Delta\rho = 2\gamma/b$، وعند أي قيمة لـ z فإنّ تغيّر $\Delta\rho$ يعطى بالمقدار $gz(\Delta\rho)$. وبما أنّ $R_2=x/\sin\phi$، حيث $\phi=90\text{-}\theta$، فإنّ العلاقة (22-2) تكتب بالشكل التالي:

$$\frac{1}{R_1/b}+\frac{\sin\phi}{x/b}=\beta(\frac{z}{b})+2 \qquad (23\text{-}2)$$

حيث $\beta = 2b/a^2 = \Delta\rho g b^2/\gamma$ ويكون موجباً في حالة الدورات المفلطحة مثل الهلال في الأنبوب الشعري وفقاعة تحت مستو وقطرة لاعُنقية (sessile drop) ويكون سالباً من أجل الأشكال المتطاولة.

حل باشفورث وآدم العلاقة (2-23) باستخدام طريقة التكاملات العددية ووضعا نتائجهما في جداول، فمن أجل القيمة المحددة $\beta = 80$ حسبا x/b و z/b من أجل القيم المختلفة لـ ϕ، كما يبيّن الجدول (1–2)، ويلاحظ أنّ قيم x/b العظمى تكون عندما $\phi = 90^o$ أي $\theta = 0^o$، أي إنّ السطح مماس لجدار الأنبوب ومن ثم فإنّ $(x/b)_{max} = r/b$، وتكون قيمة r/b الموافقة هي $\frac{r}{b}\sqrt{\beta/2}$. وبهذه الطريقة استطاع **سوكدن** (Sugden) إيجاد قيم r/b بدلالة r/a، كما يوضح الجدولان (2–2) و(3–2).

لتوضيح استخدام هذه الجداول لنأخذ المثال التالي: لدى قياس التوتر السطحي للبنزن عند الدرجة 20^oC كان $r_t = 0.055$ cm و $\rho(C_6H_6) = 0.8785$ g/cm^3 و $\rho(air) = 0.0014$ g/cm^3 وارتفاع البنزن داخل الأنبوب الشعري $h = 1.201$ cm. نحسب أولاً قيمة الثابت الأنبوب الشعري a_1 من العلاقة (2-18) ثم r/a_1:

$$a_1^2 = rh = 0.055 x 1.201 = 0.066 cm^2 \Rightarrow a_1 = 0.2569 \text{ cm}$$

$$r/a_1 = 0.055/0.2569 = 0.2142$$

الجدول (1–2) حل العلاقة (2-23) من أجل $\beta = 80$.

φ, deg	x/b	z/b	φ, deg	x/b	z/b
5	0.08159	0.00345	100	0.33889	0.17458
10	0.14253	0.01133	110	0.33559	0.18696
20	0.21826	0.03097	120	0.33058	0.19773
30	0.26318	0.05162	130	0.32421	0.2684
40	0.29260	0.07204	140	0.31682	0.21424
50	0.31251	0.09183	150	0.30868	0.21995
60	0.32584	0.11076	160	0.30009	0.22396
70	0.33422	0.12863	170	0.29130	0.22632
80	0.33872	0.14531			
90	0.34009	0.16067			

الجدول (2-2) حل معادلة يانغ-لابلاس من أجل الارتفاع الشعري ($\theta = 0^o$)

(قيم r/b من أجل قيم r/a المحصورة في المجال 0.0-2.29)

r/a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	1.0000	9999	9998	9997	9995	9992	9988	9983	9979	9974
0.10	0.9968	9960	9952	9944	9935	9925	9915	9904	9893	9881
0.20	9869	9856	9842	9827	9812	9796	9780	9763	9746	9728
0.30	9710	9691	9672	9652	9631	9610	9589	9567	9545	9522
0.40	9498	9474	9449	9424	9398	9372	9346	9320	9293	9265
0.50	9236	9208	9179	9150	9120	9090	9060	9030	8999	8968
0.60	8936	8905	8873	8840	8807	8774	8741	8708	8674	9640
0.70	8606	8571	8536	8501	8466	8430	8394	8358	8322	9286
0.80	8249	8212	8175	8138	8101	8064	8026	7988	7950	7913
0.90	7875	7837	7798	7759	7721	7683	7644	7606	7568	7529
1.00	7490	7451	7412	7373	7334	7295	7255	7216	7177	7137
1.10	7098	7059	7020	6980	6941	6901	6862	6823	6783	6744
1.20	6704	6665	6625	6586	6547	6508	6469	6431	6393	6354
1.30	6315	6276	6237	6198	6160	6122	6083	6045	6006	5968
1.40	5929	5890	5851	5812	5774	5736	5697	5659	5621	5583
1.50	5545	5508	5471	5435	5398	5362	5326	5289	5252	5216
1.60	5179	5142	5106	5070	5034	4998	4963	4927	4892	4857
1.70	4822	4787	4753	4719	4686	4652	4618	4584	4549	4514
1.80	4480	4446	4413	4380	4347	4315	4283	4250	4217	4184
1.90	4152	4120	4089	8058	4027	3996	3965	3934	3903	3873
2.00	3843	3813	3783	3753	3723	3683	3663	3633	3603	3574
2.10	3546	3517	3489	3461	3432	3403	3375	3348	3321	3294
2.20	3267	3240	3213	3186	3160	3134	3108	3082	3056	3030

نوجد r/b_1 المقابلة من الجدول (2-2) فنحصل على: $r/b_1 = 0.9855$

وبما أنّ b تمثل R_1 و R_2 عند قعر الهلال $(R_1 = R_2 = b)$ فإنّ العلاقة $a^2 = bh$ تكون صحيحة. نوجد من r/b_1 قيمة التقريب الأول b_1:

$$b_1 = 0.055/0.9855 = 0.0559 \text{ cm}$$

الجدول (3-2) قيم r/b من أجل قيم r/a الأكبر من 2.00

r/a	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2.0	0.384	355	327	301	276	252	229	206	185	166
3.0	149	133	119	107	097	088	081	074	067	061
4.0	056	051	047	043	039	035	031	028	025	022
5.0	020	018	017	015	014	012	010	009	008	007
6.0	006	006	005	004	004	003	003	003	002	002

انتهت المحاضرة الرابعة