الفصل الرابع

الكمون الكهربائي

Electric Potential

لقد أدخل مفهوم الطاقة الكامنة في الفيزياء العامة (1)، وتمت دراسته بالارتباط مع القوى المحافظة كقوى الجاذبية وقوى المرونة لنابض. وباستخدام قانون انحفاظ الطاقة، فإنه يمكننا في معظم الأحيان تجنب العمل مباشرة مع القوى عند حل مسائل الميكانيك المختلفة، وسنرى في هذا الفصل أن مفهوم الطاقة هو مفهوم هام وقيم في دراسة الكهرباء.

بما أن القوى الكهربائية المعطاة بقانون كولون هي محافظة، فإنه يمكن وصف الظواهر الكهربائية بصورة مناسبة بتابعية الطاقة الكامنة الكهربائية.

تمكننا هذه الفكرة من تعريف مقدار كمي جديد يدعى الكمون الكهربائي (Electric Potential)، وبما أن الكمون هو مقدار تابع للموضع، فإنه يقدِّم طريقة لوصف ظواهر الكهرباء الساكنة أسهل من تلك التي يقدمها الحقل الكهربائي.

وسنرى في فصول لاحقة أن مفهوم الكمون الكهربائي ذو قيمة عالية من الناحية العملية، وفي الحقيقة إن قياس التوتر بين أي نقطتين من دارة كهربائية هو ببساطة فرق الكمون الكهربائي بين هاتين النقطتين.

٤-١- فرق الكمون والكمون الكهربائي

:Potential Difference & Electric Potential

عند وضع شحنة نقطية q_0 في حقل كهربائي $\vec{E}$ فإن القوى الكهربائية التي تخضع لها هذه الشحنة من قبل هذا الحقل هي $q_0\vec{E}$، هذه القوة هي محصلة شعاعية للقوى المفردة المؤثرة على q_0 من قبل الشحنات المختلفة المولدة للحقل $\vec{E}$، وينتج من ذلك أن القوة $q_0\vec{E}$ محافظة لأن القوى المحكومة بقانون كولون محافظة. عندما تتحرك

الشحنة q_0 ضمن الحقل الكهربائي فإن العمل المنجز على q_0 من قبل الحقل الكهربائي يساوي سالب العمل المنجز من قبل قوة خارجية تستخدم لإنجاز نفس الإزاحة للشحنة، من أجل انتقال تفاضلي $d\vec{s}$ ، فإن العمل المنجز من قبل الحقل الكهربائي هو $\vec{F}\,d\vec{s} = q_0\,\vec{E}.d\vec{s}$. وهذا ينقص الطاقة الكامنة للحقل الكهربائي بالمقدار $dU = -q_0.\vec{E}.d\vec{s}$. من أجل إزاحة محدودة بين النقطتين A , B لشحنة اختبارية فإن التغير في الطاقة الكامنة $\Delta U = U_B - U_A$ هو:

$$\Delta U = - q_0 \int_A^B \vec{E} . d\vec{s} \qquad (4\text{-}1)$$

يتم التكامل على طول المسار الذي تتحرك وفقه q_0 من A إلى B، ويدعى هذا التكامل إما تكامل المسار (Path integral) أو التكامل الخطي (Line integral). بما أن القوة $q_0\,\vec{E}$ محافظة، فإن هذا التكامل الخطي لا يتعلق بشكل المسار بين A , B.

وبما الطاقة الكامنة لكل واحدة شحنة $(\frac{U}{q_0})$ لا تتعلق بقيمة q_0، ولها قيمة وحيدة في كل نقطة من الحقل الكهربائي. يدعى المقدار $(\frac{U}{q_0})$ الكمون الكهربائي أو ببساطة الكمون، ورمزه V، وعليه فإن الكمون الكهربائي في أية نقطة من حقل كهربائي يعطى بالعلاقة التالية:

$$V = \frac{U}{q_0} \qquad (4\text{-}2)$$

بما أن الطاقة الكامنة مقدار سلمي فإن الكمون الكهربائي هو أيضاً مقدار سلمي. يعرف فرق الكمون $\Delta V = V_B - V_A$ بين النقطتين A , B بأنه تغير الطاقة الكامنة (فرق الطاقة الكامنة) بين هاتين النقطتين مقسماً على قيمة الشحنة الاختبارية q_0 ويعطى بالعلاقة:

$$V = \frac{U}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} . d\vec{s} \qquad (4\text{-}3)$$

ونشير هنا إلى أنه لا يجوز الخلط بين فرق الكمون والفرق في الطاقة الكامنة، ويتناسب فرق الكمون طرداً مع تغير الطاقة الكامنة، ومن العلاقة (4-3) نجد أن المفهومين يرتبطان بالعلاقة $\Delta U = q_0.\Delta V$.

إن الكمون الكهربائي هو ميزة (صفة) سلمية للحقل، وهو مستقل عن الشحنات المتوضعة ضمن الحقل. وتتوضع (تكمن) الطاقة الكامنة أيضاً في الحقل الكهربائي. لكن وعلى أية حال وبما أننا مهتمون بالكمون الكهربائي في موضع الشحنة وبالطاقة الكامنة الناتجة عن التأثير المتبادل بين الشحنة والحقل، فإننا سنتبع المفهوم الشائع في الحديث عن الطاقة الكامنة إذا كانت تخص الشحنة، إلا عندما نريد معلومات نوعية خاصة عن انتقال الطاقة بين الحقل والشحنة.

بما أنه وكما ذكر سابقاً أن التغير في الطاقة الكامنة الكهربائية لشحنة يساوي بالقيمة العمل المنجز من قبل القوى الكهربائية ولكنه يعاكسه بالإشارة، فإن فرق الكمون الكهربائي ΔV بين النقطتين A , B يساوي العمل المنجز لكل واحدة شحنة، والذي تنجزه قوى خارجية لتحريك الشحنة الاختبارية من A إلى B دون تغير في الطاقة الحركية لهذه الشحنة الاختبارية.

تعرف العلاقة (3-4) فرق الكمون الكهربائي فقط، أي أن الفروق في V هي ذات معنىً مهم، أما القيمة المطلقة للكمون الكهربائي في نقطة (تُعرّف على أنها العمل اللازم لنقل واحدة الشحنات الموجبة من اللانهائية إلى هذه النقطة) فهي لا تستخدم عملياً ولا تهم في دراسة الحقول الكهربائية.

يُختار تابع الكمون الكهربائي في معظم الأحيان مساوٍ للصفر في نقطة ما مناسبة. أي نضع الكمون عشوائياً مساوياً للصفر في نقطة يكون بُعدها لانهائياً عن الشحنة المولدة للحقل الكهربائي. وبهذا الاختيار نستطيع القول إن الكمون في نقطة ما يساوي العمل اللازم لكل واحدة شحنة من شحنة اختبارية موجبة لنقلها من اللانهاية إلى هذه النقطة. وعليه إذا أخذنا $V_A = 0$ في اللانهاية في العلاقة (3-4) فإن الكمون في أية نقطة p هو:

$$V_p = -\int_{\infty}^{p} \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad (4\text{-}4)$$

تمثل V_p في الحقيقة فرق الكمون بين النقطة P ونقطة واقعة في اللانهاية أي أن العلاقة (4-4) هي حالة خاصة من العلاقة (3-4).

بما أن فرق الكمون هو قياس لطاقة واحدة الشحنة فإن واحدة الجملة الدولية SI لفرق الكمون هي جول لكل كولون J/C وتعرف بواحدة تدعى الفولت V أيضاً، أي أن:

$$1V = 1J \ / \ 1C$$

وهذا يعني أنه يجب إنجاز عمل مقداره 1J لنقل شحنة مقدارها 1C خلال فرق كمون مقداره 1V. تظهر العلاقة (4-3) أن فرق الكمون الكهربائي له أيضاً واحدة الحقل الكهربائي مضروبة بواحدة المسافة. مما سبق ينتج أنه يمكن التعبير عن واحدة الحقل الكهربائي $\frac{N}{C}$ في الجملة الدولية بالفولت لكل متر $\frac{V}{m}$ أي أن:

$$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

إن واحدة الطاقة الشائعة الاستخدام في الفيزياء الذرية والفيزياء النووية هي الإلكترون فولت (Electron-Volt) ورمزها eV، وتعرف بأنها الطاقة التي يكسبها (أو يخسرها) الإلكترون (أو البروتون) عندما يتحرك خلال فرق كمون كهربائي مقداره 1V، وبما أن $1V = 1J / 1C$، وبما أن شحنة كل من الإلكترون و البروتون تساوي $1.602\times10^{-19}C$، نجد أن واحدة eV ترتبط مع الجول J كمايلي:

$$1\ eV = 1.602\times10^{-19}\ CV = 1.602\times10^{-19}\ J \qquad (4\text{-}5)$$

على سبيل المثال يملك الإلكترون في حزمة أنبوب التلفزيون (أو في أنبوب الأشعة المهبطية) سرعة مقدارها $5\times10^{7}m/s$، وهذه تقابل طاقة حركية مقدارها $1.1\times10^{-15}\ J$، والتي تكافئ $7.1\times10^{3}\ eV$، ومثل هذه الطاقة تسرع الإلكترون من السكون خلال فرق كمون مقداره 7.1 kV للوصول إلى هذه السرعة.

٤-٢- فرق الكمون في حقل كهربائي منتظم

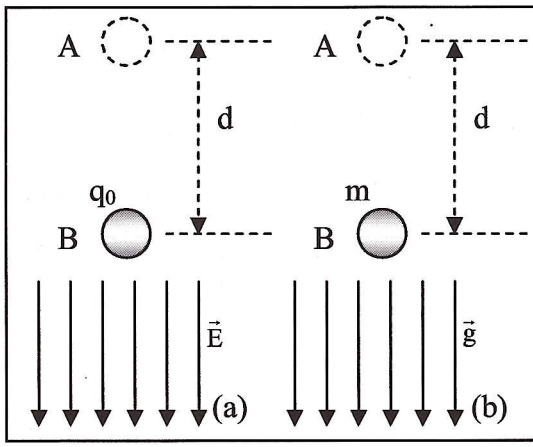
Potential Difference in Uniform Electrical Field:

سنصف في هذا الفصل فرق الكمون الكهربائي بين أي نقطتين من حقل كهربائي منتظم. إن فرق الكمون لا يتعلق بالمسار بين هاتين النقطتين، أي أن العمل

اللازم لنقل شحنة اختبارية من النقطة A إلى النقطة B هـو نفسـه خـلال جميـع المسارات. ويثبت هذا، بأن الحقل الكهربائي الساكن والمنتظم يكون محفوظاً (يخضـع لقانون الانحفاظ).

لنأخذ أولاً حقلاً كهربائياً منتظماً موجهاً بالاتجاه السالب للمحور oy، كما في الشكل (4-1-a)، ولنحسب فرق الكمون بين نقطتين A , B تفصل بينهما مسـافة d حيث تقاس d بموازاة خطوط الحقل. إذا طبقنا العلاقة (4-3) على هذه الحالـة فإننـا نحصل على ما يلي:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{s} = -\int_A^B E.\cos 0\, ds = -\int_A^B E.ds$$



الشكل (4-1):
(a) الحقل الكهربائي موجه للأسـفل، وتخسر الشحنة لدى انتقالها من A إلى B طاقة كامنة كهربائية لأن كمون B أخفض من كمون A.
(b) أيضاً فإن الكتلة m تخسر لـدى انتقالها مـن A إلى B طاقـة كامنـة تجاذبية لأن كمون B أخفـض مـن كمون A في الحقل التجاذبي الأرضي.

بما أن E ثابت، فإنه من الممكن إخراجه خارج إشارة التكامل، وبالتالي تصبح العلاقة الأخيرة كما يلي:

$$\Delta V = -E\int_A^B ds = -E.d \qquad (4\text{-}6)$$

تنتج إشارة السالب في العلاقة الأخيرة من حقيقة كون النقطـة B واقعـة في كمون أخفض من A أي أن $V_B<V_A$، حيث تتجه خطوط الحقل دوماً باتجاه تناقص الكمون الكهربائي، كما في الشكل (4-1-a).

مثال (٤-٢):

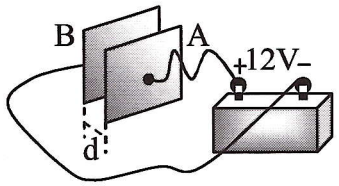
بطارية 12V موصولة إلى صفيحتين متوازيتين تفصل بينهما مسافة 0.3cm، كما في الشكل (3-4)، يعتبر الحقل الكهربائي بين هاتين الصفيحتين منتظماً. (وهذه الفرضية منطقية إذا كانت المسافة الفاصلة بين الصفيحتين صغيرة بالنسبة إلى مساحتيهما، وعندما لا نأخذ نقاطاً قرب حافتي الصفيحتين). والمطلوب: أوجد قيمة الحقل الكهربائي بين الصفيحتين.

الحل:

يتجه الحقل الكهربائي من الصفيحة الموجبة إلى السالبة ونجد بالتالي أن الصفيحة الموجبة تقع في منطقة كمون أعلى من كمون الصفيحة السالبة.

لاحظ أن فرق الكمون بين الصفيحتين يساوي فرق الكمون بين مأخذي البطارية، ويمكن أن يفهم هذا بملاحظة أن جميع نقاط الناقل يكون لها الكمون نفسه في حالة الاتزان، وبالتالي لا يوجد فرق كمون بين أي من مأخذي البطارية وأي نقطة من الصفيحة الموصولة معه، وعليه فإن قيمة الحقل الكهربائي بين الصفيحتين تُعطى بالعلاقة:

$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{12V}{0.3\times10^{-2}\,m} = 4\times10^{3}\ V/m$$



الشكل (3-4):
صفيحتين متوازيتين موصولتين إلى بطارية 12V.

هذه التشكيلة التي تدعى مكثفة مستوية (Parallel Plate Capacitor) ستتم مناقشتها في فصل قادم بالتفصيل.

ملاحظة: ينعدم الحقل الكهربائي داخل الناقل في حالة التوازن الكهربائي الساكن، وبالتالي فإن تكامل المسار $\int \vec{E}\cdot\vec{ds}$ بين أي نقطتين داخل الناقل يجب أن يكون مساوياً الصفر. سنهتم بمناقشة هذا الأمر في فقرات لاحقة من هذا الفصل.

مثال (٤-٣):

يترك بروتون اعتباراً من السكون في حقل كهربائي منتظم قيمته $8\times10^4 V/m$، ويتجه هذا الحقل وفق الاتجاه الموجب للمحور ox، الشكل (4-4)، يخضع هذا البروتون لانزياح مقداره 0.5m وفق اتجاه $\vec{E}$.

a. أوجد التغير في الكمون الكهربائي بين النقطتين A , B.

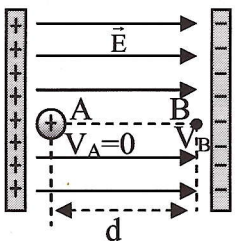
b. أوجد التغير في الطاقة الكامنة للبروتون من أجل هذا الانزياح.

الحل:

a. التغير في الكمون الكهربائي: لدينا من العلاقة (4-6):

$$\Delta V = - E\, d = - (8\times10^4).\ 0.5$$
$$\Delta V = - 4 \times 10^4\ V$$

تدل هذه النتيجة السالبة أن كمون البروتون يتناقص عند حركته من A إلى B.



الشكل (4-4):
يتسارع البروتون باتجاه الحقل الكهربائي المنتظم من B إلى A.

b. التغير في الطاقة الكامنة:

$$\Delta U = q_0\ .\ \Delta V = e\ \Delta V$$
$$\Delta U = (1.6\times10^{-19}).\ (-4\times10^4)$$
$$\Delta U = - 6.4 \times10^{-15}\ J$$

تعني الإشارة السالبة هنا أن الطاقة الكامنة الكهربائية للبروتون تتناقص عند حركته مع اتجاه الحقل الكهربائي، وهذا يعني أن البروتون عندما يتسارع وفق الحقل الكهربائي فإنه يكسب طاقة حركية وفي نفس الوقت يخسر الحقل الكهربائي طاقة كامنة كهربائية (الطاقة محفوظة أي تخضع لقانون الانحفاظ).

تطبيق: طبق مبدأ انحفاظ الطاقة لإيجاد سرعة البروتون بعد أن تحرك مسافة 0.5m انطلاقاً من السكون. حيث: $m_p = 1.672\times10^{-27}\ kg$.

الحل:

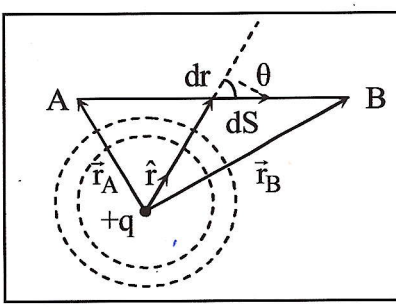
$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_p v^2 = -\Delta U = 6.4\times10^{-15}\ J$$

$$\frac{1}{2}\times1.672\times10^{-27} v^2 = 6.4\times10^{-15} \Rightarrow v = 2.767\times10^{6}\ m/s$$

٤-٣- كمون شحنة نقطية

Electric Potential of point charges:

نأخذ شحنة نقطية موجبة معزولة q، الشكل (5-4)، وكما مر معنا فإن مثل هذه الشحنة تولد خطوط حقل تتجه قطرياً من الشحنة نحو الخارج. لإيجاد الكمون الكهربائي لنقطة متوضعة في الحقل على بعد r من الشحنة ننطلق من العلاقة العامة لفرق الكمون:



الشكل (5-4):
فرق الكمون بين نقطتين يتعلق فقط بإحداثياتهما. الدائرتان المنقطتان تمثلان سويتي كمون.

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{s}$$

بما أن الحقل الكهربائي للشحنة النقطية يُعطى بالعلاقة:

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{\vec{r}}$$

حيث $\hat{\vec{r}}$ شعاع الواحدة موجه من الشحنة باتجاه موقع الشحنة، فإنه يمكن كتابة المقدار $\vec{E}.d\vec{s}$ كما يلي:

$$\vec{E}.d\vec{s} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{\vec{r}}\ d\vec{s}$$

إن الجداء السلمي في الطرف الأيسر يساوي $\hat{\vec{r}}.d\vec{s} = ds.\cos\theta$ حيث θ الزاوية بين $\hat{\vec{r}}$ و $d\vec{s}$ كما في الشكل (5-4)، بالإضافة لذلك يمكن الملاحظة أن $ds\cos\theta$ هي مسقط ds على r وعليه يمكن أن نكتب:

$$ds \cos\theta = dr$$

وهذا يعني أن أي انزياح ds للشحنة ينتج تغير مقداره dr في قيمة $\vec{r}$.

وبهذا الاستبدال نجد أن:

$$E.ds = k_e \frac{q}{r^2}.dr = E_r dr$$

وعليه تصبح علاقة فرق الكمون كما يلي:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int E_r.dr = -k_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \left[k_e \frac{q}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = k_e q.\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \qquad (4\text{-}10)$$

ومن العلاقة الأخيرة نستنتج ما يلي:

لا يتعلق التكامل $\vec{E}.d\vec{s}$ بشكل المسار بين النقطتين A,B. لأن الحقل الكهربائي لشحنة نقطية هو حقل محفوظ (خاضع لقانون الانحفاظ). بالإضافة لذلك تتضمن العلاقة (4-10) نتيجة هامة، وهي أن فرق الكمون بين أي نقطتين A,B يتعلق فقط بالإحداثيات القطرية r_A, r_B ، ومن المعتاد اختيار الكمون الذي ننسب إليه القياس مساوياً الصفر عند $r_A = \infty$، (وهذا طبيعي تماماً لأن $V \propto \frac{1}{r_A}$ وعندما $r_A \to \infty$ فإن $V \to 0$) وبهذا الاختيار فإن الكمون الكهربائي المتعلق بشحنة نقطية على أي مسافة r من هذه الشحنة هو:

$$V = k_e \frac{q}{r} \qquad (4\text{-}11)$$

وبالاعتماد على ما سبق يمكن الاستنتاج أن V ثابتة على سطح أي كرة مركزها هذه الشحنة النقطية. ونستنتج بالتالي أن سطوح تساوي الكمون (السطوح التي تبقى عليها V ثابتة) لشحنة نقطية، تتألف من مجموعة الكرات التي مركزها المشترك هذه الشحنة النقطية، كما هو موضح في الشكل (5-4)، لاحظ أن الخطوط المنقطة في الشكل هي مقاطع سطوح تساوي الكمون الكروية وهي عمودية على خطوط القوة (خطوط الحقل) الكهربائية، كما هو الحال في الحقول المنتظمة.

يتم الحصول على الكمون الكهربائي لشحنتين نقطيتين أو أكثر بتطبيق مبدأ الجمع (التركيب). وهذا يعني أن الكمون الكلي في نقطة ما مثل p المتعلق بعدة شحنات نقطية هو المجموع الجبري للكمونات المتعلقة بالشحنات المفردة. ونستطيع كتابة الكمون الكلي لمجموعة من الشحنات النقطية في نقطة ما مثل p بالشكل التالي:

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (4\text{-}12)$$

حيث اعتبر هنا الكمون مساوياً للصفر في اللانهاية، و r_i هي المسافة من p إلى الشحنة q_i. لاحظ أن المجموع في العلاقة (4-12) هو مجموع جبري لقيم سلمية يختلف عن المجموع الشعاعي (الذي يستخدم لجمع الحقل الكهربائي لمجموعة من الشحنات)، وعليه فإن تعيين V أسهل بكثير من تعيين $\vec{E}$.

مثال (٤-٤):

إذا كان الكمون الكهربائي في نقطة ما يساوي الصفر، هل تستطيع الاستنتاج أنه لا توجد شحنات في جوار تلك النقطة؟

الحل:

لا، لا يمكن، بفرض وجود عدة شحنات في جوار هذه النقطة. إذا كانت بعض الشحنات موجبة وبعضها سالبة، فإن مساهماتها في الكمون في هذه النقطة تتفانى وربما يكون مجموعها الجبري يساوي الصفر. على سبيل المثال، الكمون الكهربائي في النقطة الواقعة في منتصف المسافة بين شحنتين متساويتين بالقيمة ومتعاكستين بالإشارة يكون مساوياً الصفر.

مثال (٤-٥):

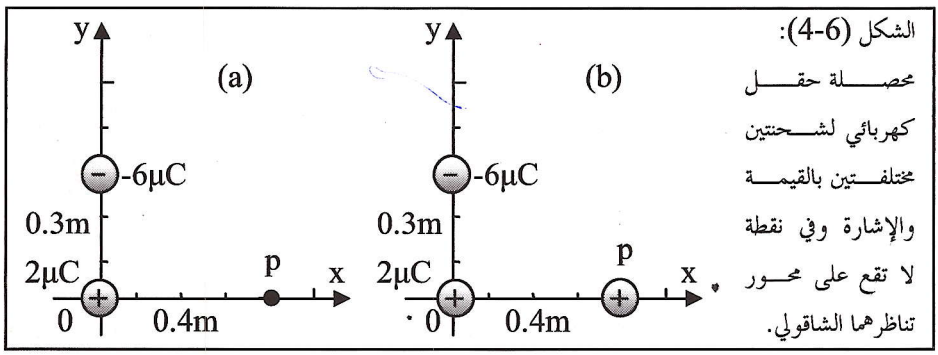
شحنة نقطية قيمتها 2μc متوضعة في نقطة المبدأ، وشحنة نقطية أخرى قيمتها -6μc متوضعة على المحور oy في الموضع 3m كما في الشكل (4-6-a). المطلوب:

a. أوجد الكمون الكهربائي الكلي الناتج عن هاتين الشحنتين في النقطة p التي إحداثيها على المحور ox هو (0.4)m. b. ما قيمة العمل اللازم لنقل الشحنة النقطية 3μc من اللانهاية إلى النقطة p كما في الشكل (4-6-b)؟

الحل:

a. من أجل شحنتين يعطى المجموع في العلاقة (12-4) كما يلي:

$$V_p = k_e\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$



الشكل (4-6): محصلة حقل كهربائي لشحنتين مختلفتين بالقيمة والإشارة وفي نقطة لا تقع على محور تناظرهما الشاقولي.

لدينا في هذا المثال:

$$r_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{m}\ ,\ q_2 = -6\mu\text{c}\ ,\ r_1 = 4\text{m}\ ,\ q_1 = 2\mu\text{c}$$

وبالتالي تعطى العلاقة قيمة V_p كما يلي:

$$V_p = 8.99\times10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\left(\frac{2\times10^{-6}\text{C}}{4\text{m}} - \frac{6\times10^{-6}\text{C}}{5\text{m}}\right) = -6.29\times10^3\ \text{V}$$

b. قيمة العمل اللازم لنقل الشحنة النقطية 3μc:

$$W = q_3 V_p = (3\times10^{-6}\text{C}).(-6.29\times10^3\ \text{V}) = -8.9\times10^{-3}\ \text{J}$$

تعني إشارة سالب أن العمل المنجز على الشحنة عند انتقالها من اللانهاية إلى النقطة p، هو من قبل الحقل. وعليه فإن العمل الموجب يجب أن يتم من قبل عامل خارجي لتحريك الشحنة من p عائدة إلى اللانهاية.

٤-٤ - الحصول على الحقل الكهربائي من الكمون الكهربائي

Obtaining $\vec{E}$ from The Electric Potential:

يرتبط الحقل الكهربائي $\vec{E}$ والكمون V أحدهما بالآخر وفق العلاقة (4-3). يتحدد كلٌ من المقدارين بنوع الشحنة، وسنوضح الآن كيف يمكن حساب الحقل الكهربائي إذا كان الكمون الكهربائي معروفاً في منطقة معينة.

من العلاقة (4-3) نستطيع كتابة فرق الكمون الكهربائي dV بين نقطتين من المسافة بينهما ds كما يلي:

$$dV = -\vec{E}.d\vec{s} \qquad (4\text{-}13)$$

إذا كان للحقل الكهربائي مركبة واحدة فقط E_x فإن $\vec{E}.d\vec{s} = E_x\,dx$ ، وعليه يصبح القانون كما يلي:

$$dV = -E_x \cdot dx$$

أو:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \qquad (4\text{-}14)$$

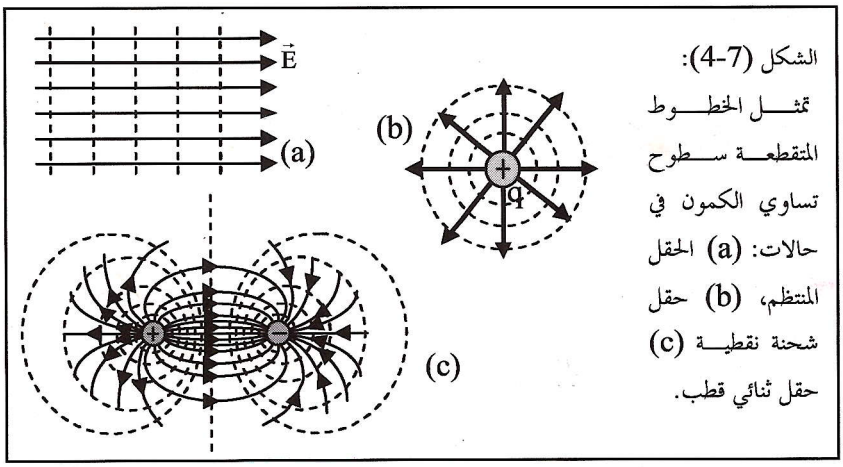
وهذا يعني أن الحقل الكهربائي يساوي سالب مشتق الكمون بالنسبة لإحداثيات ما. لاحظ أن تغير الكمون يساوي الصفر من أجل أي انزياح عمودي على الحقل الكهربائي، وهذا مضمن في الملاحظة التي تنص على أن سطوح تساوي الكمون تكون عمودية على الحقل كما في الشكل (4-7-a).

إذا كان شكل الشحنة كروياً منتظماً، حيث تتعلق كثافة الشحنة بالمسافة القطرية r فقط لأن الحقل قطري في هذه الحالة $\vec{E}.d\vec{s} = E_r dr$. وعليه يمكن كتابة dV بالشكل:

$$dV = -E_r\,dr$$

وعليه ينتج ما يلي:

$$E_r = -\frac{dV}{d_r} \qquad (4\text{-}15)$$



الشكل (4-7): تمثل الخطوط المتقطعة سطوح تساوي الكمون في حالات: (a) الحقل المنتظم، (b) حقل شحنة نقطية (c) حقل ثنائي قطب.

على سبيل المثال إذا كان كمون الشحنة النقطية $V = k_e \frac{q}{r}$ ، أي أن V تابع لـ r فقط فإن لتابع الكمون انتظام كروي. بتطبيق العلاقة (4-15) نجد أن الحقل الكهربائي المتعلق بالشحنة النقطية هو $E_r = k_e \frac{q}{r^2}$ ، وهذه نتيجة منطقية. لاحظ أن الكمون يتغير فقط بالاتجاه القطري، ولا يتغير في الاتجاه العمودي على r.

ومرةً أخرى فإن هذا مضمن في الفكرة التي تنص على أن سطوح تساوي الكمون عمودية على خطوط الحقل، في هذه الحالة تكون سطوح تساوي الكمون عبارة عن مجموعة السطوح الكروية المتمركزة مع الشحنة ذات التوزع الكروي كما هو موضح في الشكل (4-7-b). يوضح الشكل (4-7-c) سطوح تساوي الكمون لثنائي أقطاب كهربائي عندما تزاح شحنة اختبارية بمقدار $d\vec{s}$ متوضعة داخل سطح تساوي كمون فإنه وبحسب التعريف $dV = -\vec{E}.d\vec{s} = 0$. ويظهر هذا أن سطوح تساوي الكمون يجب أن تكون دوماً عمودية على خطوط الحقل الكهربائي.

يكون الكمون الكهربائي في الحالة العامة تابعاً للإحداثيات الفراغية الثلاث، فإذا كان V(r) معطىً بتابعية إحداثيات متعامدة فإنه يمكن إيجاد مركبات الحقل E_z , E_y , E_x بسهولة من خلال V(r) =V(x , y , z) كما يلي:

$$E_x = -\frac{\partial V(r)}{dx},\quad E_y = -\frac{\partial V(r)}{dy},\quad E_z = -\frac{\partial V(r)}{dz}$$

يسمى الاشتقاق في هذه العلاقات بالاشتقاق الجزئي في هذه العملية نأخذ المشتق بالنسبة لـ x بينما يبقى y,z ثابتين. على سبيل المثال إذا كان:

$$V = 3x^2y + y^2 + yz$$

فإن:

$$E_x = -\frac{\partial V(r)}{dx} = 6xy$$

مثال (٤-٦):

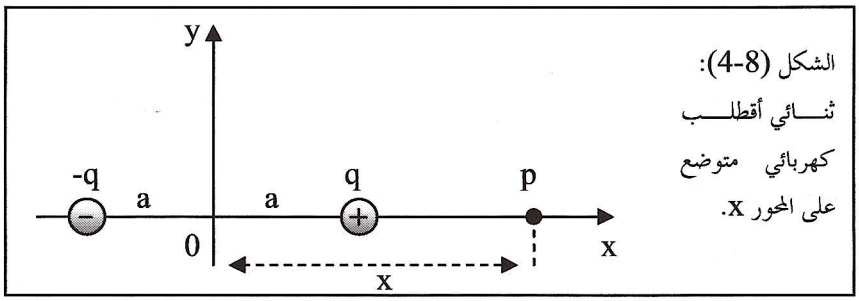
إذا كان الكمون الكهربائي ثابت في منطقة فما الذي تستنتجه عن الحقل فيها؟ وإذا كان الحقل فيها معدوماً. فماذا يمكنك القول عن الكمون في تلك المنطقة؟

الحل:

إذا كان V ثابتاً في منطقة ما، فإن الحقل الكهربائي يجب أن يساوي الصفر في تلك المنطقة. في حالة البعد الواحد يكون $E_x = -\frac{\partial V(r)}{dx}$ وعليه فعندما V=0 فـــإن E=0 بنفس الطريقة، إذا كان E=0 في منطقة ما فإنه يمكن الاستنتاج فقـــط أن V=ct ثابتة في تلك المنطقة.

مثال (٤-٧): الكمون الكهربائي لثنائي الأقطاب

يتألف ثنائي الأقطاب الكهربائي من شحنتين متعاكستين تفصل بينهما مســـافة 2a كما في الشكل (8-4). ينطبق طول الثنائي على المحور ox ومركزه يقع في نقطـــة المبدأ. احسب الكمون والحقل الكهربائيان في النقطة p الواقعة على المحور ox.



الشكل (8-4): ثنـــائي أقطلـــب كهربائي متوضع على المحور x.

الحل:

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{x-a} - \frac{q}{x+a} \right) = \frac{2k_e q\, a}{x^2 - a^2}$$

إذا كانت p بعيدة عن الثنائي فإن x>>a، ويمكن بالتالي في هذه الحالة إهمال a^2 في الحد x^2-a^2 فتصبح V كما يلي:

$$V \approx \frac{2k_e qa}{x^2}$$

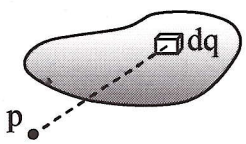
باستخدام العلاقة (4-14) والنتيجة السابقة فإنه يمكننا حساب الحقل الكهربائي في النقطة p وذلك من أجل x>>a كما يلي:

$$E = \frac{-\partial V}{\partial x} = \frac{4k_e qa}{x^3}$$

٤-٥- الكمون الكهربائي لشحنة ذات توزع مستمر

Electric Potential due to continuous charge distribution:

يمكن حساب الحقل الكهربائي المتعلق بشحنة ذات توزع مستمر بطريقتين. إذا كانت الشحنة معروفة، فإنه يمكننا الانطلاق من العلاقة (4-11)، بحساب الكمون لشحنة نقطية، ومن أجل ذلك نأخذ كمون شحنة عنصرية صغيرة dq، حيث نعالج هذه الشحنة العنصرية كأنها شحنة نقطية، الشكل (4-9).



الشكل (4-9):
يمكن حساب الكمون الكهربائي لشحنة ذات توزع مستمر في نقطة ما بتكامل الحقل الناتج عن شحنة عنصرية على كامل الجسم المشحون.

يعطى الكمون dV المتعلق بهذه الشحنة العنصرية في نقطة ما p بالعلاقة:

$$dV = k_e \frac{dq}{r} \qquad (4\text{-}16)$$

حيث r المسافة من الشحنة العنصرية إلى النقطة p. من أجل الحصول على الكمون الكلي في النقطة p نكامل العلاقة (4-16) من أجل أخذ جميع المساهمات لجميع الشحنات العنصرية. وبما أن كل شحنة عنصرية تقع في الحالة العامة على بعد مختلف من p وبما أن k_e ثابت فإنه يمكن كتابة V كما يلي:

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} \qquad (4\text{-}17)$$

لقد استبدلنا في الواقع المجموع في العلاقة (4-12) بالتكامل في العلاقة (4-17). لاحظ أن هذه العلاقة تستخدم الاصطلاح أن الكمون مساوياً للصفر عندما يكون بعد p عن الشحنة لانهائياً.

الطريقة الثانية لحساب الكمون الكهربائي لشحنة ذات توزع مستمر تجرى باستخدام العلاقة (4-3)، هذه الطريقة مفيدة عندما يكون الحقل الكهربائي محدد من معطيات أخرى كقانون غوص مثلاً.

إذا كان توزع الشحنة عالي الانتظام فإننا نحدد أولاً $\vec{E}$ في أي نقطة باستخدام قانون غوص، ونبدل بعد ذلك قيمة $\vec{E}$ في العلاقة (4-3) للحصول على فرق الكمون الكهربائي بين أي نقطتين.

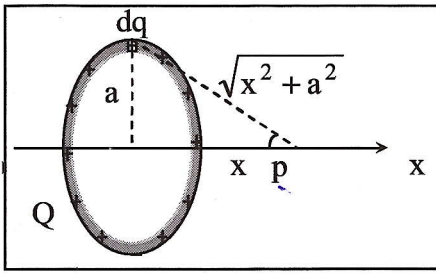
نختار بعد ذلك V=0 في نقطة ما مناسبة، وسنوضح كلتا الطريقتين من خلال الأمثلة العديدة التالية.

مثال (٤-٨): الكمون المتعلق بشحنة حلقية منتظمة

أوجد الكمون الكهربائي في نقطة p واقعة على محور حلقة مشحونة بشحنة منتظمة (موزعة عليها بانتظام) نصف قطرها a وشحنتها الكلية Q. اختر مستوي الحلقة عمودي على المحور x، الشكل (4-10).

الحل:

ليكن بعد p عن مركز الحلقة هو x، كما في الشكل (4-10). فيكون بعد الشحنة العنصرية dq الموضحة في الشكل عن نقطة p هو $(\sqrt{x^2+a^2})$ لذلك يمكن كتابة الكمون الكلي V الناتج من كامل شحنات الحلقة في النقطة p بالعلاقة:



الشكل (4-10):
حساب الكمون الكهربائي لشحنة ذات توزع مستمر على حلقة مشحونة في نقطة ما من محورها.

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

كل شحنة عنصرية dq متساوية البعد عن النقطة p في هذه الحالة، وعليه يمكن إخراج الحد $\sqrt{x^2+a^2}$ خارج إشارة التكامل وتصبح العلاقة السابقة كما يلي:

$$V = \frac{k_e}{\sqrt{x^2+a^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad (4\text{-}18)$$

إن المتحول الوحيد في العلاقة السابقة التي تعطى V هو x، وهذا ليس مفاجئ لأن حسابنا يسري فقط على النقاط الواقعة على المحور ox حيث تكون كل من z,y مساويين للصفر، ومن خلال التناظر نرى أنه على طول المحور ox يمكن لـ $\vec{E}$ أن يكون لها مركبة على ox فقط، وعليه تستطيع استخدام العلاقة (4-18) لحساب الحقل الكهربائي في النقطة p وذلك كما يلي:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -k_e Q \frac{d}{dx}(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$E_x = -k_e Q(-\frac{1}{2}).(x^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}}(2x)$$

$$E_x = \frac{k_e Q x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (4\text{-}19)$$

تتفق هذه النتيجة مع تلك التي تم الحصول عليها من خلال التكامل المباشر. لاحظ أن $E_x=0$ في النقطة x=0 (مركز الحلقة) هل يمكنك التنبؤ بذلك من خلال قانون كولون.

تطبيق: ما هي قيمة الكمون الكهربائي في مركز الحلقة المشحونة بشحنة منتظمة، ما علاقة الحقل في مركز الحلقة بهذه النتيجة؟

الحل:

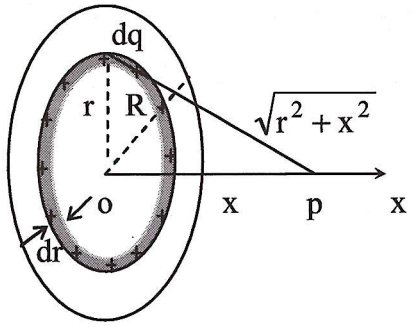
$V = \frac{k_e Q}{a}$ في النقطة x=0 لأن E=0 وهذا يعني أن V يجب أن تأخذ القيمة العظمى أو الصفر (لأنه من أجل الحصول على القيمة الحدية لتابع نشتق ونعدم مشتقه الأول). وهي في الحقيقة القيمة العظمى.

مثال (٤-٩): كمون قرص مشحون بشحنة منتظمة

أوجد الكمون الكهربائي على طول محور قرص مشحون بشحنة كهربائية منتظمة كثافتها السطحية σ. نصف قطر هذا القرص هو a. الشكل (4-11).

الحل:

نختار النقطة p ثانية على بعد x من مركز القرص ونأخذ مستوي القرص عمودياً على المحور x.



الشكل (4-11):
حساب الكمون الكهربائي لشحنة ذات توزع مستمر على قرص مشحون في نقطة ما من محوره.

يمكن جعل المسألة أسهل عن طريق تقسيم القرص إلى جملة من الحلقات المشحونة، بحيث يعطى كمون كل حلقة منها بالعلاقة (4-18) من المثال السابق، نأخذ إحدى هذه الحلقات وليكن نصف قطرها r وعرضها dr كما هو مشار في الشكل (4-11)، إن مساحة هذه الحلقة هي $2\pi r dr$ (محيط الدائرة مضروب بالعرض)، والشحنة على الحلقة بالتالي هي $dq=\sigma dA=\sigma 2\pi r dr$، وعليه يعطى الكمون الناتج عن هذه الحلقة في النقطة p بالعلاقة:

$$dV=\frac{k_e dq}{\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{k_e\,\sigma 2\pi r\,dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

لإيجاد الكمون الكلي في النقطة p تجمع الكمونات الناتجة عن جميع الحلقات المشكلة للقرص، أي نكامل dV من $r=0$ إلى $r=a$:

$$V=\pi k_e\sigma\int_0^a\frac{2r\,dr}{\sqrt{x^2+r^2}}=\pi k_e\sigma\int_0^a\left(x^2+r^2\right)^{-\frac{1}{2}}2r\,dr$$

إن هذا التكامل من الشكل $\int u^n du$ والذي نتيجته $\frac{u^{n+1}}{n+1}$، وحيث $n=-\frac{1}{2}$ و $u=x^2+r^2$، ومن أجل التكامل الذي لدينا نجد النتيجة التالية:

$$V=2\pi k_e\sigma\left[\left(x^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}-x\right] \qquad (4\text{-}20)$$

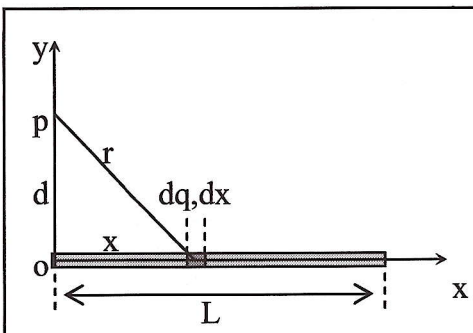
وكما في المثال السابق يمكننا إيجاد الحقل الكهربائي في أية نقطة على المحور عن طريق أخذ سالب مشتق V بالنسبة لـ x أي:

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=2\pi k_e\sigma\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\right) \qquad (4\text{-}21)$$

إن حساب V و $\vec{E}$ في نقطة غير واقعة على المحور هو أكثر صعوبة مما سبق.

مثال (٤-١٠): كمون شحنة خطية ذات طول محدود

قضيب طوله ℓ متوضعة على المحور ox وعليه شحنة موزعة خطياً (طولياً) بصورة منتظمة (أي مقدار الشحنة في واحدة الطول يساوي ثابت)، الشحنة الكلية على هذا القضيب تساوي Q، أوجد الكمون الكهربائي في النقطة p الواقعة على المحور oy وعلى بعد d من المبدأ. الشكل (12-4).



الشكل (12-4): حساب الكمون الكهربائي لشحنة ذات توزع مستمر على قضيب مشحون في نقطة ما من المحور oy.

الحل:

يحمل الطول العنصري dx الشحنة العنصرية dq=λdx، حيث $\lambda = \frac{Q}{\ell}$ هي الشحنة في واحدة الطول، بما أن هذا الطول العنصري يبعد بمقدار $\sqrt{x^2+d^2}$ عن النقطة p فإنه يمكن كتابة كمون هذه الشحنة العنصرية في p كما يلي:

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

وللحصول على الكمون الكلي في النقطة p نكامل العلاقة السابقة بين الحدين من $x = 0$ حتى $x = \ell$ وعلى اعتبار أن: d , λ , k_e ثوابت فإننا نجد:

$$V = k_e \lambda \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = k_e \frac{Q}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

نجد هذا التكامل في معظم جداول التكاملات حيث:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = Ln(x+\sqrt{x^2+d^2})$$

وبالتالي فإن قيمة V هي:

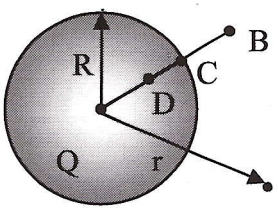
$$V = \frac{k_e Q}{L} Ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d}\right) \qquad (4\text{-}22)$$

مثال (٤-١١): كمون الشحنة الكروية المنتظمة

كرة مصمتة معزولة نصف قطرها R تحمل شحنة منتظمة الكثافة قيمتها الكلية Q الشكل (4-13). المطلوب:

a. أوجد الكمون الكهربائي في نقطة واقعة خارج الكرة، أي من أجل r>R

b. أوجد الكمون في نقطة داخل الكرة أي من أجل r<R .



الشكل (4-13):
كرة معزولة تحمل شحنة توزعها منتظم. الكمون في النقطتين C,B يكافئ الكمون الناتج عن شحنة نقطية متوضعة في مركز الكرة.

الحل:

a. في المثال (٣-٤) وجدنا باستخدام قانون غوص أن قيمة الحقل الكهربائي خارج كرة ذات شحنة منتظمة هي من أجل r>R:

$$E_r = k_e \frac{Q}{r^2}$$

حيث إن هذا الحقل موجه قطرياً نحو الخارج عندما Q موجبة. من أجل الحصول على الكمون في نقطة خارجية مثل B في الشكل (4-13) نبدل قيمة E من العلاقة السابقة في العلاقة (4-4). بما أن: $\vec{E}.d\vec{s} = E_r d_r$ في هذه الحالة فإننا نجد:

$$V_B = -\int_{\infty}^{r} E_r dr = -k_e Q \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

$$V_B = k_e \frac{Q}{r}$$

لاحظ أن هذه النتيجة مميزة للكمون الكهربائي المتعلق بشحنة نقطية. وبما أن الكمون يجب أن يستمر عند r = R فإنه يمكننا استخدام هذه العلاقة للحصول على الكمون على سطح الكرة. وهذا هو الكمون في نقطة مثل C الموضحة في الشكل (4-13) وبالتالي يعطى مثل هذا الكمون من أجل r = R بالعلاقة التالية:

$$V_C = k_e \frac{Q}{R}$$

b. وجدنا في المثال (٣-٥) أن الحقل الكهربائي داخل الكرة المشحونة بشحنة منتظمة يعطى من أجل r<R بالعلاقة:

$$E_r = \frac{k_e Q}{R^3} r$$

نستطيع استخدام هذه النتيجة مع العلاقة (4-3) لتعيين فرق الكمون $V_D - V_C$ حيث D نقطة داخلية:

$$V_D - V_C = -\int_R^r E_r \, dr = -\frac{k_e Q}{R^3}\int_R^r r \, dr = \frac{k_e Q}{R^3}(R^2 - r^2)$$

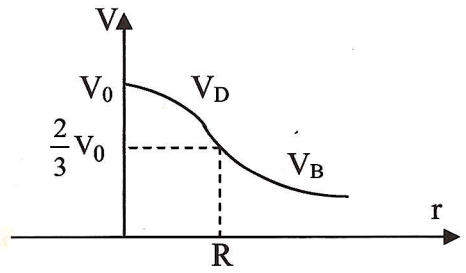
بتبديل $V_C = k_e Q/R$ في هذه العلاقة ومن ثم إيجاد V_D من أجل r<R فإننا نجد:

$$V_D = \frac{k_e Q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (4\text{-}23)$$

عندما r=R تعطي هذه العلاقة نتيجة للكمون تتفق مع الكمون على السطح أي مع V_C. يوضح الشكل (4-14) الخط البياني لـ V كمون هذه الشحنة بتابعية r.

تطبيق:

ما هي قيمة الحقل الكهربائي والكمون الكهربائي في مركز كرة مشحونة بشحنة منتظمة . الجواب: E=0 و $V_0 = \frac{3k_e Q}{2R.}$.



الشكل (4-14):
علاقة الكمون بتابعية المسافة عن مركز الشحنة الكروية المعزولة المنظمة، وهذه العلاقة هي قطع مكافئ داخل الكرة وقطع زائد خارجها.

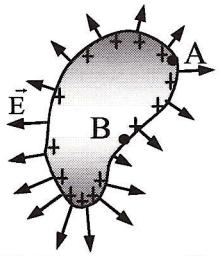
٤-٦- كمون ناقل مشحون *Potential charged conductor:*

وجدنا في الفصل السابق أنه عندما يكون لدينا ناقل مصمت في حالة توازن يحمل محصلة شحنة، فإن هذه الشحنة تنتقل إلى السطح الخارجي للناقل. بالإضافة لذلك أظهرنا أن الحقل الكهربائي في الجوار المباشر لسطح الناقل المتوازن يكون عمودياً على هذا السطح بينما الحقل داخل الناقل يكون مساوياً للصفر إذا كان للحقل الكهربائي مركبة موازية للسطح فإن هذه المركبة ستسبب حركة الشحنات على السطح وسيولد ذلك تياراً وبالتالي لن يكون الناقل في حالة توازن.

سنظهر الآن أن كل نقطة من سطح الناقل المشحون والمتوازن لها نفس قيمة الكمون. لنأخذ نقطتين A و B على سطح الناقل المشحون كما في الشكل (15-4)، يكون الحقل E على طول المسار السطحي الذي يصل بين هاتين النقطتين، دائماً عمودياً على الانزياح ds وعليه فإن $\vec{E}\cdot\vec{ds}=0$. باستخدام كل من هذه النتيجة والعلاقة (3-4) نستنتج أن فرق الكمون بين النقطتين B،A من الضروري أن يكون مساوياً الصفر أي أن:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{ds} = 0$$

تطبق هذه النتيجة على أي نقطتين على السطح، وعليه فإن V ثابت القيمة في أي مكان على السطح لناقل مشحون في حالة التوازن. وهذا يعني: أن سطح أي ناقل مشحون ومتوازن هو سطح تساوي كمون. وبما أن الحقل الكهربائي داخل الناقل يساوي الصفر فإنه يمكننا الاستنتاج أن الكمون ثابت في أي مكان داخل الناقل ويساوي قيمته على السطح أي أن الناقل بأكمله داخله وسطحه يشكلان معاً سطح تساوي كمون واحد.



الشكل (15-4):
ناقل ذو شكل عشوائي يملك شحنة موجبة. في حالة التوازن تنتقل جميع الشحنات إلى السطح وتكون كثافتها غير منتظمة.

بناءً على ما سبق فإن تحريك شحنة اختبارية من داخل الناقل المشحون إلى سطحه لا يتطلب بذل أي عمل. نأخذ على سبيل المثال كرة معدنية نصف قطرها R وشحنتها الكلية موجبة قيمتها Q كما في الشكل (a -16-4). يتجه الحقل الكهربائي قطرياً نحو الخارج وتعطى قيمته خارج الكرة المشحونة بالعلاقة:

$$E = \frac{k_e Q}{r^2}$$

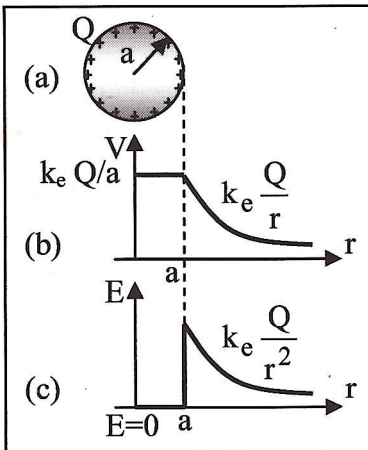
وسنرى في هذا المثال أن الكمون داخل وعلى سطح الكرة يجب أن تكون قيمته بالنسبة للانهاية مساوية:

$$V = \frac{k_e Q}{R}$$

أما الكمون خارج الكرة فتعطى قيمته بالعلاقة:

$$V = \frac{k_e Q}{r}$$

يظهر الشكل (b -16- 4) الكمون بتابعية المسافة r عن مركز الكرة المشحونة ويظهر الشكل (c -16-4) تغير الحقل الكهربائي بتابعية المسافة أيضاً.



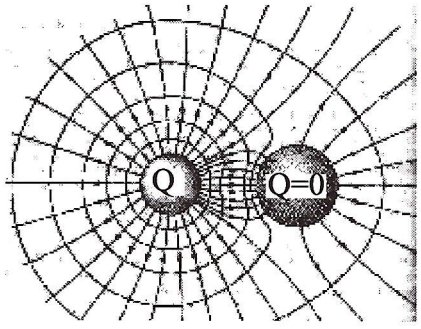
الشكل (16-4):
مخطط بياني لـ E بتابعية r، من أجل ناقل كروي مشحون بشحنة منتظمة ومعزولة. الحقل داخل الكرة (r<a) يتغير خطياً مع r، الحقل خارج الكرة (r>a) يماثل حالة الشحنة النقطية Q المتوضعة في المبدأ.

عندما تتوضع محصلة شحنة على ناقل كروي تكون الكثافة السطحية للشحنات منتظمة كما هو مبين في الشكل (a-16-4)، لكن إذا كان الناقل غير كروي كما في الشكل (15-4) فتكون الكثافة السطحية للشحنات عالية في المناطق التي نصف قطر انحنائها صغيراً أي التي تكون محدبة، وتكون كثافة الشحنات منخفضة في المناطق التي

يكون نصف قطر انحنائها كبيراً ومقعرة. بما أن الحقل الكهربائي في الجوار المباشر للناقل المشحون يكون متناسباً طرداً مع كثافة الشحنات السطحية σ، فإن الحقل الكهربائي يكون عالياً بجوار السطوح التي لها أنصاف أقطار انحناء صغيرة ويصل إلى قيم عالية جداً في المناطق المدببة.

يظهر الشكل (17-4) خطوط الحقل الكهربائي حول ناقلين كرويين، الناقل الصغير يحمل شحنة مقدارها Q وشحنة الكبير تساوي الصفر، في هذه الحالة تصبح الكثافة السطحية غير منتظمة على سطحي الناقلين. الكرة التي محصلة شحنتها صفر تتحرض عليها شحنة سالبة على الوجه المقابل للكرة المشحونة وشحنة موجبة على الوجه البعيد.

تمثل الخطوط المغلقة سطوح تساوي الكمون من أجل هذه التشكيلة من الشحنات. وهنا أيضاً تكون خطوط الحقل عمودية على سطح الناقل في أية نقطة، بالإضافة لذلك تكون سطوح تساوي الكمون عمودية على خطوط الحقل في حدود الناقل وفي أي مكان آخر في الفضاء.

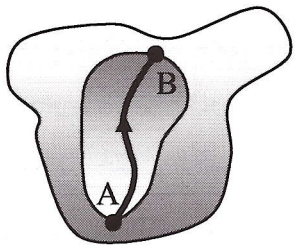


الشكل (17-4):
خطوط الحقل الكهربائي لكرتين ناقلتين بحجمين مختلفين وشحنتين مختلفتين أيضاً.

٤-٦-١ - التجويف داخل ناقل *A Cavity within a Conductor:*

لنأخذ الآن ناقلاً ذا شكل كيفي يحوي تجويفاً، كما في الشكل (18-4)، لنفرض أنه لا توجد شحنة داخل التجويف. الحقل الكهربائي داخل التجويف يجب أن يكون مساوياً الصفر، بغض النظر عن الشحنة الموزعة على السطح الخارجي للناقل، بالإضافة

إلى ذلك، إن الحقل في التجويف يساوي الصفر حتى ولو تواجد حقل كهربائي خارج الناقل.



الشكل (18-4):
الحقل معدوم في تجويف في ناقل كيفي في حالة توازن كهربائي.

من أجل اختبار هذه النقطة نستخدم الحقيقة بأن كل نقطة على الناقل تقع على نفس سطح تساوي الكمون ولذلك فإن أي نقطتين B,A على سطح التجويف يجب أن تقعا على نفس الكمون، ولنتخيل الآن أن حقل كهربائي $\vec{E}$ متواجد في التجويف ولنوجد قيمة فرق الكمون $V_B - V_A$ المعرف بالعلاقة:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{s}$$

إذا كان $\vec{E} \neq 0$ فإنه يمكننا دوماً إيجاد مسار بين B,A يكون من أجل $\vec{E}.d\vec{s}$ عدداً موجباً دوماً وعليه يجب أن يكون التكامل موجباً. لكن بما أن $V_B - V_A = 0$ فإن التكامل يجب أن يساوي الصفر، ويمكن إزالة هذا التناقض عند أخذ $\vec{E} = 0$ داخل التجويف، وعليه نستنتج أن التجويف المحاط بجدران ناقلة يكون خالياً من الحقل الكهربائي، طالما إنه لا توجد شحنات داخل التجويف.

لهذه النتيجة تطبيقات هامة، فمثلاً يمكن حماية دارة إلكترونية أو حتى مخبر كامل من الحقول الخارجية عن طريق إحاطته بجدران ناقلة ندعوها قفص فارادي. في الغالب تكون مثل هذه الحماية ضرورية عند إجراء قياسات كهربائية حساسة.

٤-٦-٢- إنفراغ كورونا *Corona Discharge*:

هناك ظاهرة تعرف بإنفراغ كورونا وتلاحظ غالباً قرب النقاط المدببة من ناقل ينقل كموناً عالياً. يظهر هذا الانفراغ على شكل تألق محفز مرئي للعين المجردة.

يصبح الهواء في هذه العملية ناقلاً نتيجة تأين جزيئات الهواء في المناطق التي تكون فيها الحقول الكهربائية عالية الشدة، فعند درجة الحرارة والضغط المناسبين يحدث هذا الانفراغ من أجل شدة الحقل الكهربائي المساوية $3\times10^{6}V/m$ تقريباً. ولأن الهواء يحوي عدداً صغيراً من الأيونات (تولد بواسطة الأشعة الكونية على سبيل المثال)، فإن الناقل المشحون يجذب الأيونات المعاكسة بالإشارة من الهواء، إذ إنه قرب النقاط المدببة حيث تكون الحقول الكهربائية عالية جداً تسرِّع أيونات الهواء إلى سرع عالية. هذه الأيونات ذات الطاقات العالية تتصادم مع جزيئات الهواء الأخرى مولدة أيونات أكثر ويؤدي ذلك إلى زيادة ناقلية الهواء، ويترافق بالتالي الانفراغ في معظم الأحيان مع تألق مرئي يحيط بالنقاط المدببة.

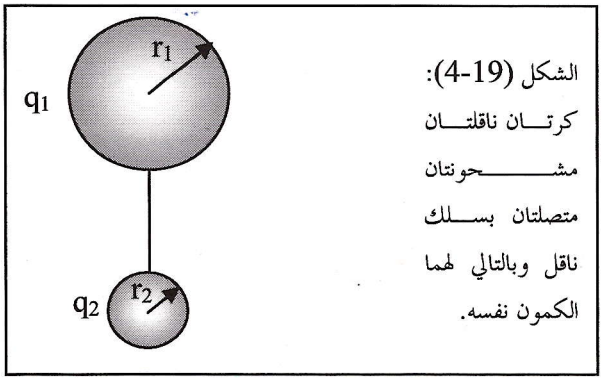
مثال (٤-١٢): كرتان مشحونتان موصولتان:

كرتان ناقلتان نصفا قطريهما r_1 , r_2 تفصل بينهما مسافة أكبر بكثير من نصف قطر كل منهما، تتصل هاتان الكرتان إحداهما بالأخرى بواسطة سلك ناقل، كما في الشكل (19-4)، إذا كانت الشحنتان على الكرتين في حالة التوازن هما q_1 , q_2 على الترتيب. أوجد النسبة بين شدتي الحقلين على سطحي الكرتين.

الحل:

بما أن الكرتين موصولتان بواسطة سلك ناقل فإن لكل منهما الكمون نفسه (تشكلان معاً سطح تساوي كمون):

$$V = k_e \frac{q_1}{r_1} = k_e \frac{q_2}{r_2}$$



الشكل (19-4): كرتان ناقلتان مشحونتان متصلتان بسلك ناقل وبالتالي لهما الكمون نفسه.

وعليه تكون النسبة بين شحنتيهما هي:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad (1)$$

بما أن كل من الكرتين بعيدتان إحداهما عن الأخرى، فإن الشحنة تتوزع على سطح كل منهما بصورة منتظمة، ونستطيع بالتالي التعبير عن قيمة الحقل الكهربائي على سطح كل منهما كما يلي:

$$E_1 = k_e \frac{q_1}{r_1^2} \quad , \quad E_2 = k_e \frac{q_2}{r_2^2}$$

وبأخذ النسبة بين هذين الحقلين والاستفادة من العلاقة (1) نجد أن:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad (2)$$

وبالتالي يكون الحقل بجوار الكرة الأصغر أشد منه في جوار الكرة الأكبر.

٤-٧- تجربة قطرات الزيت لميليكان

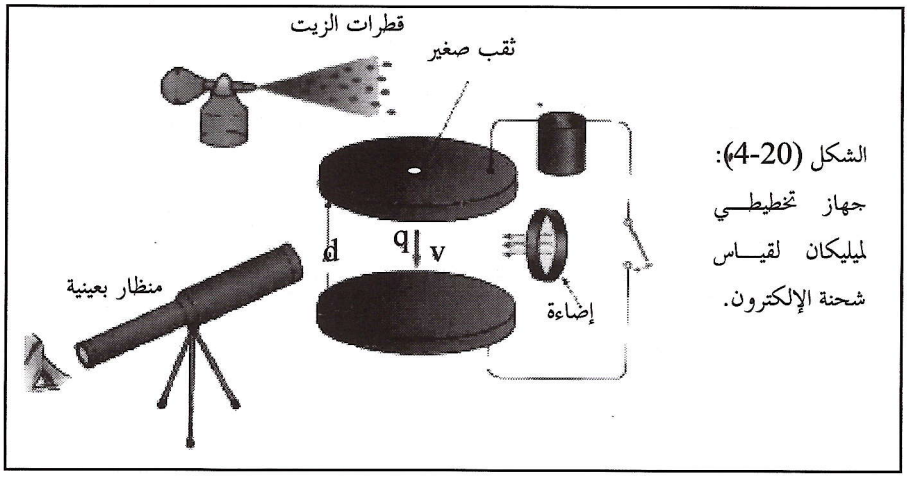
:The Millikan oil drops Experiment

خلال الفترة من عام 1909 حتى عام 1913 أجرى العالم روبرت ميليكان (Robert A. Millikan) مجموعة من التجارب الرائعة التي قاس من خلالها الشحنة العنصرية التي يحملها الإلكترون e، وأثبت من خلالها الطبيعة المكممة للشحنة الكهربائية. يظهر الشكل (20-4) الأجهزة المستخدمة من قبل ميليكان، وهي تتضمن صفيحتين معدنيتين متوازيتين، يسمح لقطرات الزيت التي يطلقها مرذاذ (رشاش) الزيت بالعبور من خلال ثقب صغير في الصفيحة العليا، وهناك حزمة ضوئية موجهة أفقياً تستخدم لإضاءة قطرات الزيت، والتي تظهر بواسطة منظار يكون محوره عمودياً على الحزمة الضوئية. عندما تظهر القطرات بهذه الطريقة فإنها تظهر كنجوم متألقة بمواجهة الخلفية المعتمة، ويمكن بذلك تعيين معدل القطرات المفردة الساقطة.

لنفرض أن قطرة مفردة كتلتها وتحمل شحنة مقدارها q مرئية (ظاهرة). وأن شحنتها سالبة. إذا لم يكن هناك حقل كهربائي بين الصفيحتين فإن القوتين اللتين

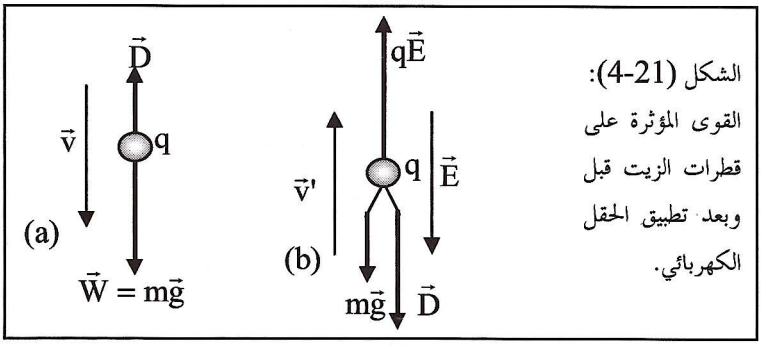
تؤثران على الشحنة هما قوة الجاذبية $m\vec{g}$ وتؤثر نحو الأسفل وقوة الاحتكاك $\vec{D}$ وتؤثر نحو الأعلى، كما أشير في الشكل (4-21-a)، تتناسب قوة الاحتكاك طرداً مع سرعة القطرة عندما تصل القطرة القيمة النهائية للسرعة v فإن كل من القوتين تكون في حالة توازن مع الأخرى أي أن:

$$m\vec{g} = \vec{D}$$



الشكل (4-20): جهاز تخطيطي لميليكان لقياس شحنة الإلكترون.

لنفرض الآن أنه تم تطبيق الحقل الكهربائي بين الصفيحتين عن طريق الوصل بقطبي بطارية بحيث توصل الصفيحة العليا بالكمون الأعلى. تؤثر في هذه الحالة قوة جديدة هي $q\vec{E}$ على القطرة المشحونة. بما أن q سالبة و $\vec{E}$ يتجه نحو الأسفل، فإن هذه القوة الكهربائية $q\vec{E}$ تتجه نحو الأعلى، كما في الشكل (4-21-b)، إذا كانت هذه القوة كبيرة بشكل كافٍ، فإن القطرة تتحرك نحو الأعلى وتؤثر في هذه الحالة قوة الاحتكاك $\vec{D}$ باتجاه الأسفل.



الشكل (4-21): القوى المؤثرة على قطرات الزيت قبل وبعد تطبيق الحقل الكهربائي.

عندما تتوازن هذه القوة المتجهة نحو الأعلى مع محصلة قوتي الجاذبية والاحتكاك اللتين كلتاهما تؤثر نحو الأسفل، عندئذٍ تصل قطرة الزيت القيمة النهائية لسرعتها v`.

عندما يطبق الحقل تتحرك القطرة ببطء نحو الأعلى بمعدلات سرعة تكـــون في العادة من مرتبة مئات السنتمترات في الثانية. يكون معدل سقوط القطرات بغيـــاب الحقل قابلاً للمقارنة، لذلك فإن قطرة مفردة ذات كتلة ثابتة ونصف قطر ثابت مـــن الممكن أن تتأرجح لساعات صعوداً وهبوطاً، وذلك عن طريق إلغاء أو تشغيل الحقل الكهربائي. وبعد إجراء القياسات على آلاف من القطرات، وجد ميليكان ومساعدوه أن جميع القطرات وبدقة مقدارها 1% تملك شحنة مساوية لعدد صحيح ما مضروب بشحنة الإلكترون e:

$$q = n\,e \quad ; n = 0, -1, -2, -3, \ldots\ldots$$

لقد كانت تجربة ميليكان برهاناً قاطعاً وأكيداً على أن الشحنة مكممة. لقد حصـــل ميليكان على جائزة نوبل في الفيزياء في العام 1923 لقاء هذا العمل.

٤-٨- تطبيقات الكهرباء الساكنة

Applications of Electrostatics:

استخدمت مبادئ الكهرباء الساكنة في تطبيقات مختلفة، ستتم مناقشة بعضها في هذا القسم. بعض التطبيقات الأكثر عملية للكهرباء الساكنة هي المرسبات المستخدمة في إنقاص التلوث الكيميائي للجو الناجم عن محطات الطاقة التي تســـتخدم الفحـــم كوقود، وفي التصوير الجاف، هذه العملية التي أحدثت ثورة في تقنيات التصوير.

وتتضمن التطبيقات العلمية للكهرباء الساكنة المولدات الكهربائيـــة الســـاكنة لمسرعات الجسيمات الأولية المشحونة وفي مجال المجاهر الأيونية التي تستخدم لتصـــوير الذرات على سطح العينات المعدنية.

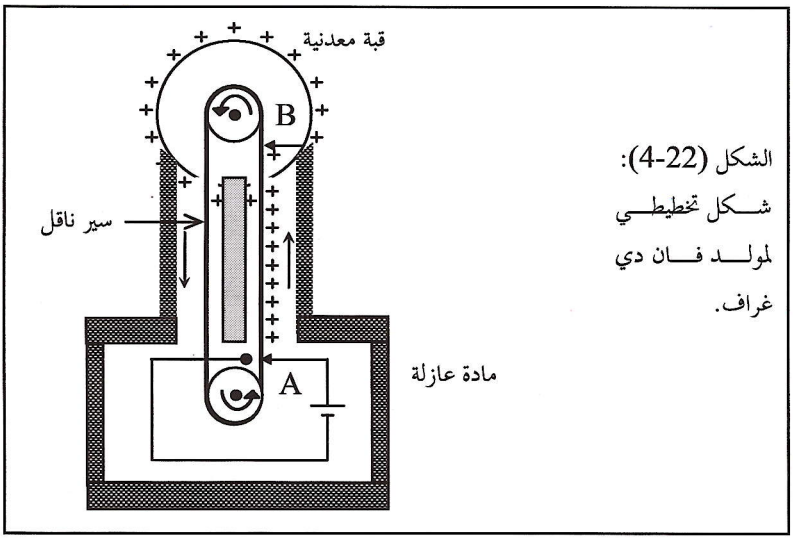
٤-٨-١ - مولد فان دي غراف *The Van de Graaff Generator:*

وصفنا في الفصل السابق تجربة تشرح طريقة انتقال الشحنات إلى الناقل المجوف (تجربة دلو الجليد لفارادي)، عندما يوضع ناقل مشحون على تماس داخل ناقل مجوف

فإن جميع شحنات الناقل الأول تنقل إلى الناقل المجوف. ومن حيث المبدأ يمكن رفع كل من شحنة وكمون الناقل المجوف بدون حدود عن طريق تكرار العملية.

استخدم روبرت فان دي غراف هذا المبدأ لتصميم وبناء مولد كهرباء ساكنة، ويستخدم هذا النوع من المولدات على نطاق واسع في اتجاهات الفيزياء النووية، الفكرة الأساسية موصوفة في الشكل (22-4)، تنقل الشحنات بصورة مستمرة إلى قطب التوتر العالي عن طريق حركة سير من مادة عازلة.

إن قطب التوتر العالي عبارة عن معدن مجوف مركب على عمود عازل. يُشحن السَّيْرُ بواسطة إنفراغ كورونا الذي يحصل بين فرشاة معدنية A (مؤلفة من أبر معدنية لينة) متمثلة بالسهم الملامس للسير، وشبكة مؤرضة تحافظ على الإبر المعدنية بكمون موجب يكون في العادة من مرتبة 10^4V، تنقل الشحنات الموجبة على السير المتحرك إلى القطب الآخر (وهو القبة المعدنية) عن طريق فرشاة معدنية أخرى في B، بما أن الحقل الكهربائي يكون مهملاً داخل الناقل المفرغ فإن الشحنات على السير تنتقل بسهولة إلى القطب الأعلى ذي التوتر العالي بغض النظر عن كمونه.



الشكل (22-4): شكل تخطيطي لمولد فان دي غراف.

عملياً يمكن رفع كمون قطب التوتر العالي إلى أن يحصل الانفراغ الكهربائي عبر الهواء. بما أن الحقل الكهربائي الذي يحول الهواء إلى ناقل هو حوالي 3×10^6V/m فإن

كرة معدنية نصف قطرها 1m يمكن أن يرفع كمونها حتى قيمة عظمى مقدارها 3×10^6V.

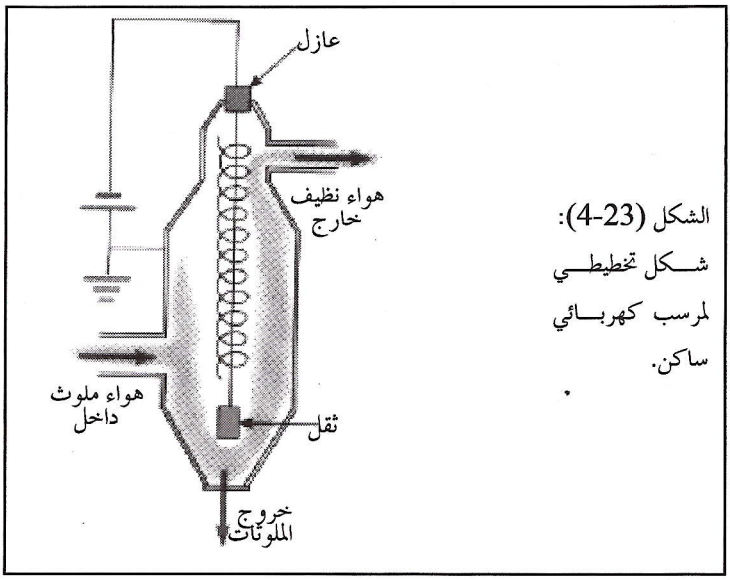
ويمكن رفع الكمون أكثر من ذلك عن طريق زيادة نصف قطر الناقل المجوف وأيضاً عن طريق وضع كامل الجملة في وعاء محكم الإغلاق مملوءة بغاز بضغط مرتفع. كما يمكن لمولدات فان دي غراف أن تنتج فروق كمون بارتفاع 20 مليون فولت. تصل البروتونات التي تسرع عبر فروق كمون كهذه إلى سرعاتٍ تمكنها من البدء في تفاعلات نووية بينها وبين نوى أهدف مختلفة.

٤-٨-٢- المرسبات الكهربائية الساكنة *The Electrostatic Precipitator:*

أحد التطبيقات الهامة للإنفراغ الكهربائي في الغازات هو جهاز يدعى المرسب الكهربائي الساكن. يستخدم هذا الجهاز، الشكل (23-4)، لإزالة مواد خاصة من مركبات الغازات وبذلك يُنقص تلوث الهواء. إنه مفيد بشكل خاص في محطات الطاقة التي تستخدم احتراق الكربون في العمليات الصناعية التي تنتج كميات هائلة من الدخان. الأجهزة الحالية قادرة على إلغاء أكثر من 99% وزناً من الرماد والغبار من الدخان.

يظهر الشكل (23-4) الفكرة الأساسية للمرسب الكهربائي الساكن. يُحافَظ على توترٍ عالٍ (من 40 kV إلى 100 kV عادةً) بين السلك الذي يسير نحو الأسفل باتجاه مركز الأنبوبة والجدار الخارجي الذي يكون مؤرضاً، ويكون كمون السلك سالب بالنسبة للجدار، بالتالي يتجه الحقل الكهربائي باتجاه السلك، يصل الحقل الكهربائي بجوار السلك إلى قيم عالية بشكل كافٍ ليسبب إنفراغ كورونا حول السلك وليشكل شوارد موجبة، وإلكترونات و شوارد سالبة مثل O_2^-. عند تسريع الإلكترونات والشوارد السالبة باتجاه الجدار الخارجي بواسطة حقل كهربائي غير منتظم، تصبح عندها الجسيمات الملوثة في تيار الغاز مشحونة بسبب التصادمات، وبسبب عملية الأسر الإلكتروني أيضاً تسحب هذه الجسيمات من قبل الحقل

الكهربائي نحو الجدار الخارجي. وعن طريق الهز الدوري للأنبوب، تتسرب الجسيمات من المحلول وتتجمع في الأسفل.



الشكل (23-4): شكل تخطيطي لمرسب كهربائي ساكن.

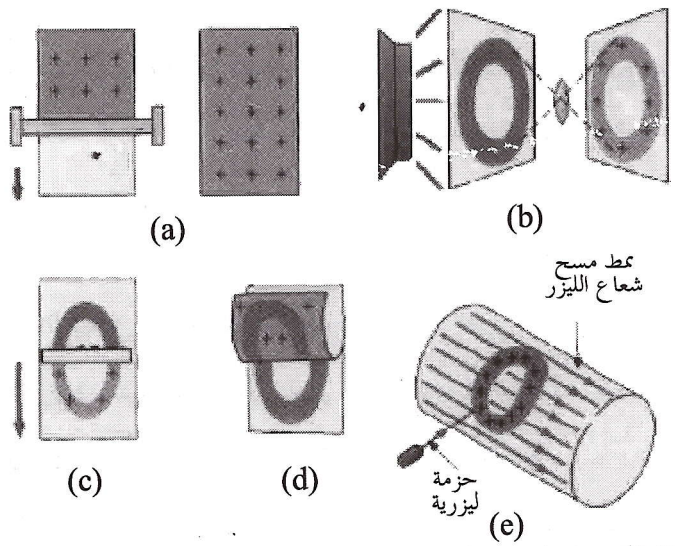
يستخدم المرسب الكهربائي الساكن بالإضافة إلى ذلك، في تغليف المواد الثمينة لحمايتها، ويكون هذا التغليف على شكل أكسيد معدني.

٤-٨-٣-التصوير الجاف Xerography:

تستخدم عمليات التصوير على نطاق واسع للحصول على نسخ من الكتابات والوثائق وغيرها من المواد المطبوعة، طورت الفكرة الأساسية لهذه العملية من قبل (Chester Carlson)، وقد حصل من أجلها على براءة اختراع في العام 1940. الفكرة الأولى التي جعلت هذا العمل استثنائي هي استخدام المواد الناقلة للصور لتشكيل صورة (ناقل الصور هو المادة التي تكون سيئة النقل في الظلمة لكنها تتحول إلى ناقل كهربائي جيد عندما تتعرض للضوء).

يوضع الشكل (24-4) عملية التصوير الجاف. يغلف في البداية لوحاً زجاجياً بغشاء رقيق من مادة ناقلة ضوئياً (عادة من السيلينوم أو مركب من مركباته)، ويعطى اللوح بعد ذلك شحنة كهربائية موجبة ساكنة وهو في وسط معتم، ثم تُسقط الصورة

الضوئية المرغوب بها على السطح الناقل ضوئياً المشحون فيصبح ناقلاً فقط في مناطق اللوح المتوافقة مع الصورة الضوئية السالبة (وهي التي عكست فيها ألوانها فالأسود يصبح أبيضاً مثلاً) فيولد الضوء في هذه المناطق حاملات شحنة (إلكترونات) تتعادل مع الشحنات الموجبة. أما المناطق الأخرى من اللوح الحامل للمادة الناقلة ضوئياً فإنها لا تتعرض للضوء وتكون متفقة مع الصورة الضوئية الموجبة (وهي التي لم تعكس فيها ألوانها)، التي تكمن فيها صورة الجسم كتوزع سطحي موجب للشحنات.



الشكل (24-4): عملية التصوير الجاف.

a. السطح الناقل للصورة يشحن إيجابياً.

b. تشكل باستخدام منبع ضوء وعدسة صورة خفية على شكل توزع شحني موجب .

c. يُذرى على السطح الذي يحوي الصورة بودرة مشحونة سلبياً فتلتصق بمناطق السطح الحاوية للصورة فقط.

d. تلصق ورقة معطاة شحنة موجبة على اللوح فتنتقل الصورة إليها. تعالج الورقة بعدئذ بالحرارة لتثبيت المسحوق على عليها.

e. طابعة ليزرية تعمل بصورة مشابهة للتصوير الجاف ما عدا أن الصورة تنتج هنا عن طريق تشغيل وإطفاء حزمة ليزرية تقوم بمسح اسطوانة مغلفنة بالسيلينوم.

في المرحلة التالية يذرى مسحوق مشحون سلبياً (يدعى Toner) على اللوح فيلتصق باللوح في مناطق الصورة الموجبة فقط، عند هذه اللحظة تصبح الصورة مرئية.

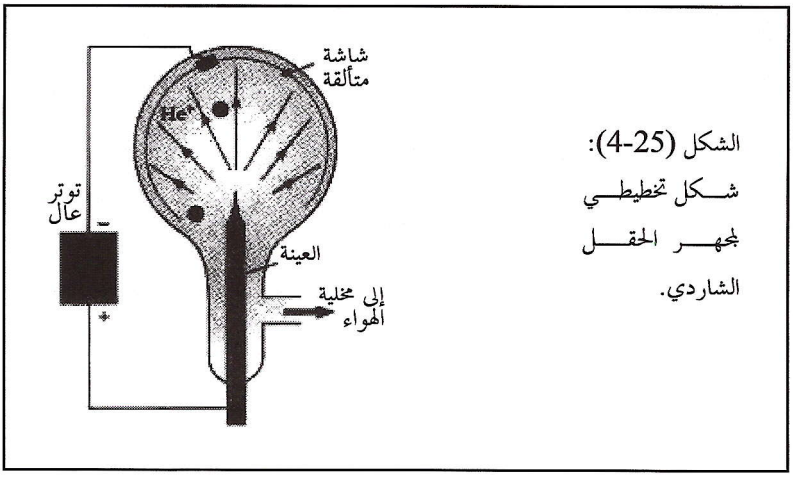
بعد ذلك تُطْبَق بشكل جيد ورقة مشحونة إيجابياً بقياس مناسب على هـذا اللـوح فتنتقل الصورة الموجبة المرئية إليه. وأخيراً تثبت مادة التونر Toner على سطح الورقة من خلال تطبيق حرارة على الورقة. وتمكّن هذه النتائج من نسخ الأصل باستمرار.

٤-٨-٤- مجهر الحقل الشاردي The Field-Ion Microscope:

أشرنا في الفقرة (4-6) أن شدة الحقل الكهربائي يمكن أن تكون عاليـة جـداً قرب الرأس المدبب على ناقل مشحون، والجهاز الذي يعمل على هذه الظاهرة هـو مجهر الحقل الشاردي، الذي اخترع من قبل E. A. Mueller مـن جامعـة ولايـة بنسلفانيا. الغاية من هذا الجهاز هي رؤية الذرات المفردة على سطح عينة صغيرة جداً.

يوضح الشكل (4-25) بينة هذا الجهاز الأساسية ، تصنع العينة المراد دراسـتها من سلك رفيع جداً ذي رأس مدبب كرأس الإبرة، ويتم ذلك عادة بطريقة التآكـل الحمضي، يكون قطر رأس السلك حوالي 0.1μm عادةً.

توضع العينة في مركز أنبوبة زجاجية مفرّغة تحوي شاشة متألقة، تدخل كميـة قليلة من الهليوم في الأنبوبة، ويطبق توتر عالٍ (فرق الكمون)، بين العينـة والشاشـة يؤدي إلى توليد حقل كهربائي عالي الشدة قرب رأس العينة.



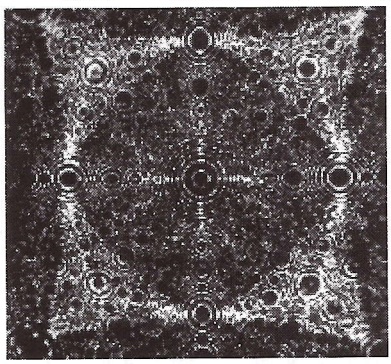
الشكل (4-25): شكل تخطيطي لمجهر الحقل الشاردي.

تتشرد ذرات الهليوم بانتزاع إلكترونات منها تحت تأثير هذا الحقل العالي وذلك في الجوار القريب من رأس السلك، فتبقى شوارد الهيليوم الموجبة التي تسـرَّع باتجـاه

الشاشة المتألقة المشحونة سلبياً، ويؤدي ذلك إلى ارتسام نمط تداخلي على الشاشة يعبر عن خصائص الذرات الفردية لرأس العينة.

من المهم تبريد رأس العينة إلى درجة تمييع النتروجين السائل على الأقل لإبطاء الذرات، كما أنه من المهم الحصول على تفريغ عالٍ، تمكننا هذه الشروط من أخذ صورة عن توزع الذرات المفردة في سطح العينة، الأمر الذي يمكننا من دراسة البنية البلورية للعيتة.

ولسوء الحظ تنشئ الحقول الكهربائية العالية إجهاداً ميكانيكياً كبيراً قرب رأس العينة، وهذا يجعل تطبيق هذه التقنية مقتصراً على العناصر المعدنية المتينة مثل التنغستين والزينيوم، يبين الشكل (26-4) نمطاً لبلورة البلاتينيوم تم الحصول علية باستخدام هذا المجهر الشاردي.



الشكل (26-4):
نمط لبلورة البلاتينيوم تم الحصول عليه باستخدام مجهر الحقل الشاردي.

أسئلة ومسائل غير محلولة

الأسئلة:

١. حقل كهربائي منتظم يوازي المحور ox، بأي اتجاه يمكن لشحنة أن تتراح ضمن هذا الحقل بدون أن يطبق عمل خارجي عليها؟

٢. علل لماذا تكون سطوح تساوي الكمون دائماً عمودية على خطوط الحقل الكهربائي؟

٣. صف سطوح تساوي الكمون من أجل الحالات التالية:

a. شحنة خطية لانهائية.

b. كرة مشحونة بشحنة منتظمة.

٤. علل، من أجل الشحنة الكهربائية الساكنة في ناقل لماذا تكون جميع نقاط هذا الناقل على سطح تساوي كمون واحد.

٥. يكون الحقل الكهربائي داخل قشرة كروية مشحونة بانتظام مساوياً للصفر فهل يدل هذا ضمناً على أن الكمون داخلها يساوي الصفر؟ أوضح ذلك.

٦. يعرف كمون الشحنة النقطية على مسافة لانهائية منها بأنه يساوي الصفر لماذا لا يمكن القول عن كمون شحنة خطية لانهائية الطول أنه يساوي الصفر عندما $r = \infty$؟

٧. كرتان بنصفي قطرين مختلفين، ناقلتان ومشحونتان وموصولتان بسلك ناقل، أي من الكرتين تملك الكثافة الأكبر من الشحنات؟

٨. ما هو الكمون الذي من أجله يمكن لقبة مولد فان دي غراف أن ترتفع؟

٩. في أي نوع من الطقس تُفرغ فيه بطارية السيارة شحنتها أكثر؟ ولماذا؟

١٠. علل ظهور تألق حول خطوط التوتر العالي في بعض الأحيان.

١١. لماذا يجب تجنب الحواف الحادة والنقاط على النواقل المستخدمة في أجهزة التوتر العالي؟

١٢. كيف تحمي الدارات الإلكترونية والمخابر من تشويشات الحقول الكهربائية؟ ولماذا تقوم بذلك؟

١٣. لماذا يكون الجلوس في سيارة ذات هيكل معدني آمناً نسبياً أثناء حصول الصواعق؟

١٤. السير على الموكيت أو السجاد ومن ثم ملامسة شخص آخر يؤدي إلى صدمة كهربائية. أوضح لماذا يحصل ذلك؟

المسائل:

المسألة (1):

تبلغ المسافة بين قطبي شمعة الاشتعال في محرك سيارة 0.06cm، ومن أجل إنتاج شرارة كهربائية في مزيج الهواء والبترين فإنه يجب التوصل إلى حقل كهربائي بينهما قيمته $3\times10^{6}V/m$. ما هي القيمة الدنيا للكمون الواجب تطبيقه من قبل دارة الاشعال لدى انطلاق السيارة؟

المسألة (2):

يسرع دويترون (نواة تحوي بروتون ونترون) خلال فرق كمون مقداره 2.7kV. المطلوب:

a. ما مقدار الطاقة التي يكسبها هذا الدويترون؟

b. ما هي السرعة التي يصل إليها إذا كان قد انطلق من السكون؟

المسألة (3):

ما هو العمل المنجز من قبل منبع طاقة كهربائية بتحريك 6.02×10^{23} إلكترون (عدد أفوكادرو من الإلكترونات)، من النقطة حيث الكمون الكهربائي 9V إلى النقطة التي كمونها 5V-؟ ملاحظة: يقاس الكمون بالنسبة إلى نقطة مرجعية مشتركة.

المسألة (4):

صفيحتان متوازيتان المسافة بينهما 1.8cm، وتبلغ قيمة الحقل الكهربائي بين هاتين الصفيحتين $2.4\times10^{4}N/C$. المطلوب:

a. أوجد فرق الكمون بين هاتين الصفيحتين.

b. ما هي الطاقة الحركية التي يكتسبها دويترون يسرع من الصفيحة الموجبة إلى السالبة؟

المسألة (5):

يتحرك إلكترون بموازاة المحور ox وتكون سرعته الابتدائية 3.7×10^{6}m/s عند نقطة المبدأ، تتناقص سرعته لتصبح 1.4×10^{5}m/s عند النقطة $x = 2$ cm. المطلوب:

a. احسب فرق الكمون بين نقطة المبدأ وبين النقطة $x = 2$ cm.

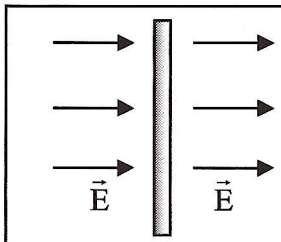
b. أي من النقطتين ذات كمون أعلى؟

المسألة (6):

قضيب عازل مشحون بشحنة خطية بكثافة مقدارها $\lambda = 40$ μC/m، وتبلغ الكثافة الكتلية الخطية لهذا القضيب $\mu = 0.1$ kg/m، يُترك هذا القضيب من السكون في حقل كهربائي منتظم شدته $E = 100$ V/m، ومتجه بشكل عمودي على القضيب، كما في الشكل (27-4). المطلوب:

a. عين سرعة القضيب بعد أن يسير مسافة مقدارها 2m.

b. أعد الطلب (a) إذا كان الحقل غير عمودي على القضيب.



الشكل (27-4):
قضيب عازل
مشحون في حقل
كهربائي منتظم.

المسألة (7):

تبلغ قيمة الكمون الكهربائي لشحنة نقطية q على بعد r منها $V = 400$ V، وتبلغ قيمة الحقل على نفس البعد r من هذه الشحنة $E = 150$ N/C. المطلوب: عين قيم كل من r , q.

المسألة (8):

على أية مسافة من شحنة نقطية مقدارها $8\mu C$ يكون الكمون الكهربائي مساوياً $3.6\times10^4 V$؟

المسألة (9):

يعطى الكمون الكهربائي الساكن المتعلق بجملة من الشحنات النقطية بالإحداثيات الديكارتية بالعلاقة التالية:

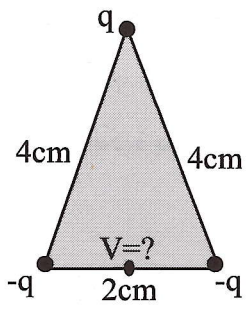
$$V=\frac{36}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}-\frac{45}{x^2+(y-2)^2}$$

حيث V بالفولت. عين قيم ومواضع جميع الشحنات في هذه الجملة.

المسألة (10):

يوجد ثلاث شحنات على رؤوس مثلث متساوي الساقين، كما في الشكل (28-4). إذا علمت أن $q=7\mu C$ فالمطلوب:

احسب قيمة الكمون الكهربائي في منتصف القاعدة.



الشكل (28-4):
توزع شحن على رؤوس مثلث.

المسألة (11):

بين أن العمل اللازم لوضع أربع شحنات نقطية، قيمة كل منها Q، على رؤوس مربع طول ضلعه S هو $5.41\ k_e\ Q^2/S$.

المسألة (12):

يبلغ الكمون الكهربائي فوق منطقة معدنية في الفضاء $V=5x-3x^2y+2yz^2$.

والمطلوب:

a. أوجد علاقات المركبات x , y , z بالحقل الكهربائي فوق هذه المنطقة.

b. أوجد قيمة الحقل في النقطة p التي إحداثياتها (1,0,-2)m.

المسألة (13):

أربع جسيمات متماثلة شحنة كل منها $q = 0.5\mu C$، وكتلة كل منها 0.01kg، تترك من السكون على رؤوس مربع طول ضلعه 0.1m. المطلوب: كم تصبح سرعة كل من هذه الشحنات عندما تتضاعف المسافة بينها وبين مركز المربع؟

المسألة (14):

الكمون في المنطقة بين $x = 0$ و $x = 6m$ هو $V = a + bx$ حيث:

$a = 10V$, $b = -7V/m$، المطلوب:

a. ما هي قيمة الكمون الكهربائي في النقطتين $x = 6m$, $x = 0.3\ m$؟

b. عين قيمة واتجاه الحقل الكهربائي في هاتين النقطتين.

المسألة (15):

عندما توضع كرة ناقلة غير مشحونة نصف قطرها a في مبدأ جملة إحداثية xyz وتكون هذه الجملة متوضعة في حقل كهربائي ابتدائي منتظم $\vec{E} = \vec{E}_0\,\vec{k}$، فإن الكمون الكهربائي الساكن الناتج من أجل النقاط داخل الكرة هو $V(x,y,z) = V_0$ ومن أجل النقاط خارج الكرة يعطى الكمون الكهربائي الساكن بالعلاقة:

$$V(x,y,z) = V_0 - E_0 z + \frac{E_0 a^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

حيث V_0 (ثابت) هو الكمون الكهربائي الساكن على الناقل. المطلوب: استخدم القانون أعلاه لتعيين المركبات (x,y,z) للحقل الكهربائي الناتج.

المسألة (16):

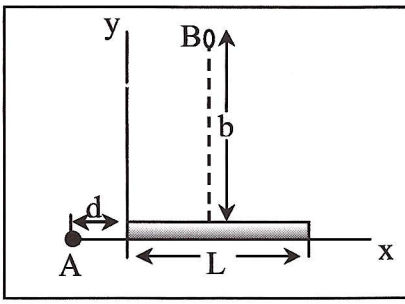
نأخذ حلقة نصف قطرها R وشحنتها الكلية Q موزعة بانتظام على محيطها. المطلوب: ما هو فرق الكمون بين نقطة مركز الحلقة ونقطة واقعة على محورها وتبعد عن المركز بمقدار 2R؟

المسألة (17):

قضيب طوله L، متوضع على طول المحور ox، تنطبق نهايته اليسرى على المبدأ، كما في الشكل (4-29)، وهو يحمل شحنة تتوزع خطياً عليه بشكل غير منتظم وفق العلاقة: $\lambda = \alpha x$ حيث α ثابت موجب، والمطلوب:

a. ما هي واحدات α، b؟

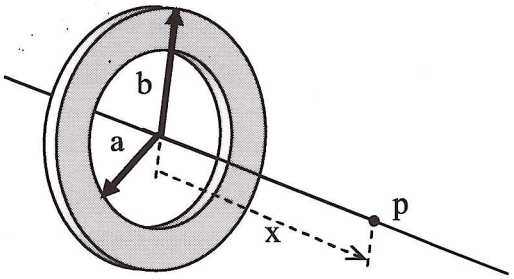
b. احسب الكمون الكهربائي في النقطة a.



الشكل (4-29): توزع شحنات مستمرة على قضيب.

المسألة (18):

احسب الكمون الكهربائي في النقطة p على محور الحلقة الموضحة في الشكل (4-30)، والتي تملك شحنة موزعة عليها بكثافة سطحية منتظمة مقدارها σ.



الشكل (4-30): توزع شحنات مستمرة على حلقة.

المسألة (19):

ما عدد الإلكترونات الواجب إزالتها من كرة ناقلة غير مشحونة بدايةً، نصف قطرها 0.3m لإنتاج كمون مقداره 7.5kV على سطحها؟

المسألة (20):

ناقلان كرويان موصولان بواسطة سلك ناقل طويل، تحمل هذه الجملة شحنة مقدارها $20\mu C$. المطلوب:

a. إذا كان نصف قطر إحداها هاتين الكرتين 4cm ونصف قطر الأخرى 6cm، ما هو الحقل الكهربائي في الجوار المباشر لكل من سطحي الكرتين؟

b. ما هو الكمون الكهربائي لكل من الكرتين؟

الفصل الخامس

الطاقة الكهربائية الساكنة

Electrostatic energy

٥-١ – طاقة مجموعة من الشحنات

Energy of a group charges:

نعرف الطاقة الكهربائية الساكنة لمجموعة شحنات كهربائية ذات توزع معين بأنها العمل اللازم لبناء هذا التوزع بنقل الشحنات المكونة له من اللانهاية بسرعة لا متناهية في الصغر.

نأخذ بدايةً مجموعة من الشحنات النقطية $(q_1,q_2,..,q_n)$ ذات توزع محدد ولنحسب استناداً للتعريف السابق الطاقة الكهربائية الساكنة المختزنة في هذه المجموعة.

لتكن $(p_1,p_2,..,p_n)$ هي على الترتيب مواضع هذه الشحنات واستناداً إلى التعريف تكون الطاقة اللازمة لنقل q_1 مثلاً من اللانهاية إلى موضعها p_1 مساوية للعمل المبذول لعملية النقل هذه، وهي تعطى بالعلاقة:

$$W_1 = -\int_0^{p1} q_1 \vec{E}\, d\vec{r} = q_1 U_1$$

وإذا فرضنا أن الموقع p_1 لا يتأثر بأي حقل من أية شحنة أخرى (على اعتبار أن الشحنة q_1 هي أول شحنة تنقل)، فتكون قيمة محصلتي الحقول الكهربائية والكمون الكهربائي مساويتين للصفر في هذه النقطة، وهكذا تكون الشحنة q_1 قد انتقلت من ∞ حيث الكمون معدوم إلى p_1 حيث الكمون معدوماً أيضاً وبالتالي فالعمل الكهربائي المبذول على هذا الانتقال يكون معدوماً أي أن:

$$W_1 = q_1.U_1 = 0$$

ننقل الآن الشحنة q_2 من ∞ إلى الموضع p_2 في المجموعة بسرعة لامتناهية في الصغر مع تثبيت الشحنة q_1 في موضعها p_1، إن العمل اللازم تقديمه للقيام بهذه العملية هو الطاقة الكامنة للشحنة q_2 الناتجة عن تأثرها بالكمون المتولد عن الشحنة q_1 في النقطة p_2،

وهو يكون على حساب قوة أو طاقة خارجية أو على حساب قوة أو طاقة الحقل وذلك بحسب إشارتي الشحنتين، وهكذا تكون الطاقة الكامنة للشحنة q_2:

$$W_2 = q_2 U_1(p_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2}$$

لننقل الآن الشحنة q_3 من اللانهاية بسرعة لا متناهية في الصغر إلى الموضع p_3 في المجموعة حيث الكمون المتولد عن الشحنتين q_1 و q_2 المفروضتين بأنهما ثابتتين في موضعهما، فتكون طاقتها:

$$W_3 = q_3[U_1(p_3) + U_2(p_3)] = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{p_1 p_3} + \frac{q_2}{p_2 p_3}\right)$$

وهكذا فإن الطاقة الكامنة للشحنة q_i المنقولة من ∞ إلى الموضع p_i ضمن المجموعة بسرعة لا متناهية في الصغر وحيث أنه يوجد في الموضع p_i الكمون التأثيري لجميع الشحنات النقطية التي نقلناها قبل q_i، هي:

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{p_1 p_i} + \frac{q_2}{p_2 p_i} + \cdots\cdots + \frac{q_{i-1}}{p_{i-1} p_i}\right)$$

$$W_i = q_i U_i = q_i \sum_{j=1}^{i-1} U_j(p_i) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{p_i p_j} \qquad (5\text{-}1)$$

يمثل المجموع السابق الكمون الناشئ عن الشحنات $(q_1, q_2, .., q_{i-1})$ في الموقع p_i وهو لا يتضمن الكمون الذاتي للشحنة q_i.

بفرض أننا نقلنا جميع الشحنات فتكون الطاقة الكهربائية الساكنة الكلية للمجموعة n من الشحنات الكهربائية النقطية المتوازنة هي:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{p_i p_j} \qquad (5\text{-}2)$$

يتمثل المجموع السابق في المصفوفة أدناه بمجموع كافة الحدود تحت القطرية $(i, j < i)$ فقط، أي:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i,j<i}^{n} \frac{q_i q_j}{p_i p_j}$$

$2W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_{i\neq j}^{n}\frac{q_iq_j}{p_ip_j}$		$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j,i<j}^{n}\frac{q_jq_i}{p_jp_i}$							
		$W_1=0$	W_2	W_3	...	W_j	...	W_{n-1}	W_n
$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_{i,j<i}\frac{q_iq_j}{p_ip_j}$	$W_1=0$	$\frac{q_1q_1}{p_1p_1}$	$\frac{q_1q_2}{p_1p_2}$	$\frac{q_1q_3}{p_1p_3}$	... ...	$\frac{q_1q_j}{p_1p_j}$	... ...	$\frac{q_1q_{n-1}}{p_1p_{n-1}}$	$\frac{q_1q_n}{p_1p_n}$
	W_2	$\frac{q_2q_1}{p_2p_1}$	$\frac{q_2q_2}{p_2p_2}$	$\frac{q_2q_3}{p_2p_3}$	... ...	$\frac{q_2q_j}{p_2p_j}$	... ...	$\frac{q_2q_{n-1}}{p_2p_{n-1}}$	$\frac{q_2q_n}{p_2p_n}$
	W_3	$\frac{q_3q_1}{p_3p_1}$	$\frac{q_3q_2}{p_3p_2}$	$\frac{q_3q_3}{p_3p_3}$	... ...	$\frac{q_3q_j}{p_3p_j}$	... ...	$\frac{q_3q_{n-1}}{p_3p_{n-1}}$	$\frac{q_3q_n}{p_3p_n}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ .... ⋮	⋮	⋮ .... ⋮	⋮	⋮
	W_i	$\frac{q_iq_1}{p_ip_1}$	$\frac{q_iq_2}{p_ip_2}$	$\frac{q_iq_3}{p_ip_3}$	... ...	$\frac{q_iq_j}{p_ip_j}$	... ...	$\frac{q_iq_{n-1}}{p_ip_{n-1}}$	$\frac{q_iq_n}{p_ip_n}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ .... ⋮	⋮	⋮ .... ⋮	⋮	⋮
	W_{n-1}	$\frac{q_{n-1}q}{p_{n-1}p}$	$\frac{q_{n-1}q}{p_{n-1}p}$	$\frac{q_{n-1}q}{p_{n-1}p}$	... ...	$\frac{q_{n-1}q}{p_{n-1}p}$	... ...	$\frac{q_{n-1}q_n}{p_{n-1}p_n}$	$\frac{q_{n-1}q}{p_{n-1}p}$
	W_n	$\frac{q_nq_1}{p_np_1}$	$\frac{q_nq_2}{p_np_2}$	$\frac{q_nq_3}{p_np_3}$	... ...	$\frac{q_nq_j}{p_np_j}$	... ...	$\frac{q_nq_{n-1}}{p_np_{n-1}}$	$\frac{q_nq_n}{p_np_n}$

حيث أن $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ لم يكتب في خلايا المصفوفة لضيق المساحة، وإن الجمع على $i=1,2,\ldots\ldots,n$ وَ $j=1,2,\ldots\ldots,n$ بدون أي قيد أو شرط يعطى بمجموع جميع حدود المصفوفة أعلاه بدون استثناء، أي:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j}^{n}\frac{q_iq_j}{p_ip_j}=\ldots\ldots$$

أما إذا كان الجمع مقيداً بأحد الشروط $(i\neq j),(j,i<j)$ مثلاً، فإنه يعني مجموع جميع حدود المصفوفة فوق القطرية وجميع الحدود اللاقطرية على الترتيب، أي:

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j<i}^{n}\frac{q_iq_j}{p_ip_j}\quad;\quad 2W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}^{n}\frac{q_iq_j}{p_ip_j}$$

إن الدليلين i,j يلعبان الدور نفسه في المجموع السابق، وبالتالي يمكن كتابة هذا المجموع على أحد الشكلين التاليين وذلك بالاستعانة بالمصفوفة السابقة:

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j<i}^{n}\frac{q_iq_j}{p_ip_j}\quad;\quad W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j,i<j}^{n}\frac{q_jq_i}{p_jp_i}$$

وبالجمع طرفاً لطرف نجد:

$$2W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sum_{i,j<i}^{n}\frac{q_iq_j}{p_ip_j}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j,i<j}^{n}\frac{q_jq_i}{p_jp_i}\right)$$

$$2W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}^{n}\frac{q_iq_j}{p_ip_j}=\sum_{i=1}^{n}q_i\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{q_j}{p_ip_j}\right)$$

يمثل المقدار بين قوسين مجموع كمونات جميع الشحنات في النقطة p_i موقع الشحنة q_i باستثناء الكمون الذاتي المتولد عنها. وهو ضعف الكمون المستخدم في العلاقة (5-1) ومن أجل i-1= n، لذلك نستخدم الرمز U_i أيضاً للدلالة عليه ونكتب:

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=j}^{n}q_iU_i \qquad (5\text{-}3)$$

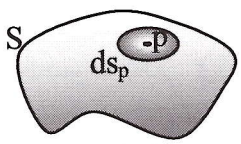
٥-٢- طاقة توزع مستمر من الشحنات

:Energy of continues distribution of charges

درسنا في الفقرة السابقة الطاقة الكهربائية الساكنة الكلية لتوزع مؤلف من عدد من الشحنات النقطية المتوضعة في نقاط محددة ولنعمم ذلك من أجل توزع سطحي

للشحنات بكثافة سطحية σ غير منتظمة بشكل عام. يحوي كل عنصر سطح ds_p المحيط بالنقطة p، على الشحنة العنصرية $dq_p=\sigma.ds_p$ كما في الشكل (5-1). ويمكن دوماً اعتبار الشحنة المتوضعة على سطح عنصري (تفاضلي) بأنها نقطية. بفرض U_p هو الكمون في النقطة p المتولد عن التوزع السطحي للشحنات ما عدا الشحنة العنصرية dq_p الموجودة في النقطة p وبالتالي فإن طاقة هذه الشحنة العنصرية هي:

$$dW = dq_p \cdot U_p = \sigma \cdot ds_p \cdot U_p$$



الشكل (5-1):
الطاقة الكامنة لتوزع سطحي مستمر.

وتكون الطاقة الكهربائية الساكنة الكلية للتوزع السطحي للشحنات بكثافة سطحية منتظمة σ مساوية لمجموع طاقات الشحنات العنصرية، وبالاستعانة بالعلاقة (5-3) نجري تكاملاً للطاقة على كافة السطح S على النحو التالي:

$$W = \frac{1}{2}\iint_S \sigma U_p ds_p \qquad (5\text{-}4)$$

وباعتبار أن الكمون في أية نقطة من جسم مشحون يكون ثابت لأن الجسم المشحون يشكل سطح تساوي كمون، فإنه يمكن حذف الأدلة من العلاقة (5-4) فتصبح كما يلي:

$$W = \frac{1}{2}\iint_S \sigma U ds \qquad (5\text{-}5)$$

يمكن تطبيق النتيجة السابقة على حجم يحوي توزع حجمي ما من الشحنات بكثافة حجمية منتظمة ρ فتكون الطاقة الكهربائية الساكنة الكلية مساوية لمجموع طاقات الشحنات العنصرية، وبالاستعانة بالعلاقة (5-3) نجري تكاملاً للطاقة على كافة الحجم V على النحو التالي:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \rho U dv \qquad (5\text{-}6)$$

٥-٣- طاقة ثنائي أقطاب في حقل كهربائي ساكن

:Energy of dipole in an electrostatic field

درسنا سابقاً حركة ثنائي الأقطاب الكهربائي الموضوع في حقل كهربائي، ونريد الآن حساب طاقته الكهربائية الساكنة عند وضعه في حقل كهربائي.

يتألف ثنائي الأقطاب الكهربائي من شحنتين نقطيتين متساويتين بالقيمة ومتعاكستين بالإشارة. ليكن p_1 موقع إحدى شحنتي الثنائي وليكن p_2 موقع الشحنة الأخرى، وبإهمال الثأثير المتبادل بين شحنتي الثنائي نفترض الكمون الكلي في الموضع p_1 هو U_{p1} والكمون الكلي في p_2 هو U_{p2} (يستبعد من هذين الكمونين كمونا كلٍ من شحنتي الثنائي الذاتيين التأثيريين لكلٍ منهما على الأخرى. أي أن الكمونين U_{p2} U_{p1}, ناتجان عن الشحنات المولدة للحقل الذي وضعنا فيه هذا الثنائي) وتكون بالتالي الطاقة الكلية لهذا الثنائي مساوية لمجموع طاقتي شحنتيه أي:

$$W = qU_{p1} - qU_{p2} = q\,(U_{p1} - U_{p2}) \qquad (5\text{-}6)$$

إن $U_{p1} - U_{p2}$ هو فرق الكمون بين موقعي شحنتي الثنائي، وإذا رمزنا لطول الثنائي بالرمز ℓ فإنه بحسب تعريف الثنائي يمكننا أن نكتب فرق الكمون بين نقطتين ضمن الحقل $\vec{E}$ على النحو:

$$U_{p1} - U_{p2} = \int_0^{\ell} \vec{E}\,d\vec{r} \Rightarrow U_{p1} - U_{p2} = \vec{E}.\vec{\ell}$$

وبالتالي تصبح العلاقة (5-6) على النحو:

$$W = q\,.\vec{E}\,.\vec{\ell} = \vec{E}\,.\vec{p} \qquad (5\text{-}7)$$

حيث أن المتجه $\vec{p}$ يمثل عزم ثنائي الأقطاب الكهربائي والذي يعطى بالعلاقة:

$$\vec{p} = q\ \vec{\ell} \qquad (5\text{-}8)$$

٥-٤- الطاقة الكامنة في مكثفة مشحونة

:Potential Energy in charged Capacitor

إن إضافة شحنة مقدارها ΔQ إلى مكثفة شحنتها Q وفرق الكمون بين لبوسيها U يتطلب بذل عمل مقداره:

$$\Delta W = (\Delta Q) \cdot U \qquad (5\text{-}9)$$

عند شحن المكثفة من القيمة 0 إلى القيمة Q فإن ذلك يترافق مع تزايد فرق الكمون بين لبوسيها من القيمة 0 إلى القيمة U ومعنى ذلك أن القيمة المتوسطة لفرق الكمون أثناء عملية الشحن $\frac{U}{2}$ وبذلك يكون العمل اللازم لشحن المكثفة بالشحنة Q هو:

$$W = \frac{1}{2}.U.Q \qquad (5\text{-}10)$$

وحسب مبدأ انحفاظ الطاقة يتحول هذا العمل الذي قدم من قبل المولد إلى طاقة كهربائية تخزن في المكثفة ونستطيع الحصول مجدداً على هذه الطاقة عند تفريغ المكثفة وتظهر على شكل شرارة أثناء عملية التفريغ تشتمل على أشكال أخرى من الطاقة مثل الضوء والصوت والحرارة ... . وتسمى الطاقة الداخلية أو الطاقة الكامنة للمكثفة ونرمز لها بالرمز E_{in} ونكتب بالتالي:

$$E_{in} = \frac{1}{2}.U.Q \qquad (5\text{-}11)$$

وبكتابة $Q = C.U$ تصبح العلاقة (5-11) كما يلي:

$$E_{in} = \frac{1}{2}.C.U^2 \qquad (5\text{-}12)$$

وبكتابة $U = \frac{Q}{C}$ تصبح العلاقة (5-11) كما يلي:

$$E_{in} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \qquad (5\text{-}13)$$

إن شحن المكثفة يعني نقل الشحنة من أحد طرفيها إلى الآخر، وهو يكافئ شحن ناقل بنفس الشحنة التي تنقل إليه من اللانهاية، فالطاقة الكامنة له هي العمل اللازم لنقل تلك الشحنة وتحسب بنفس الطريقة آنفة الذكر.

٥-٥- طاقة شحنة نقطية *Energy of Point Charge:*

تولد الشحنة النقطية حقلاً كهربائياً ساكناً في كل نقطة من نقاط الفضاء وتعطى قيمة هذا الحقل في كل نقطة من الفراغ بدلالة بعدها r عن الشحنة النقطية بالعلاقة التالية:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

من المعلوم أن الطاقة الكامنة لا تكون معرفة إلا بوجود أكثر من شحنة، ولكننا يمكن أن نفهم أن الطاقة الكامنة تكون موجودة حيث يوحد الحقل، ويمكن اعتبارها متناسبة مع مربع شدته في نقطة ما ومع الحجم المحيط بتلك النقطة، ونكتب:

$$dW = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV \qquad (5\text{-}14)$$

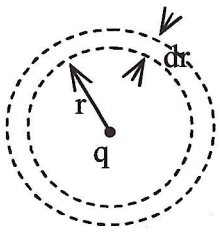
نأخذ الحجم العنصري dV كقشرة كروية سماكتها dr وسطحها $2\pi r^2$ ونجعله محيطاً بالشحنة المذكورة كما في الشكل (2-5)، ولحساب الطاقة الكامنة في هذا الحجم العنصري dV نكتب:

$$dW = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \right)^2 .2\pi r^2 .dr$$

$$dW = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2} .dr$$

وهكذا فإن الطاقة الكلية تحسب بأن نكامل على نصف القطر r من الصفر إلى اللانهاية فنجد:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\infty \varepsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$



الشكل (2-5):
الطاقة الكامنة للقل الكهربائي.

$$W = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r}\right]_0^\infty \qquad (5\text{-}15)$$

إن قيمة التكامل السابق هي عدم تعيين أي لا معنىً فيزيائياً لها وأن هذه المشكلة ناتجة من كوننا طبقنا على حساب الطاقة قوانين القشرة الكروية واعتبرنا أبعاد الشحنة

النقطية معدومة، و يمكن حل هذه المشكلة بإعطاء أبعاد غير معدومة لحوامل الشحنة النقطية ،لأنه طالما أن الشحنة موجودة فإن لها أبعاد وإن إلغاء هذه الأبعاد قد يسبب في بعض الحالات تناقضات كما في حالتنا هذه.

ملاحظة:

بفرض R نصف قطر صغير جداً للشحنة النقطية q فالعلاقة (5-15) تصبح:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{R} \qquad (5\text{-}16)$$

من هذه العلاقة نلاحظ أن الطاقة الكامنة في هذه الحالة مقدار كبير جداً، وهذا يتوافق مع حالة مجموعة من الشحنات النقطية المتماثلة موضوعة في حجم صغير جداً يؤدي إلى تنافرها بشكل قوي جداً نظراً لطاقتها الكامنة الكبيرة (إنها موجبة في هـــذه الحالة). هذه الفكرة تفسر ظاهرة الرؤوس المدببة التي تعمل على تشريد الهواء المجاور، أو تتسبب في حصول شرارة كهربائية بين الرأس المدبب وبين أقرب ناقل إليه.

أما إذا كان نصف قطر R كبيراً فالعلاقة السابقة تعطي الطاقة الكامنة لكرة مشحونة وتكون قيمتها منطقية.

مسائل محلولة:

مسألة ١:

احسب التغير في الطاقتين الكامنة والحركية لإلكترون يتحرك بـــين نقطـــتين واقعتين ضمن حقل كهربائي يبلغ فرق الكمون بينهما 1V، علماً أن شحنة الإلكترون تساوي $e=1.602\times10^{-19}$ Coul.

الحل:

نعلم أن العمل بدلالة غيره من المقادير الفيزيائية يساوي:

العمل = الشحنة × فرق الكمون = تغير الطاقة الكامنة = تغير الطاقة الحركية. أي:

$$\Delta E_{kin} = \Delta E_{po} = q.U = 1.602\times10^{-19}\times1 = 1.602\times10^{-19} J$$

ونوضح هذا التغير كما يلي: إذا تمت حركة الإلكترون على حساب قوى خارجيـــة ضد الاتجاه الذي تفرضه قوى الحقل الكهربائي ، فإن طاقته الكامنة تـــزداد بمقـــدار

$1.602\times10^{-19}J$ وتتناقص بالمقابل طاقته الحركية بنفس المقدار، أما إذا تمت حركة الإلكترون على حساب قوى الحقل الكهربائي وفق الاتجاه الذي يفرضه هذا الحقل تتناقص طاقته الكامنة بالمقدار السابق وتزداد طاقته الحركية بنفس المقدار، ويعزى ذلك إلى قانون انحفاظ الطاقة.

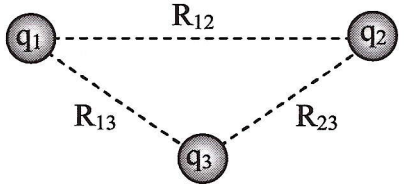
مسألة٢:

احسب الطاقة الكامنة لثلاث جسيمات مشحونة بشحنات مختلفة والموضحة بالشكل (5-3)، إذا علمت أن شحناتها $q_1=2\mu C, q_2=-6\mu C, q_3=3\mu C$ وأن المسافات بينها $r_{12}=3m, r_{12}=4m, r_{12}=5m$.

الحل:

إن جلب q_1 من اللانهاية إلى موقعها البعيد عن تأثيرات أية شحنة أخرى لا يتطلب أي عمل، أما جلب q_2 من اللانهاية إلى موقعها الذي كمونه V_1 والناتج عن q_1 فقط فهو يتطلب العمل q_2V_1، وحيث أن هذا العمل يساوي الطاقة الكهربائية الكامنة U لجملة هذين الجسيمين عندما تفصل بينهما مسافة r_{12} كما في الشكل (5-3) فإننا نكتب:

$$U = q_2 V_1 = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



الشكل (5-3): تتعلق الطاقة الكامنة بالشحنتين والمسافة الفاصلة بينهما.

وهي طاقة موجبة إذا كانت هاتين الشحنتين من نفس الإشارة، وهذا يوافق قوة تتدافع بينهما والعمل سالب لأنه يصرف من قبل قوة خارجية عليهما حتى تصبح إحداهما بجانب الأخرى. أما إذا كان للشحنتين إشارتان متعاكستان فالطاقة سالبة، وهذا يوافق قوة تجاذب بينهما والعمل موجب لأن الشحنتين في هذه الحالة تعطيانه للوسط الخارجي بعد تصبحان إحداهما بجانب الأخرى.

مسألة (17):

شحنة أسطوانية طويلة نصف قطرها R، موزعة بانتظام بكثافة حجمية ρ، المطلوب: أوجد الحقل الكهربائي على بعد r من محور هذه الشحنة حيث r < R.

مسألة (18):

شحنة على شكل صفيحة رقيقة مستوية كثافتها $9\mu c/m^2$، المطلوب: أوجد الحقل الكهربائي في الجوار المباشر للصفيحة مقاساً من نقطة الوسط.

مسألة (19):

قضيب معدني منتظم طولاني، نصف قطره 5cm، مشحون وكثافة التوزع الطولي لشحنته هي 30 mC/m، أوجد الحقل الكهربائي عند الأبعاد التالية من مركز هذا القضيب: 3cm , 10cm , 100cm. ملاحظة: تقاس المسافات عمودياً على هذا القضيب.

مسألة (20):

كرة معزولة قطرها 8cm، وتحمل شحنة مقدارها 5.7μc، موزعة بانتظام على حجمها، المطلوب: احسب الشحنة التي تتضمنها كل من الكرتين اللتين نصفا قطريهما 2cm , 6cm، واللتين تتمركزان مع الكرة الأساسية.

مسألة (21) :

قشرة كروية ناقلة قطرها الداخلي 4cm، ونصف قطرها الخارجي 5cm، تحمل شحنة 10μc، إذا وضعت شحنة نقطية مقدارها 2μc في مركز هذه القشرة. أوجد الكثافة السطحية على السطح الداخلي، ثم على السطح الخارجي لهذه القشرة الكروية.

مسألة (22):

كرة ناقلة مصمتة نصف قطرها 2cm، تملك شحنة مقدارها 8μc، ويوجد قشرة كروية ناقلة نصف قطرها الداخلي 4cm، والخارجي 5cm، متمركز مع الكرة السابقة، وتحمل شحنة مقدارها 4μc-، المطلوب: أوجد الحقل الكهربائي على الأبعاد التالية من المركز المشترك (a , r = 1cm (b , r = 3cm (c , r = 4.5cm (d , r = 7cm.

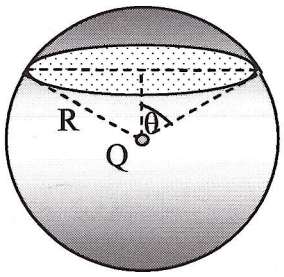
مسألة (23):

سلك مستقيم طويل محاط بأسطوانة معدنية مجوفة، ينطبق محورها على هذا السلك. يوجد على السلك شحنة تتوزع عليه بكثافة مقدارها λ في واحدة الطول. ويوجد على الأسطوانة شحنة تتوزع عليها بكثافة مقدارها 2λ في واحدة الطول، المطلوب من هذه المعطيات وباستخدام قانون غوص، أوجد كلاً مما يلي:

a. مقدار الشحنة في واحدة الطول على كل من السطحين الداخلي والخارجي لهذه الأسطوانة. b. الحقل الكهربائي خارج الأسطوانة على بعد r من المحور المشترك.

مسألة (24):

تحيط كرة نصف قطرها R بشحنة نقطية مقدارها Q، متوضعة في مركزها، المطلوب: a. أظهر أن التدفق الكهربائي خلال قبة دائرية تقابل نصف زاوية مقدارها θ، كما في الشكل جانباً، يعطى بالعلاقة $\Phi=\frac{Q}{2\varepsilon_0}(1-\cos\theta)$. b. ما هو التدفق في كل من الحالتين $\theta = 90^\circ$, $\theta = 180^\circ$؟



الشكل (3-25):
التدفق من خلال قبة كروية الناتج عن شحنة موضوعة في مركز الكرة المقتطعة منها هذه القبة.

مسألة (25):

كرة مصمتة معزولة نصف قطرها b، تحمل شحنة تتوزع عليها بكثافة حجمية غير منتظمة، تعطى هذه الكثافة بالعلاقة $\rho = c\,r$، حيث $0<r\le b$، c ثابت، المطلوب: أوجد قيمة الشحنة الموجودة ضمن نصف القطر في الحالتين: a- $R < b$, b- $R>b$.

(لاحظ: أن عنصر الحجم dV لقشرة كروية نصف قطرها r وسماكتها dr يساوي $4\pi r^2 dr$).

الفصل الرابع

الكمون الكهربائي

Electric Potential

لقد أدخل مفهوم الطاقة الكامنة في الفيزياء العامة (1)، وتمت دراسته بالارتباط مع القوى المحافظة كقوى الجاذبية وقوى المرونة لنابض. وباستخدام قانون انحفاظ الطاقة، فإنه يمكننا في معظم الأحيان تجنب العمل مباشرة مع القوى عند حل مسائل الميكانيك المختلفة، وسنرى في هذا الفصل أن مفهوم الطاقة هو مفهوم هام وقيم في دراسة الكهرباء.

بما أن القوى الكهربائية المعطاة بقانون كولون هي محافظة، فإنه يمكن وصف الظواهر الكهربائية بصورة مناسبة بتابعية الطاقة الكامنة الكهربائية.

تمكننا هذه الفكرة من تعريف مقدار كمي جديد يدعى الكمون الكهربائي (Electric Potential)، وبما أن الكمون هو مقدار تابع للموضع، فإنه يقدّم طريقة لوصف ظواهر الكهرباء الساكنة أسهل من تلك التي يقدمها الحقل الكهربائي.

وسنرى في فصول لاحقة أن مفهوم الكمون الكهربائي ذو قيمة عالية من الناحية العملية، وفي الحقيقة إن قياس التوتر بين أي نقطتين من دارة كهربائية هو ببساطة فرق الكمون الكهربائي بين هاتين النقطتين.

٤-١- فرق الكمون والكمون الكهربائي

:Potential Difference & Electric Potential

عند وضع شحنة نقطية q_0 في حقل كهربائي $\vec{E}$ فإن القوى الكهربائية التي تخضع لها هذه الشحنة من قبل هذا الحقل هي $q_0\vec{E}$، هذه القوة هي محصلة شعاعية للقوى المفردة المؤثرة على q_0 من قبل الشحنات المختلفة المولدة للحقل $\vec{E}$، وينتج من ذلك أن القوة $q_0\vec{E}$ محافظة لأن القوى المحكومة بقانون كولون محافظة. عندما تتحرك

الشحنة q_0 ضمن الحقل الكهربائي فإن العمل المنجز على q_0 من قبل الحقل الكهربائي يساوي سالب العمل المنجز من قبل قوة خارجية تستخدم لإنجاز نفس الإزاحة للشحنة، من أجل انتقال تفاضلي $d\vec{s}$ ، فإن العمل المنجز من قبل الحقل الكهربائي هو $\vec{F}\,d\vec{s} = q_0\,\vec{E}.d\vec{s}$. وهذا ينقص الطاقة الكامنة للحقل الكهربائي بالمقدار $dU = -q_0.\vec{E}.d\vec{s}$. من أجل إزاحة محدودة بين النقطتين B , A لشحنة اختبارية فإن التغير في الطاقة الكامنة $\Delta U = U_B - U_A$ هو:

$$\Delta U = - q_0 \int_A^B \vec{E} . d\vec{s} \qquad (4\text{-}1)$$

يتم التكامل على طول المسار الذي تتحرك وفقه q_0 من A إلى B، ويدعى هذا التكامل إما تكامل المسار (Path integral) أو التكامل الخطي (Line integral). بما أن القوة $q_0\,\vec{E}$ محافظة، فإن هذا التكامل الخطي لا يتعلق بشكل المسار بين B , A.

وبما الطاقة الكامنة لكل واحدة شحنة $(\frac{U}{q_0})$ لا تتعلق بقيمة q_0، ولها قيمة وحيدة في كل نقطة من الحقل الكهربائي. يدعى المقدار $(\frac{U}{q_0})$ الكمون الكهربائي أو ببساطة الكمون، ورمزه V، وعليه فإن الكمون الكهربائي في أية نقطة من حقل كهربائي يعطى بالعلاقة التالية:

$$V = \frac{U}{q_0} \qquad (4\text{-}2)$$

بما أن الطاقة الكامنة مقدار سلمي فإن الكمون الكهربائي هو أيضاً مقدار سلمي. يعرف فرق الكمون $\Delta V = V_B - V_A$ بين النقطتين B , A بأنه تغير الطاقة الكامنة (فرق الطاقة الكامنة) بين هاتين النقطتين مقسماً على قيمة الشحنة الاختبارية q_0 ويعطى بالعلاقة:

$$V = \frac{U}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} . d\vec{s} \qquad (4\text{-}3)$$

ونشير هنا إلى أنه لا يجوز الخلط بين فرق الكمون والفرق في الطاقة الكامنة، ويتناسب فرق الكمون طرداً مع تغير الطاقة الكامنة، ومن العلاقة (4-3) نجد أن المفهومين يرتبطان بالعلاقة $\Delta U = q_0.\Delta V$.

إن الكمون الكهربائي هو ميزة (صفة) سلمية للحقل، وهو مستقل عن الشحنات المتوضعة ضمن الحقل. وتتوضع (تكمن) الطاقة الكامنة أيضاً في الحقل الكهربائي. لكن وعلى أية حال وبما أننا مهتمون بالكمون الكهربائي في موضع الشحنة وبالطاقة الكامنة الناتجة عن التأثير المتبادل بين الشحنة والحقل، فإننا سنتبع المفهوم الشائع في الحديث عن الطاقة الكامنة إذا كانت تخص الشحنة، إلا عندما نريد معلومات نوعية خاصة عن انتقال الطاقة بين الحقل والشحنة.

بما أنه وكما ذكر سابقاً أن التغير في الطاقة الكامنة الكهربائية لشحنة يساوي بالقيمة العمل المنجز من قبل القوى الكهربائية ولكنه يعاكسه بالإشارة، فإن فرق الكمون الكهربائي ΔV بين النقطتين A , B يساوي العمل المنجز لكل واحدة شحنة، والذي تنجزه قوى خارجية لتحريك الشحنة الاختبارية من A إلى B دون تغير في الطاقة الحركية لهذه الشحنة الاختبارية.

تعرف العلاقة (3-4) فرق الكمون الكهربائي فقط، أي أن الفروق في V هي ذات معنىً مهم، أما القيمة المطلقة للكمون الكهربائي في نقطة (تُعرّف على أنها العمل اللازم لنقل واحدة الشحنات الموجبة من اللانهائية إلى هذه النقطة) فهي لا تستخدم عملياً ولا تهم في دراسة الحقول الكهربائية.

يُختار تابع الكمون الكهربائي في معظم الأحيان مساوٍ للصفر في نقطة ما مناسبة. أي نضع الكمون عشوائياً مساوياً للصفر في نقطة يكون بُعدها لانهائياً عن الشحنة المولدة للحقل الكهربائي. وبهذا الاختيار نستطيع القول إن الكمون في نقطة ما يساوي العمل اللازم لكل واحدة شحنة من شحنة اختبارية موجبة لنقلها من اللانهاية إلى هذه النقطة. وعليه إذا أخذنا $V_A = 0$ في اللانهاية في العلاقة (3-4) فإن الكمون في أية نقطة p هو:

$$V_p = -\int_{\infty}^{p} \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad (4\text{-}4)$$

تمثل V_p في الحقيقة فرق الكمون بين النقطة P ونقطة واقعة في اللانهاية أي أن العلاقة (4-4) هي حالة خاصة من العلاقة (3-4).

بما أن فرق الكمون هو قياس لطاقة واحدة الشحنة فإن واحدة الجملة الدولية SI لفرق الكمون هي جول لكل كولون J/C وتعرف بواحدة تدعى الفولت V أيضاً، أي أن:

$$1V = 1J \ / \ 1C$$

وهذا يعني أنه يجب إنجاز عمل مقداره 1J لنقل شحنة مقدارها 1C خلال فرق كمون مقداره 1V. تظهر العلاقة (4-3) أن فرق الكمون الكهربائي له أيضاً واحدة الحقل الكهربائي مضروبة بواحدة المسافة. مما سبق ينتج أنه يمكن التعبير عن واحدة الحقل الكهربائي $\frac{N}{C}$ في الجملة الدولية بالفولت لكل متر $\frac{V}{m}$ أي أن:

$$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

إن واحدة الطاقة الشائعة الاستخدام في الفيزياء الذرية والفيزياء النووية هي الإلكترون فولت (Electron-Volt) ورمزها eV، وتعرف بأنها الطاقة التي يكسبها (أو يخسرها) الإلكترون (أو البروتون) عندما يتحرك خلال فرق كمون كهربائي مقداره 1V، وبما أن $1V = 1J \ / \ 1C$، وبما أن شحنة كل من الإلكترون و البروتون تساوي $1.602\times10^{-19}C$، نجد أن واحدة eV ترتبط مع الجول J كمايلي:

$$1\ eV = 1.602\times10^{-19}\ CV = 1.602\times10^{-19}\ J \qquad (4\text{-}5)$$

على سبيل المثال يملك الإلكترون في حزمة أنبوب التلفزيون (أو في أنبوب الأشعة المهبطية) سرعة مقدارها $5\times10^{7}m/s$، وهذه تقابل طاقة حركية مقدارها $1.1\times10^{-15}\ J$، والتي تكافئ $7.1\times10^{3}\ eV$، ومثل هذه الطاقة تسرع الإلكترون من السكون خلال فرق كمون مقداره 7.1 kV للوصول إلى هذه السرعة.

٤-٢- فرق الكمون في حقل كهربائي منتظم

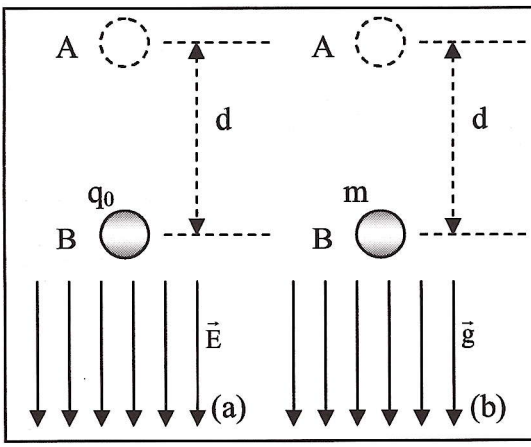
Potential Difference in Uniform Electrical Field:

سنصف في هذا الفصل فرق الكمون الكهربائي بين أي نقطتين من حقل كهربائي منتظم. إن فرق الكمون لا يتعلق بالمسار بين هاتين النقطتين، أي أن العمل

اللازم لنقل شحنة اختبارية من النقطة A إلى النقطة B هـو نفسـه خـلال جميـع المسارات. ويثبت هذا، بأن الحقل الكهربائي الساكن والمنتظم يكون محفوظاً (يخضـع لقانون الانحفاظ).

لنأخذ أولاً حقلاً كهربائياً منتظماً موجهاً بالاتجاه السالب للمحور oy، كما في الشكل (4-1-a)، ولنحسب فرق الكمون بين نقطتين A , B تفصل بينهما مسـافة d حيث تقاس d بموازاة خطوط الحقل. إذا طبقنا العلاقة (4-3) على هذه الحالـة فإننـا نحصل على ما يلي:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{s} = -\int_A^B E.\cos 0\, ds = -\int_A^B E.ds$$



الشكل (4-1):
(a) الحقل الكهربائي موجه للأسـفل، وتخسر الشحنة لدى انتقالها من A إلى B طاقة كامنة كهربائية لأن كمون B أخفض من كمون A.
(b) أيضاً فإن الكتلة m تخسر لـدى انتقالها مـن A إلى B طاقـة كامنـة تجاذبية لأن كمون B أخفـض مـن كمون A في الحقل التجاذبي الأرضي.

بما أن E ثابت، فإنه من الممكن إخراجه خارج إشارة التكامل، وبالتالي تصبح العلاقة الأخيرة كما يلي:

$$\Delta V = -E\int_A^B ds = -E.d \qquad (4\text{-}6)$$

تنتج إشارة السالب في العلاقة الأخيرة من حقيقة كون النقطـة B واقعـة في كمون أخفض من A أي أن $V_B<V_A$، حيث تتجه خطوط الحقل دوماً باتجاه تناقص الكمون الكهربائي، كما في الشكل (4-1-a).

لنفترض الآن أن شحنة اختبارية q_0، تتحرك من A إلى B، يمكن إيجاد التغير في طاقتها الكامنة الكهربائية من العلاقتين (4-3) , (4-6) كما يلي:

$$\Delta U = q_0 . \Delta V = - q_0 . E.d \qquad (4\text{-}7)$$

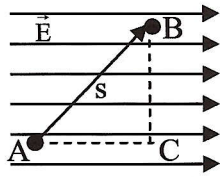
من هذه العلاقة نستنتج أنه إذا كانت q_0 موجبة فإن ΔU سالب، وهذا يعني أن الحقل يقوم بعمل موجب على الشحنة الموجبة عندما تتحرك هذه الشحنة وفق اتجاه الحقل الكهربائي وهذا مطابق للعمل المنجز من قبل حقل الجاذبية على كتلته تسقط، كما في الشكل (4-1-b).

إذا تحركت الشحنة الاختبارية الموجبة q_0 من السكون في هذا الحقل الكهربائي فإنها تخضع لقوة كهربائية $q_0.\vec{E}$ وفق اتجاه $\vec{E}$ نحو الأسفل كما في الشكل (4-1-a). وعليه تتسارع هذه الشحنة نحو الأسفل وتكسب بالتالي طاقة حركية، وعندما يكسب جسيم مشحون طاقة حركية، يخسر الحقل كمية مساوية من الطاقة الكامنة الكهربائية.

إذا كانت الشحنة الاختبارية q_0 سالبة، فإن ΔU يكون موجباً وهذه الحالة معاكسة للحالة الأولى.

تكتسب الشحنة السالبة طاقة كامنة كهربائية عندما تتحرك مع اتجاه الحقل الكهربائي، فعندما تتحرك الشحنة السالبة من حالة السكون في حقل كهربائي $\vec{E}$ فإنها تتسارع باتجاه معاكس لاتجاه الحقل الكهربائي.

لنأخذ الآن الحالة الأكثر عمومية لجسيم مشحون يتحرك بين أي نقطتين من حقل كهربائي منتظم يتجه وفق المحور ox، كما في الشكل (4-2)، إذا كانت $\vec{S}$ تمثل شعاع الانزياح بين النقطتين A , B فإنه وبحسب العلاقة (4-3) نجد:



الشكل (4-2):
(a) الحقل الكهربائي منتظم يقع فيه النقطتان B, C في نفس الكمون للأسفل، في حين يكون كمون B أخفض من كمون A.

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} . d\vec{s} = - \vec{E} . \int_A^B d\vec{s} \Rightarrow \quad \Delta V = - \vec{E} . \vec{S} \qquad (4\text{-}8)$$

حيث تمكنا هنا أيضاً من إخراج $\vec{E}$ خارج إشارة التكامل لأنها ثابتة، بالإضافة لذلك فإن التغير في الطاقة الكامنة الكهربائية للشحنات يعطى بالعلاقة التالية:

$$\Delta U = q_0 . \Delta V = -q_0 . \vec{E} . \vec{S} \qquad (4\text{-}9)$$

وأخيراً يمكن استنتاج أن جميع نقاط المستوي العمودي على الحقل الكهربائي المنظم نفس الكمون، وهذا ما تلاحظه في الشكل (4-2) حيث فرق الكمون $V_B - V_A$ يكون مساوياً لفرق الكمون $V_C - V_A$ وعليه فإن $V_C = V_B$، ونسمي هذه الحالة بسطح تساوي الكمون (Equipotent Surface)، الذي يمكن تعريفه بأنه:

أي سطح يتألف من توزع مستمر للنقاط التي لها نفس الكمون الكهربائي

إن الخط CB في الشكل (4-2) هو في الواقع مقطع لسطح تساوي كمون، حيث سطح تساوي الكمون في هذه الحالة هو المستوى العمودي على الحقل الكهربائي. لاحظ أنه بما أن $\Delta U = q_0 . \Delta V$، فإنه لا ينجز أي عمل عند حركة شحنة اختبارية بين أي نقطتين من سطح تساوي كمون.

تتضمن سطوح تساوي الكمون لحقل كهربائي منتظم مجموعة المستويات العمودية على الحقل، أما سطوح تساوي الكمون لحقول كهربائية غير منتظمة (يكون لها أشكال أخرى) فستتم دراستها في فقرة لاحقة.

مثال (٤-١):

إذا ترك بروتون من السكون في حقل كهربائي منتظم، فهل يتناقص أم يتزايد الكمون الكهربائي؟ وماذا عن طاقته الكهربائية الكامنة؟

الحل:

يتحرك البروتون كونه ساكناً في البدء وفق اتجاه الحقل الكهربائي إلى موضع ذي كمون أخفض وطاقة كامنة أخفض. إن التناقص في الطاقة الكامنة الكهربائية مترافق مع تزايد مماثل في الطاقة الحركية وهذا ما يتوافق مع مبدأ انحفاظ الطاقة. يتحرك الإلكترون في اتجاه معاكس لاتجاه الحقل الكهربائي وبالتالي يزداد كمونه الكهربائي ولكن تتناقص طاقته الكامنة الكهربائية.

مثال (٤-٢):

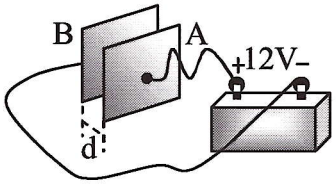
بطارية 12V موصولة إلى صفيحتين متوازيتين تفصل بينهما مسافة 0.3cm، كما في الشكل (3-4)، يعتبر الحقل الكهربائي بين هاتين الصفيحتين منتظماً. (وهذه الفرضية منطقية إذا كانت المسافة الفاصلة بين الصفيحتين صغيرة بالنسبة إلى مساحتيهما، وعندما لا نأخذ نقاطاً قرب حافتي الصفيحتين). والمطلوب: أوجد قيمة الحقل الكهربائي بين الصفيحتين.

الحل:

يتجه الحقل الكهربائي من الصفيحة الموجبة إلى السالبة ونجد بالتالي أن الصفيحة الموجبة تقع في منطقة كمون أعلى من كمون الصفيحة السالبة.

لاحظ أن فرق الكمون بين الصفيحتين يساوي فرق الكمون بين مأخذي البطارية، ويمكن أن يفهم هذا بملاحظة أن جميع نقاط الناقل يكون لها الكمون نفسه في حالة الاتزان، وبالتالي لا يوجد فرق كمون بين أي من مأخذي البطارية وأي نقطة من الصفيحة الموصولة معه، وعليه فإن قيمة الحقل الكهربائي بين الصفيحتين تُعطى بالعلاقة:

$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{12V}{0.3\times10^{-2}\,m} = 4\times10^{3}\ V/m$$



الشكل (3-4):
صفيحتين متوازيتين موصولتين إلى بطارية 12V.

هذه التشكيلة التي تدعى مكثفة مستوية (Parallel Plate Capacitor) ستتم مناقشتها في فصل قادم بالتفصيل.

ملاحظة: ينعدم الحقل الكهربائي داخل الناقل في حالة التوازن الكهربائي الساكن، وبالتالي فإن تكامل المسار $\int \vec{E}\cdot\vec{ds}$ بين أي نقطتين داخل الناقل يجب أن يكون مساوياً الصفر. سنهتم بمناقشة هذا الأمر في فقرات لاحقة من هذا الفصل.

مثال (٤-٣):

يترك بروتون اعتباراً من السكون في حقل كهربائي منتظم قيمته $8\times10^4 V/m$، ويتجه هذا الحقل وفق الاتجاه الموجب للمحور ox، الشكل (4-4)، يخضع هذا البروتون لانزياح مقداره 0.5m وفق اتجاه $\vec{E}$.

a. أوجد التغير في الكمون الكهربائي بين النقطتين A , B.

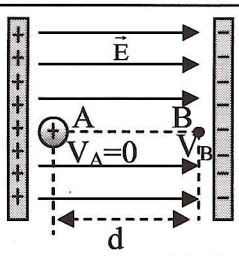
b. أوجد التغير في الطاقة الكامنة للبروتون من أجل هذا الانزياح.

الحل:

a. التغير في الكمون الكهربائي: لدينا من العلاقة (4-6):

$$\Delta V = - E\, d = - (8\times10^4).\ 0.5$$
$$\Delta V = - 4 \times 10^4\ V$$

تدل هذه النتيجة السالبة أن كمون البروتون يتناقص عند حركته من A إلى B.



الشكل (4-4):
يتسارع البروتون باتجاه الحقل الكهربائي المنتظم من B إلى A.

b. التغير في الطاقة الكامنة:

$$\Delta U = q_0\ .\ \Delta V = e\ \Delta V$$
$$\Delta U = (1.6\times10^{-19}).\ (-4\times10^4)$$
$$\Delta U = - 6.4 \times10^{-15}\ J$$

تعني الإشارة السالبة هنا أن الطاقة الكامنة الكهربائية للبروتون تتناقص عند حركته مع اتجاه الحقل الكهربائي، وهذا يعني أن البروتون عندما يتسارع وفق الحقل الكهربائي فإنه يكسب طاقة حركية وفي نفس الوقت يخسر الحقل الكهربائي طاقة كامنة كهربائية (الطاقة محفوظة أي تخضع لقانون الانحفاظ).

تطبيق: طبق مبدأ انحفاظ الطاقة لإيجاد سرعة البروتون بعد أن تحرك مسافة 0.5m انطلاقاً من السكون. حيث: $m_p = 1.672\times10^{-27}\ kg$.

الحل:

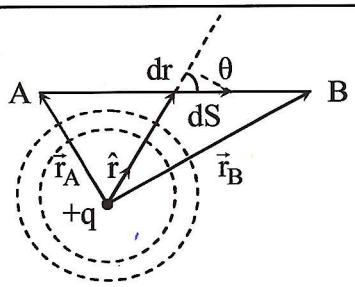
$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_p v^2 = -\Delta U = 6.4\times10^{-15}\ J$$

$$\frac{1}{2}\times1.672\times10^{-27} v^2 = 6.4\times10^{-15} \Rightarrow v = 2.767\times10^{6}\ m/s$$

٤-٣- كمون شحنة نقطية

Electric Potential of point charges:

نأخذ شحنة نقطية موجبة معزولة q، الشكل (5-4)، وكما مر معنا فإن مثل هذه الشحنة تولد خطوط حقل تتجه قطرياً من الشحنة نحو الخارج. لإيجاد الكمون الكهربائي لنقطة متوضعة في الحقل على بعد r من الشحنة ننطلق من العلاقة العامة لفرق الكمون:



الشكل (5-4):
فرق الكمون بين نقطتين يتعلق فقط بإحداثياتهما. الدائرتان المنقطتان تمثلان سويتي كمون.

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{s}$$

بما أن الحقل الكهربائي للشحنة النقطية يُعطى بالعلاقة:

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{r}$$

حيث $\hat{r}$ شعاع الواحدة موجه من الشحنة باتجاه موقع الشحنة، فإنه يمكن كتابة المقدار $\vec{E}.d\vec{s}$ كما يلي:

$$\vec{E}.d\vec{s} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{r}\,ds$$

إن الجداء السلمي في الطرف الأيسر يساوي $\hat{r}.d\vec{s} = ds.\cos\theta$ حيث θ الزاوية بين $\hat{r}$ و $d\vec{s}$ كما في الشكل (5-4)، بالإضافة لذلك يمكن الملاحظة أن $ds\cos\theta$ هي مسقط ds على r وعليه يمكن أن نكتب:

$ds \cos\theta = dr$

وهذا يعني أن أي انزياح ds للشحنة ينتج تغير مقداره dr في قيمة $\vec{r}$.

وبهذا الاستبدال نجد أن:

$$E.ds = k_e \frac{q}{r^2}.dr = E_r dr$$

وعليه تصبح علاقة فرق الكمون كما يلي:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int E_r.dr = -k_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \left[k_e \frac{q}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = k_e q.\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \qquad (4\text{-}10)$$

ومن العلاقة الأخيرة نستنتج ما يلي:

لا يتعلق التكامل $\vec{E}.d\vec{s}$ بشكل المسار بين النقطتين A,B. لأن الحقل الكهربائي لشحنة نقطية هو حقل محفوظ (خاضع لقانون الانحفاظ). بالإضافة لذلك تتضمن العلاقة (4-10) نتيجة هامة، وهي أن فرق الكمون بين أي نقطتين A,B يتعلق فقط بالإحداثيات القطرية r_A, r_B ، ومن المعتاد اختيار الكمون الذي ننسب إليه القياس مساوياً الصفر عند $r_A = \infty$، (وهذا طبيعي تماماً لأن $V \propto \frac{1}{r_A}$ وعندما $r_A \to \infty$ فإن $V \to 0$) وبهذا الاختيار فإن الكمون الكهربائي المتعلق بشحنة نقطية على أي مسافة r من هذه الشحنة هو:

$$V = k_e \frac{q}{r} \qquad (4\text{-}11)$$

وبالاعتماد على ما سبق يمكن الاستنتاج أن V ثابتة على سطح أي كرة مركزها هذه الشحنة النقطية. ونستنتج بالتالي أن سطوح تساوي الكمون (السطوح التي تبقى عليها V ثابتة) لشحنة نقطية، تتألف من مجموعة الكرات التي مركزها المشترك هذه الشحنة النقطية، كما هو موضح في الشكل (4-5)، لاحظ أن الخطوط المنقطة في الشكل هي مقاطع سطوح تساوي الكمون الكروية وهي عمودية على خطوط القوة (خطوط الحقل) الكهربائية، كما هو الحال في الحقول المنتظمة.

يتم الحصول على الكمون الكهربائي لشحنتين نقطيتين أو أكثر بتطبيق مبدأ الجمع (التركيب). وهذا يعني أن الكمون الكلي في نقطة ما مثل p المتعلق بعدة شحنات نقطية هو المجموع الجبري للكمونات المتعلقة بالشحنات المفردة. ونستطيع كتابة الكمون الكلي لمجموعة من الشحنات النقطية في نقطة ما مثل p بالشكل التالي:

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (4\text{-}12)$$

حيث اعتبر هنا الكمون مساوياً للصفر في اللانهاية، و r_i هي المسافة من p إلى الشحنة q_i. لاحظ أن المجموع في العلاقة (4-12) هو مجموع جبري لقيم سلمية يختلف عن المجموع الشعاعي (الذي يستخدم لجمع الحقل الكهربائي لمجموعة من الشحنات)، وعليه فإن تعيين V أسهل بكثير من تعيين $\vec{E}$.

مثال (٤-٤):

إذا كان الكمون الكهربائي في نقطة ما يساوي الصفر، هل تستطيع الاستنتاج أنه لا توجد شحنات في جوار تلك النقطة؟

الحل:

لا، لا يمكن، بفرض وجود عدة شحنات في جوار هذه النقطة. إذا كانت بعض الشحنات موجبة وبعضها سالبة، فإن مساهماتها في الكمون في هذه النقطة تتفانى وربما يكون مجموعها الجبري يساوي الصفر. على سبيل المثال، الكمون الكهربائي في النقطة الواقعة في منتصف المسافة بين شحنتين متساويتين بالقيمة ومتعاكستين بالإشارة يكون مساوياً الصفر.

مثال (٤-٥):

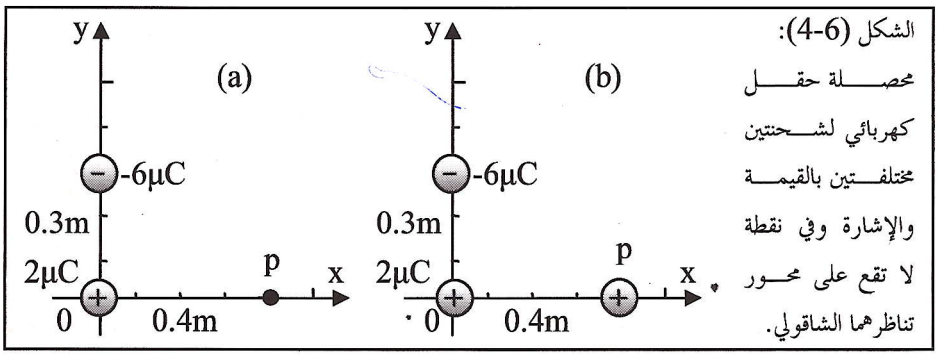
شحنة نقطية قيمتها 2μc متوضعة في نقطة المبدأ، وشحنة نقطية أخرى قيمتها -6μc متوضعة على المحور oy في الموضع 3m كما في الشكل (4-6-a). المطلوب:

a. أوجد الكمون الكهربائي الكلي الناتج عن هاتين الشحنتين في النقطة p التي إحداثيها على المحور ox هو (0.4)m. b. ما قيمة العمل اللازم لنقل الشحنة النقطية 3μc من اللانهاية إلى النقطة p كما في الشكل (4-6-b)؟

الحل:

a. من أجل شحنتين يعطى المجموع في العلاقة (12-4) كما يلي:

$$V_p = k_e\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right)$$



الشكل (4-6): محصلة حقل كهربائي لشحنتين مختلفتين بالقيمة والإشارة وفي نقطة لا تقع على محور تناظرهما الشاقولي.

لدينا في هذا المثال:

$$r_2=\sqrt{3^2+4^2}=5\text{m}\ ,\ q_2=-6\mu\text{c}\ ,\ r_1=4\text{m}\ ,\ q_1=2\mu\text{c}$$

وبالتالي تعطى العلاقة قيمة V_p كما يلي:

$$V_p=8.99\times10^9\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\left(\frac{2\times10^{-6}\text{C}}{4\text{m}}-\frac{6\times10^{-6}\text{C}}{5\text{m}}\right)=-6.29\times10^3\,\text{V}$$

b. قيمة العمل اللازم لنقل الشحنة النقطية 3μc:

$$W=q_3V_p=(3\times10^{-6}\text{C}).(-6.29\times10^3\,\text{V})=-8.9\times10^{-3}\,\text{J}$$

تعني إشارة سالب أن العمل المنجز على الشحنة عند انتقالها من اللانهاية إلى النقطة p، هو من قبل الحقل. وعليه فإن العمل الموجب يجب أن يتم من قبل عامل خارجي لتحريك الشحنة من p عائدة إلى اللانهاية.

٤-٤ - الحصول على الحقل الكهربائي من الكمون الكهربائي

Obtaining $\vec{E}$ from The Electric Potential:

يرتبط الحقل الكهربائي $\vec{E}$ والكمون V أحدهما بالآخر وفق العلاقة (4-3). يتحدد كلٌ من المقدارين بنوع الشحنة، وسنوضح الآن كيف يمكن حساب الحقل الكهربائي إذا كان الكمون الكهربائي معروفاً في منطقة معينة.

من العلاقة (4-3) نستطيع كتابة فرق الكمون الكهربائي dV بين نقطتين من المسافة بينهما ds كما يلي:

$$dV = -\vec{E}.d\vec{s} \qquad (4\text{-}13)$$

إذا كان للحقل الكهربائي مركبة واحدة فقط E_x فإن $\vec{E}.d\vec{s} = E_x\,dx$ ، وعليه يصبح القانون كما يلي:

$$dV = -E_x \cdot dx$$

أو:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \qquad (4\text{-}14)$$

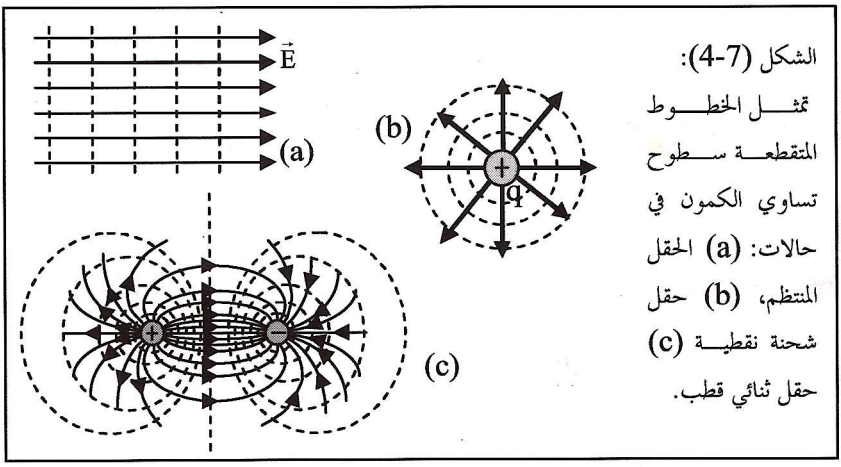
وهذا يعني أن الحقل الكهربائي يساوي سالب مشتق الكمون بالنسبة لإحداثيات ما. لاحظ أن تغير الكمون يساوي الصفر من أجل أي انزياح عمودي على الحقل الكهربائي، وهذا مضمن في الملاحظة التي تنص على أن سطوح تساوي الكمون تكون عمودية على الحقل كما في الشكل (4-7-a).

إذا كان شكل الشحنة كروياً منتظماً، حيث تتعلق كثافة الشحنة بالمسافة القطرية r فقط لأن الحقل قطري في هذه الحالة $\vec{E}.d\vec{s} = E_r dr$. وعليه يمكن كتابة dV بالشكل:

$$dV = -E_r\,dr$$

وعليه ينتج ما يلي:

$$E_r = -\frac{dV}{d_r} \qquad (4\text{-}15)$$



الشكل (4-7): تمثل الخطوط المتقطعة سطوح تساوي الكمون في حالات: (a) الحقل المنتظم، (b) حقل شحنة نقطية (c) حقل ثنائي قطب.

على سبيل المثال إذا كان كمون الشحنة النقطية $V = k_e \frac{q}{r}$ ، أي أن V تابع لـ r فقط فإن لتابع الكمون انتظام كروي. بتطبيق العلاقة (15-4) نجد أن الحقل الكهربائي المتعلق بالشحنة النقطية هو $E_r = k_e \frac{q}{r^2}$ ، وهذه نتيجة منطقية. لاحظ أن الكمون يتغير فقط بالاتجاه القطري، ولا يتغير في الاتجاه العمودي على r.

ومرةً أخرى فإن هذا مضمن في الفكرة التي تنص على أن سطوح تساوي الكمون عمودية على خطوط الحقل، في هذه الحالة تكون سطوح تساوي الكمون عبارة عن مجموعة السطوح الكروية المتمركزة مع الشحنة ذات التوزع الكروي كما هو موضح في الشكل (4-7-b). يوضح الشكل (4-7-c) سطوح تساوي الكمون لثنائي أقطاب كهربائي عندما تزاح شحنة اختبارية بمقدار $d\vec{s}$ متوضعة داخل سطح تساوي كمون فإنه وبحسب التعريف $dV = -\vec{E}.d\vec{s} = 0$. ويظهر هذا أن سطوح تساوي الكمون يجب أن تكون دوماً عمودية على خطوط الحقل الكهربائي.

يكون الكمون الكهربائي في الحالة العامة تابعاً للإحداثيات الفراغية الثلاث، فإذا كان V(r) معطىً بتابعية إحداثيات متعامدة فإنه يمكن إيجاد مركبات الحقل E_z , E_y , E_x بسهولة من خلال V(r) =V(x , y , z) كما يلي:

$$E_x = -\frac{\partial V(r)}{dx},\quad E_y = -\frac{\partial V(r)}{dy},\quad E_z = -\frac{\partial V(r)}{dz}$$

يسمى الاشتقاق في هذه العلاقات بالاشتقاق الجزئي في هذه العملية نأخذ المشتق بالنسبة لـ x بينما يبقى y,z ثابتين. على سبيل المثال إذا كان:

$$V = 3x^2y + y^2 + yz$$

فإن:

$$E_x = -\frac{\partial V(r)}{dx} = 6xy$$

مثال (٤-٦):

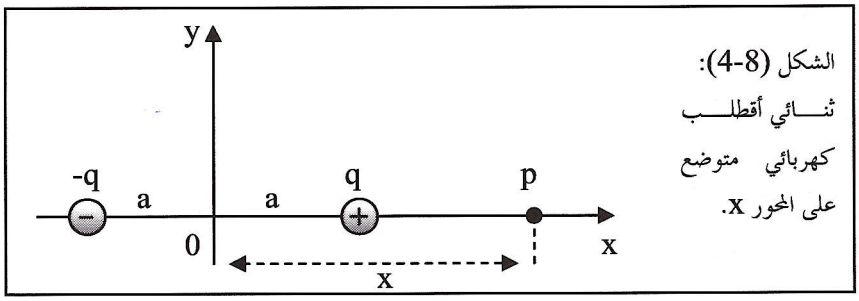
إذا كان الكمون الكهربائي ثابت في منطقة فما الذي تستنتجه عن الحقل فيها؟ وإذا كان الحقل فيها معدوماً. فماذا يمكنك القول عن الكمون في تلك المنطقة؟

الحل:

إذا كان V ثابتاً في منطقة ما، فإن الحقل الكهربائي يجب أن يساوي الصفر في تلك المنطقة. في حالة البعد الواحد يكون $E_x = -\frac{\partial V(r)}{dx}$ وعليه فعندما V=0 فـــإن E=0 بنفس الطريقة، إذا كان E=0 في منطقة ما فإنه يمكن الاستنتاج فقـــط أن V=ct ثابتة في تلك المنطقة.

مثال (٤-٧): الكمون الكهربائي لثنائي الأقطاب

يتألف ثنائي الأقطاب الكهربائي من شحنتين متعاكستين تفصل بينهما مســـافة 2a كما في الشكل (8-4). ينطبق طول الثنائي على المحور ox ومركزه يقع في نقطـــة المبدأ. احسب الكمون والحقل الكهربائيان في النقطة p الواقعة على المحور ox.



الشكل (8-4): ثنـــائي أقطلـــب كهربائي متوضع على المحور x.

الحل:

$$V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{x-a} - \frac{q}{x+a} \right) = \frac{2k_e q\, a}{x^2 - a^2}$$

إذا كانت p بعيدة عن الثنائي فإن x>>a، ويمكن بالتالي في هذه الحالة إهمال a^2 في الحد x^2-a^2 فتصبح V كما يلي:

$$V \approx \frac{2k_e qa}{x^2}$$

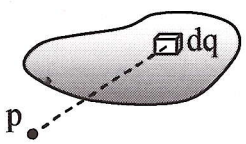
باستخدام العلاقة (4-14) والنتيجة السابقة فإنه يمكننا حساب الحقل الكهربائي في النقطة p وذلك من أجل x>>a كما يلي:

$$E = \frac{-\partial V}{\partial x} = \frac{4k_e qa}{x^3}$$

٤-٥- الكمون الكهربائي لشحنة ذات توزع مستمر

Electric Potential due to continuous charge distribution:

يمكن حساب الحقل الكهربائي المتعلق بشحنة ذات توزع مستمر بطريقتين. إذا كانت الشحنة معروفة، فإنه يمكننا الانطلاق من العلاقة (4-11)، بحساب الكمون لشحنة نقطية، ومن أجل ذلك نأخذ كمون شحنة عنصرية صغيرة dq، حيث نعالج هذه الشحنة العنصرية كأنها شحنة نقطية، الشكل (4-9).



الشكل (4-9):
يمكن حساب الكمون الكهربائي لشحنة ذات توزع مستمر في نقطة ما بتكامل الحقل الناتج عن شحنة عنصرية على كامل الجسم المشحون.

يعطى الكمون dV المتعلق بهذه الشحنة العنصرية في نقطة ما p بالعلاقة:

$$dV = k_e \frac{dq}{r} \qquad (4\text{-}16)$$

حيث r المسافة من الشحنة العنصرية إلى النقطة p. من أجل الحصول على الكمون الكلي في النقطة p نكامل العلاقة (4-16) من أجل أخذ جميع المساهمات لجميع الشحنات العنصرية. وبما أن كل شحنة عنصرية تقع في الحالة العامة على بعد مختلف من p وبما أن k_e ثابت فإنه يمكن كتابة V كما يلي:

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} \qquad (4\text{-}17)$$

لقد استبدلنا في الواقع المجموع في العلاقة (4-12) بالتكامل في العلاقة (4-17). لاحظ أن هذه العلاقة تستخدم الاصطلاح أن الكمون مساوياً للصفر عندما يكون بعد p عن الشحنة لانهائياً.

الطريقة الثانية لحساب الكمون الكهربائي لشحنة ذات توزع مستمر تجرى باستخدام العلاقة (4-3)، هذه الطريقة مفيدة عندما يكون الحقل الكهربائي محدد من معطيات أخرى كقانون غوص مثلاً.

إذا كان توزع الشحنة عالي الانتظام فإننا نحدد أولاً $\vec{E}$ في أي نقطة باستخدام قانون غوص، ونبدل بعد ذلك قيمة $\vec{E}$ في العلاقة (4-3) للحصول على فرق الكمون الكهربائي بين أي نقطتين.

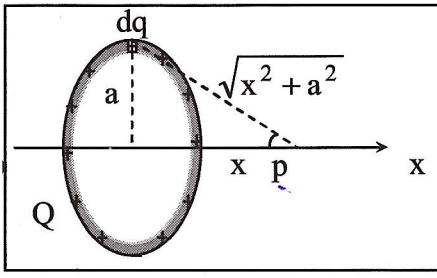
نختار بعد ذلك V=0 في نقطة ما مناسبة، وسنوضح كلتا الطريقتين من خلال الأمثلة العديدة التالية.

مثال (٤-٨): الكمون المتعلق بشحنة حلقية منتظمة

أوجد الكمون الكهربائي في نقطة p واقعة على محور حلقة مشحونة بشحنة منتظمة (موزعة عليها بانتظام) نصف قطرها a وشحنتها الكلية Q. اختر مستوي الحلقة عمودي على المحور x، الشكل (4-10).

الحل:

ليكن بعد p عن مركز الحلقة هو x، كما في الشكل (4-10). فيكون بعد الشحنة العنصرية dq الموضحة في الشكل عن نقطة p هو $(\sqrt{x^2+a^2})$ لذلك يمكن كتابة الكمون الكلي V الناتج من كامل شحنات الحلقة في النقطة p بالعلاقة:



الشكل (4-10):
حساب الكمون الكهربائي لشحنة ذات توزع مستمر على حلقة مشحونة في نقطة ما من محورها.

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

كل شحنة عنصرية dq متساوية البعد عن النقطة p في هذه الحالة، وعليه يمكن إخراج الحد $\sqrt{x^2+a^2}$ خارج إشارة التكامل وتصبح العلاقة السابقة كما يلي:

$$V = \frac{k_e}{\sqrt{x^2+a^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad (4\text{-}18)$$

إن المتحول الوحيد في العلاقة السابقة التي تعطى V هو x، وهذا ليس مفاجئ لأن حسابنا يسري فقط على النقاط الواقعة على المحور ox حيث تكون كل من z,y مساويين للصفر، ومن خلال التناظر نرى أنه على طول المحور ox يمكن لـ $\vec{E}$ أن يكون لها مركبة على ox فقط، وعليه تستطيع استخدام العلاقة (4-18) لحساب الحقل الكهربائي في النقطة p وذلك كما يلي:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -k_e Q \frac{d}{dx}(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$E_x = -k_e Q(-\frac{1}{2}).(x^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}}(2x)$$

$$E_x = \frac{k_e Q x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (4\text{-}19)$$

تتفق هذه النتيجة مع تلك التي تم الحصول عليها من خلال التكامل المباشر. لاحظ أن $E_x=0$ في النقطة x=0 (مركز الحلقة) هل يمكنك التنبؤ بذلك من خلال قانون كولون.

تطبيق: ما هي قيمة الكمون الكهربائي في مركز الحلقة المشحونة بشحنة منتظمة، ما علاقة الحقل في مركز الحلقة بهذه النتيجة؟

الحل:

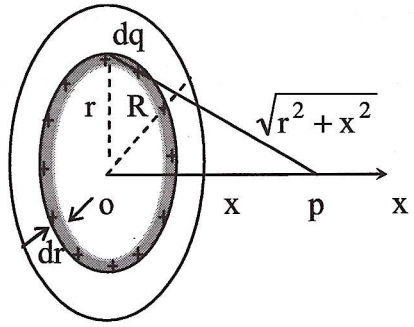
$V = \frac{k_e Q}{a}$ في النقطة x=0 لأن E=0 وهذا يعني أن V يجب أن تأخذ القيمة العظمى أو الصفر (لأنه من أجل الحصول على القيمة الحدية لتابع نشتق ونعدم مشتقه الأول). وهي في الحقيقة القيمة العظمى.

مثال (٤-٩): كمون قرص مشحون بشحنة منتظمة

أوجد الكمون الكهربائي على طول محور قرص مشحون بشحنة كهربائية منتظمة كثافتها السطحية σ. نصف قطر هذا القرص هو a. الشكل (4-11).

الحل:

نختار النقطة p ثانية على بعد x من مركز القرص ونأخذ مستوي القرص عمودياً على المحور x.



الشكل (4-11):
حساب الكمون الكهربائي لشحنة ذات توزع مستمر على قرص مشحون في نقطة ما من محوره.

يمكن جعل المسألة أسهل عن طريق تقسيم القرص إلى جملة من الحلقات المشحونة، بحيث يعطى كمون كل حلقة منها بالعلاقة (4-18) من المثال السابق، نأخذ إحدى هذه الحلقات وليكن نصف قطرها r وعرضها dr كما هو مشار في الشكل (4-11)، إن مساحة هذه الحلقة هي $2\pi r dr$ (محيط الدائرة مضروب بالعرض)، والشحنة على الحلقة بالتالي هي $dq=\sigma dA=\sigma 2\pi r dr$، وعليه يعطى الكمون الناتج عن هذه الحلقة في النقطة p بالعلاقة:

$$dV=\frac{k_e dq}{\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{k_e\,\sigma 2\pi r\,dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

لإيجاد الكمون الكلي في النقطة p تجمع الكمونات الناتجة عن جميع الحلقات المشكلة للقرص، أي نكامل dV من $r=0$ إلى $r=a$:

$$V=\pi k_e\sigma\int_0^a\frac{2r\,dr}{\sqrt{x^2+r^2}}=\pi k_e\sigma\int_0^a\left(x^2+r^2\right)^{-\frac{1}{2}}2r\,dr$$

إن هذا التكامل من الشكل $\int u^n du$ والذي نتيجته $\frac{u^{n+1}}{n+1}$، وحيث $n=-\frac{1}{2}$

و $u=x^2+r^2$، ومن أجل التكامل الذي لدينا نجد النتيجة التالية:

$$V=2\pi k_e\sigma\left[\left(x^2+r^2\right)^{\frac{1}{2}}-x\right] \qquad (4\text{-}20)$$

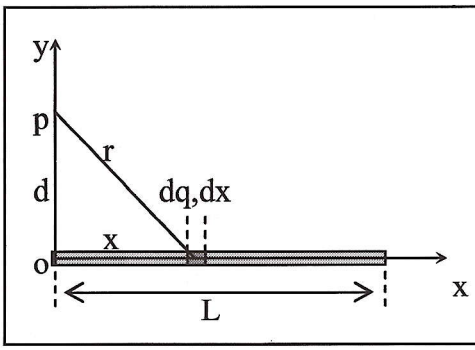
وكما في المثال السابق يمكننا إيجاد الحقل الكهربائي في أية نقطة على المحور عن طريق أخذ سالب مشتق V بالنسبة لـ x أي:

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=2\pi k_e\sigma\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\right) \qquad (4\text{-}21)$$

إن حساب V و $\vec{E}$ في نقطة غير واقعة على المحور هو أكثر صعوبة مما سبق.

مثال (٤-١٠): كمون شحنة خطية ذات طول محدود

قضيب طوله ℓ متوضعة على المحور ox وعليه شحنة موزعة خطياً (طولياً) بصورة منتظمة (أي مقدار الشحنة في واحدة الطول يساوي ثابت)، الشحنة الكلية على هذا القضيب تساوي Q، أوجد الكمون الكهربائي في النقطة p الواقعة على المحور oy وعلى بعد d من المبدأ. الشكل (12-4).



الشكل (12-4):
حساب الكمون الكهربائي لشحنة ذات توزع مستمر على قضيب مشحون في نقطة ما من المحور oy.

الحل:

يحمل الطول العنصري dx الشحنة العنصرية dq=λdx، حيث $\lambda = \frac{Q}{\ell}$ هي الشحنة في واحدة الطول، بما أن هذا الطول العنصري يبعد بمقدار $\sqrt{x^2+d^2}$ عن النقطة p فإنه يمكن كتابة كمون هذه الشحنة العنصرية في p كما يلي:

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

وللحصول على الكمون الكلي في النقطة p نكامل العلاقة السابقة بين الحدين من x = 0 حتى $x = \ell$ وعلى اعتبار أن: d , λ , k_e ثوابت فإننا نجد:

$$V = k_e \lambda \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = k_e \frac{Q}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

نجد هذا التكامل في معظم جداول التكاملات حيث:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = Ln(x+\sqrt{x^2+d^2})$$

وبالتالي فإن قيمة V هي:

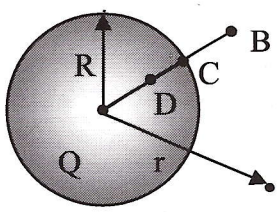
$$V = \frac{k_e Q}{L} Ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d}\right) \qquad (4\text{-}22)$$

مثال (٤-١١): كمون الشحنة الكروية المنتظمة

كرة مصمتة معزولة نصف قطرها R تحمل شحنة منتظمة الكثافة قيمتها الكلية Q الشكل (4-13). المطلوب:

a. أوجد الكمون الكهربائي في نقطة واقعة خارج الكرة، أي من أجل r>R

b. أوجد الكمون في نقطة داخل الكرة أي من أجل r<R .



الشكل (4-13):
كرة معزولة تحمل شحنة توزعها منتظم. الكمون في النقطتين C,B يكافئ الكمون النـاتج عـن شحنة نقطية متوضعة في مركز الكرة.

الحل:

a. في المثال (٣-٤) وجدنا باستخدام قانون غوص أن قيمة الحقل الكهربـائي خارج كرة ذات شحنة منتظمة هي من أجل r>R:

$$E_r = k_e \frac{Q}{r^2}$$

حيث إن هذا الحقل موجه قطرياً نحو الخارج عندما Q موجبـة. مـن أجـل الحصول على الكمون في نقطة خارجية مثل B في الشكل (4-13) نبدل قيمة E مـن العلاقة السابقة في العلاقة (4-4). بما أن: $\vec{E}.d\vec{s} = E_r d_r$ في هذه الحالة فإننا نجد:

$$V_B = -\int_{8}^{r} E_r dr = -k_e Q \int_{8}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

$$V_B = k_e \frac{Q}{r}$$

لاحظ أن هذه النتيجة مميزة للكمون الكهربائي المتعلق بشحنة نقطية. وبما أن الكمون يجب أن يستمر عند r = R فإنه يمكننا استخدام هذه العلاقة للحصول على الكمون على سطح الكرة. وهذا هو الكمون في نقطة مثل C الموضحة في الشكل (4-13) وبالتالي يعطى مثل هذا الكمون من أجل r = R بالعلاقة التالية:

$$V_C = k_e \frac{Q}{R}$$

b. وجدنا في المثال (٣-٥) أن الحقل الكهربائي داخل الكرة المشحونة بشحنة منتظمة يعطى من أجل r<R بالعلاقة:

$$E_r = \frac{k_e Q}{R^3} r$$

نستطيع استخدام هذه النتيجة مع العلاقة (4-3) لتعيين فرق الكمون $V_D - V_C$ حيث D نقطة داخلية:

$$V_D - V_C = -\int_R^r E_r \, dr = -\frac{k_e Q}{R^3}\int_R^r r \, dr = \frac{k_e Q}{R^3}(R^2 - r^2)$$

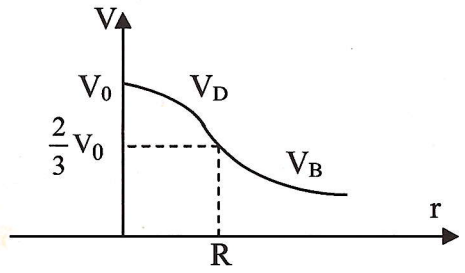
بتبديل $V_C = k_e Q/R$ في هذه العلاقة ومن ثم إيجاد V_D من أجل r<R فإننا نجد:

$$V_D = \frac{k_e Q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (4\text{-}23)$$

عندما r=R تعطي هذه العلاقة نتيجة للكمون تتفق مع الكمون على السطح أي مع V_C. يوضح الشكل (4-14) الخط البياني لـ V كمون هذه الشحنة بتابعية r.

تطبيق:

ما هي قيمة الحقل الكهربائي والكمون الكهربائي في مركز كرة مشحونة بشحنة منتظمة . الجواب: E=0 و $V_0 = \frac{3k_e Q}{2R.}$.



الشكل (4-14):
علاقة الكمون بتابعية المسافة عن مركز الشحنة الكروية المعزولة المنظمة، وهذه العلاقة هي قطع مكافئ داخل الكرة وقطع زائد خارجها.

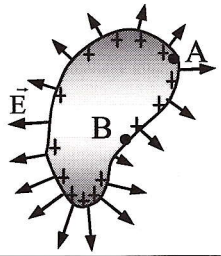
٤-٦- كمون ناقل مشحون *Potential charged conductor:*

وجدنا في الفصل السابق أنه عندما يكون لدينا ناقل مصمت في حالة توازن يحمل محصلة شحنة، فإن هذه الشحنة تنتقل إلى السطح الخارجي للناقل. بالإضافة لذلك أظهرنا أن الحقل الكهربائي في الجوار المباشر لسطح الناقل المتوازن يكون عمودياً على هذا السطح بينما الحقل داخل الناقل يكون مساوياً للصفر إذا كان للحقل الكهربائي مركبة موازية للسطح فإن هذه المركبة ستسبب حركة الشحنات على السطح وسيولد ذلك تياراً وبالتالي لن يكون الناقل في حالة توازن.

سنظهر الآن أن كل نقطة من سطح الناقل المشحون والمتوازن لها نفس قيمة الكمون. لنأخذ نقطتين A و B على سطح الناقل المشحون كما في الشكل (15-4)، يكون الحقل E على طول المسار السطحي الذي يصل بين هاتين النقطتين، دائماً عمودياً على الانزياح ds وعليه فإن $\vec{E}\cdot\vec{ds}=0$. باستخدام كل من هذه النتيجة والعلاقة (3-4) نستنتج أن فرق الكمون بين النقطتين B،A من الضروري أن يكون مساوياً الصفر أي أن:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{ds} = 0$$

تطبق هذه النتيجة على أي نقطتين على السطح، وعليه فإن V ثابت القيمة في أي مكان على السطح لناقل مشحون في حالة التوازن. وهذا يعني: أن سطح أي ناقل مشحون ومتوازن هو سطح تساوي كمون. وبما أن الحقل الكهربائي داخل الناقل يساوي الصفر فإنه يمكننا الاستنتاج أن الكمون ثابت في أي مكان داخل الناقل ويساوي قيمته على السطح أي أن الناقل بأكمله داخله وسطحه يشكلان معاً سطح تساوي كمون واحد.



الشكل (15-4):
ناقل ذو شكل عشوائي يملك شحنة موجبة. في حالة التوازن تنتقل جميع الشحنات إلى السطح وتكون كثافتها غير منتظمة.

بناءً على ما سبق فإن تحريك شحنة اختبارية من داخل الناقل المشـــحون إلى سطحه لا يتطلب بذل أي عمل. نأخذ على سبيل المثال كرة معدنية نصف قطرها R وشحنتها الكلية موجبة قيمتها Q كما في الشكل (a -16-4). يتجه الحقل الكهربائي قطرياً نحو الخارج وتعطى قيمته خارج الكرة المشحونة بالعلاقة:

$$E = \frac{k_e Q}{r^2}$$

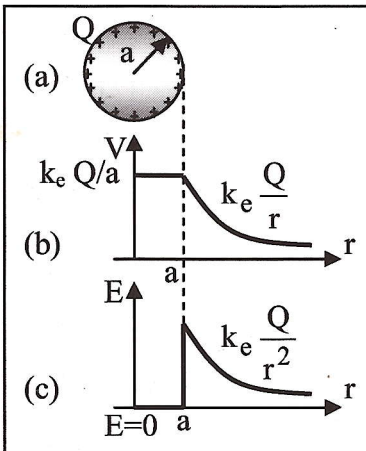
وسنرى في هذا المثال أن الكمون داخل وعلى سطح الكرة يجب أن تكـــون قيمتـــه بالنسبة للانهاية مساوية:

$$V = \frac{k_e Q}{R}$$

أما الكمون خارج الكرة فتعطى قيمته بالعلاقة:

$$V = \frac{k_e Q}{r}$$

يظهر الشكل (b -16 -4) الكمون بتابعية المسافة r عن مركز الكرة المشحونة ويظهر الشكل (c -16-4) تغير الحقل الكهربائي بتابعية المسافة أيضاً.



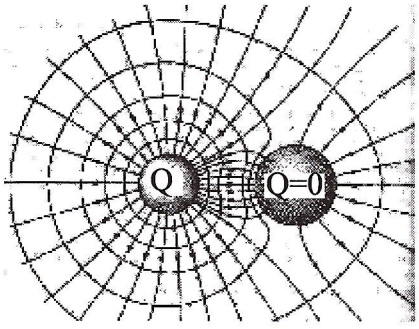
الشكل (16-4):
مخطط بياني لـــ E بتابعيـــة r، من أجل ناقل كروي مشحون بشحنة منتظمة ومعزولة. الحقل داخل الكرة (r<a) يتغير خطياً مع r، الحقل خـــارج الكـــرة (r>a) يماثل حالـــة الشـــحنة النقطية Q المتوضعة في المبدأ.

عندما تتوضع محصلة شحنة على ناقل كروي تكون الكثافة السطحية للشحنات منتظمة كما هو مبين في الشكل (a-16-4)، لكن إذا كان الناقل غير كروي كمـــا في الشكل (15-4) فتكون الكثافة السطحية للشحنات عالية في المناطق التي نصف قطـــر انحنائها صغيراً أي التي تكون محدبة، وتكون كثافة الشحنات منخفضة في المناطق التي

يكون نصف قطر انحنائها كبيراً ومقعرة. بما أن الحقل الكهربائي في الجوار المباشر للناقل المشحون يكون متناسباً طرداً مع كثافة الشحنات السطحية σ، فإن الحقل الكهربائي يكون عالياً بجوار السطوح التي لها أنصاف أقطار انحناء صغيرة ويصل إلى قيم عالية جداً في المناطق المدببة.

يظهر الشكل (17-4) خطوط الحقل الكهربائي حول ناقلين كرويين، الناقل الصغير يحمل شحنة مقدارها Q وشحنة الكبير تساوي الصفر، في هذه الحالة تصبح الكثافة السطحية غير منتظمة على سطحي الناقلين. الكرة التي محصلة شحنتها صفر تتحرض عليها شحنة سالبة على الوجه المقابل للكرة المشحونة وشحنة موجبة على الوجه البعيد.

تمثل الخطوط المغلقة سطوح تساوي الكمون من أجل هذه التشكيلة من الشحنات. وهنا أيضاً تكون خطوط الحقل عمودية على سطح الناقل في أية نقطة، بالإضافة لذلك تكون سطوح تساوي الكمون عمودية على خطوط الحقل في حدود الناقل وفي أي مكان آخر في الفضاء.

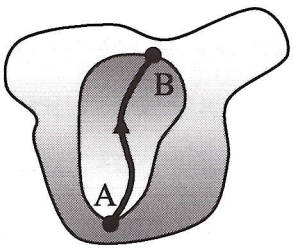


الشكل (17-4):
خطوط الحقل الكهربائي لكرتين ناقلتين بحجمين مختلفين وشحنتين مختلفتين أيضاً.

٤-٦-١- التجويف داخل ناقل *A Cavity within a Conductor:*

لنأخذ الآن ناقلاً ذا شكل كيفي يحوي تجويفاً، كما في الشكل (18-4)، لنفرض أنه لا توجد شحنة داخل التجويف. الحقل الكهربائي داخل التجويف يجب أن يكون مساوياً الصفر، بغض النظر عن الشحنة الموزعة على السطح الخارجي للناقل، بالإضافة

إلى ذلك، إن الحقل في التجويف يساوي الصفر حتى ولو تواجد حقل كهربائي خارج الناقل.



الشكل (18-4):
الحقل معدوم في تجويف في ناقل كيفي في حالة توازن كهربائي.

من أجل اختبار هذه النقطة نستخدم الحقيقة بأن كل نقطة على الناقل تقع على نفس سطح تساوي الكمون ولذلك فإن أي نقطتين B,A على سطح التجويف يجب أن تقعا على نفس الكمون، ولنتخيل الآن أن حقل كهربائي $\vec{E}$ متواجد في التجويف ولنوجد قيمة فرق الكمون $V_B - V_A$ المعرف بالعلاقة:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{s}$$

إذا كان $\vec{E} \neq 0$ فإنه يمكننا دوماً إيجاد مسار بين B,A يكون من أجل $\vec{E}.d\vec{s}$ عدداً موجباً دوماً وعليه يجب أن يكون التكامل موجباً. لكن بما أن $V_B - V_A = 0$ فإن التكامل يجب أن يساوي الصفر، ويمكن إزالة هذا التناقض عند أخذ $\vec{E} = 0$ داخل التجويف، وعليه نستنتج أن التجويف المحاط بجدران ناقلة يكون خالياً من الحقل الكهربائي، طالما إنه لا توجد شحنات داخل التجويف.

لهذه النتيجة تطبيقات هامة، فمثلاً يمكن حماية دارة إلكترونية أو حتى مخبر كامل من الحقول الخارجية عن طريق إحاطته بجدران ناقلة ندعوها قفص فارادي. في الغالب تكون مثل هذه الحماية ضرورية عند إجراء قياسات كهربائية حساسة.

٤-٦-٢- إنفراغ كورونا *Corona Discharge*:

هناك ظاهرة تعرف بإنفراغ كورونا وتلاحظ غالباً قرب النقاط المدببة من ناقل ينقل كموناً عالياً. يظهر هذا الانفراغ على شكل تألق محفز مرئي للعين المجردة.

يصبح الهواء في هذه العملية ناقلاً نتيجة تأين جزيئات الهواء في المناطق التي تكون فيها الحقول الكهربائية عالية الشدة، فعند درجة الحرارة والضغط المناسبين يحدث هذا الانفراغ من أجل شدة الحقل الكهربائي المساوية $3\times10^{6}V/m$ تقريباً. ولأن الهواء يحوي عدداً صغيراً من الأيونات (تولد بواسطة الأشعة الكونية على سبيل المثال)، فإن الناقل المشحون يجذب الأيونات المعاكسة بالإشارة من الهواء، إذ إنه قرب النقاط المدببة حيث تكون الحقول الكهربائية عالية جداً تسرِّع أيونات الهواء إلى سرع عالية. هذه الأيونات ذات الطاقات العالية تتصادم مع جزيئات الهواء الأخرى مولدة أيونات أكثر ويؤدي ذلك إلى زيادة ناقلية الهواء، ويترافق بالتالي الانفراغ في معظم الأحيان مع تألق مرئي يحيط بالنقاط المدببة.

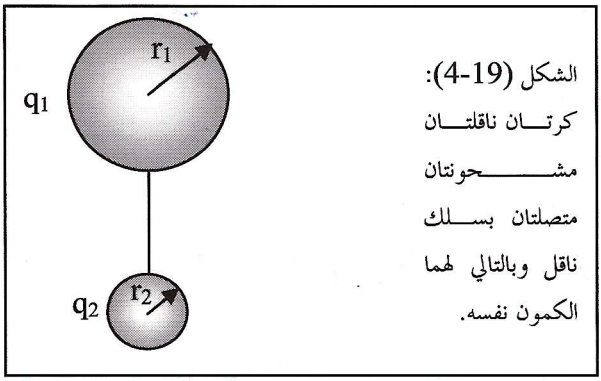
مثال (٤-١٢): كرتان مشحونتان موصولتان:

كرتان ناقلتان نصفا قطريهما r_1 , r_2 تفصل بينهما مسافة أكبر بكثير من نصف قطر كل منهما، تتصل هاتان الكرتان إحداهما بالأخرى بواسطة سلك ناقل، كما في الشكل (19-4)، إذا كانت الشحنتان على الكرتين في حالة التوازن هما q_1 , q_2 على الترتيب. أوجد النسبة بين شدتي الحقلين على سطحي الكرتين.

الحل:

بما أن الكرتين موصولتان بواسطة سلك ناقل فإن لكل منهما الكمون نفسه (تشكلان معاً سطح تساوي كمون):

$$V = k_e \frac{q_1}{r_1} = k_e \frac{q_2}{r_2}$$



الشكل (19-4): كرتان ناقلتان مشحونتان متصلتان بسلك ناقل وبالتالي لهما الكمون نفسه.

وعليه تكون النسبة بين شحنتيهما هي:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad (1)$$

بما أن كل من الكرتين بعيدتان إحداهما عن الأخرى، فإن الشحنة تتوزع على سطح كل منهما بصورة منتظمة، ونستطيع بالتالي التعبير عن قيمة الحقل الكهربائي على سطح كل منهما كما يلي:

$$E_1 = k_e \frac{q_1}{r_1^2} \quad , \quad E_2 = k_e \frac{q_2}{r_2^2}$$

وبأخذ النسبة بين هذين الحقلين والاستفادة من العلاقة (1) نجد أن:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad (2)$$

وبالتالي يكون الحقل بجوار الكرة الأصغر أشد منه في جوار الكرة الأكبر.

٤-٧- تجربة قطرات الزيت لميليكان

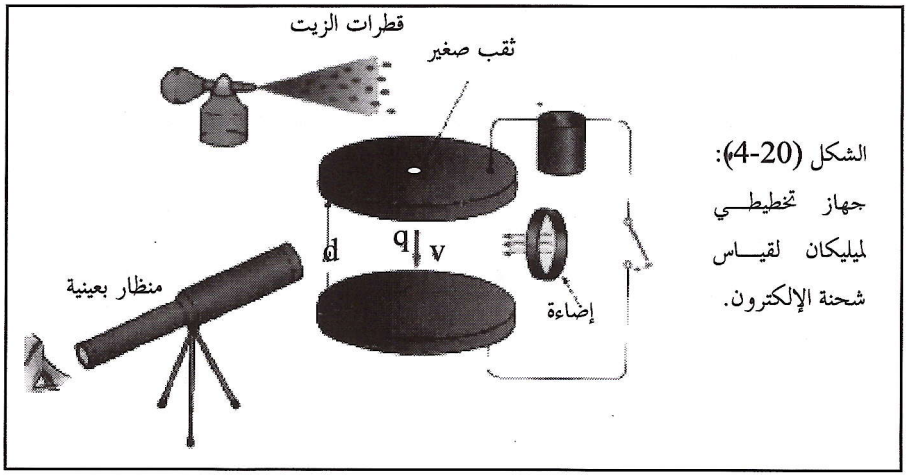
The Millikan oil drops Experiment:

خلال الفترة من عام 1909 حتى عام 1913 أجرى العالم روبرت ميليكان (Robert A. Millikan) مجموعة من التجارب الرائعة التي قاس من خلالها الشحنة العنصرية التي يحملها الإلكترون e، وأثبت من خلالها الطبيعة المكممة للشحنة الكهربائية. يظهر الشكل (20-4) الأجهزة المستخدمة من قبل ميليكان، وهي تتضمن صفيحتين معدنيتين متوازيتين، يسمح لقطرات الزيت التي يطلقها مرذاذ (رشاش) الزيت بالعبور من خلال ثقب صغير في الصفيحة العليا، وهناك حزمة ضوئية موجهة أفقياً تستخدم لإضاءة قطرات الزيت، والتي تظهر بواسطة منظار يكون محوره عمودياً على الحزمة الضوئية. عندما تظهر القطرات بهذه الطريقة فإنها تظهر كنجوم متألقة بمواجهة الخلفية المعتمة، ويمكن بذلك تعيين معدل القطرات المفردة الساقطة.

لنفرض أن قطرة مفردة كتلتها m وتحمل شحنة مقدارها q مرئية (ظاهرة). وأن شحنتها سالبة. إذا لم يكن هناك حقل كهربائي بين الصفيحتين فإن القوتين اللتين

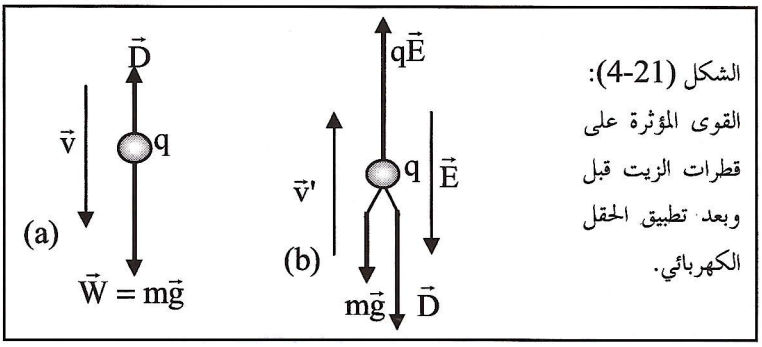
تؤثران على الشحنة هما قوة الجاذبية $m\vec{g}$ وتؤثر نحو الأسفل وقوة الاحتكاك $\vec{D}$ وتؤثر نحو الأعلى، كما أشير في الشكل (4-21-a)، تتناسب قوة الاحتكاك طرداً مع سرعة القطرة عندما تصل القطرة القيمة النهائية للسرعة v فإن كل من القوتين تكون في حالة توازن مع الأخرى أي أن:

$$m\vec{g} = \vec{D}$$



الشكل (4-20): جهاز تخطيطي لميليكان لقياس شحنة الإلكترون.

لنفرض الآن أنه تم تطبيق الحقل الكهربائي بين الصفيحتين عن طريق الوصل بقطبي بطارية بحيث توصل الصفيحة العليا بالكمون الأعلى. تؤثر في هذه الحالة قوة جديدة هي $q\vec{E}$ على القطرة المشحونة. بما أن q سالبة و $\vec{E}$ يتجه نحو الأسفل، فإن هذه القوة الكهربائية $q\vec{E}$ تتجه نحو الأعلى، كما في الشكل (4-21-b)، إذا كانت هذه القوة كبيرة بشكل كافٍ، فإن القطرة تتحرك نحو الأعلى وتؤثر في هذه الحالة قوة الاحتكاك $\vec{D}$ باتجاه الأسفل.



الشكل (4-21): القوى المؤثرة على قطرات الزيت قبل وبعد تطبيق الحقل الكهربائي.

عندما تتوازن هذه القوة المتجهة نحو الأعلى مع محصلة قوتي الجاذبية والاحتكاك اللتين كلتاهما تؤثر نحو الأسفل، عندئذٍ تصل قطرة الزيت القيمة النهائية لسرعتها v'.

عندما يطبق الحقل تتحرك القطرة ببطء نحو الأعلى بمعدلات سرعة تكـــون في العادة من مرتبة مئات السنتمترات في الثانية. يكون معدل سقوط القطرات بغيـــاب الحقل قابلاً للمقارنة، لذلك فإن قطرة مفردة ذات كتلة ثابتة ونصف قطر ثابت مـــن الممكن أن تتأرجح لساعات صعوداً وهبوطاً، وذلك عن طريق إلغاء أو تشغيل الحقل الكهربائي. وبعد إجراء القياسات على آلاف من القطرات، وجد ميليكان ومساعدوه أن جميع القطرات وبدقة مقدارها 1% تملك شحنة مساوية لعدد صحيح ما مضروب بشحنة الإلكترون e:

$$q = n\,e \quad ; n = 0, -1, -2, -3, \ldots\ldots$$

لقد كانت تجربة ميليكان برهاناً قاطعاً وأكيداً على أن الشحنة مكممة. لقد حصـــل ميليكان على جائزة نوبل في الفيزياء في العام 1923 لقاء هذا العمل.

٤-٨- تطبيقات الكهرباء الساكنة

Applications of Electrostatics:

استخدمت مبادئ الكهرباء الساكنة في تطبيقات مختلفة، ستتم مناقشة بعضها في هذا القسم. بعض التطبيقات الأكثر عملية للكهرباء الساكنة هي المرسبات المستخدمة في إنقاص التلوث الكيميائي للجو الناجم عن محطات الطاقة التي تســـتخدم الفحـــم كوقود، وفي التصوير الجاف، هذه العملية التي أحدثت ثورة في تقنيات التصوير.

وتتضمن التطبيقات العلمية للكهرباء الساكنة المولدات الكهربائيـــة الســـاكنة لمسرعات الجسيمات الأولية المشحونة وفي مجال المجاهر الأيونية التي تستخدم لتصـــوير الذرات على سطح العينات المعدنية.

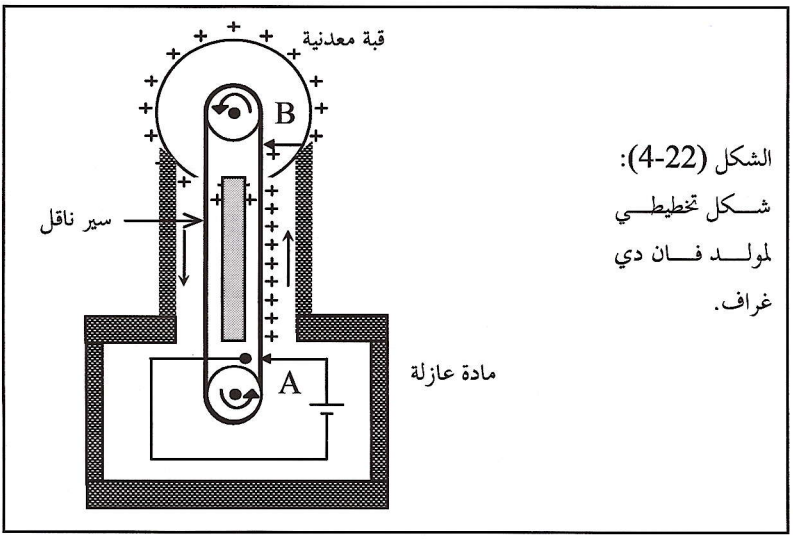
٤-٨-١ - مولد فان دي غراف *The Van de Graaff Generator:*

وصفنا في الفصل السابق تجربة تشرح طريقة انتقال الشحنات إلى الناقل المجوف (تجربة دلو الجليد لفارادي)، عندما يوضع ناقل مشحون على تماس داخل ناقل مجوف

فإن جميع شحنات الناقل الأول تنقل إلى الناقل المجوف. ومن حيث المبدأ يمكن رفع كل من شحنة وكمون الناقل المجوف بدون حدود عن طريق تكرار العملية.

استخدم روبرت فان دي غراف هذا المبدأ لتصميم وبناء مولد كهرباء ساكنة، ويستخدم هذا النوع من المولدات على نطاق واسع في اتجاهات الفيزياء النووية، الفكرة الأساسية موصوفة في الشكل (22-4)، تنقل الشحنات بصورة مستمرة إلى قطب التوتر العالي عن طريق حركة سير من مادة عازلة.

إن قطب التوتر العالي عبارة عن معدن مجوف مركب على عمود عازل. يُشحن السَّيْرُ بواسطة إنفراغ كورونا الذي يحصل بين فرشاة معدنية A (مؤلفة من أبر معدنية لينة) متمثلة بالسهم الملامس للسير، وشبكة مؤرضة تحافظ على الإبر المعدنية بكمون موجب يكون في العادة من مرتبة 10^4V، تنقل الشحنات الموجبة على السير المتحرك إلى القطب الآخر (وهو القبة المعدنية) عن طريق فرشاة معدنية أخرى في B، بما أن الحقل الكهربائي يكون مهملاً داخل الناقل المفرغ فإن الشحنات على السير تنتقل بسهولة إلى القطب الأعلى ذي التوتر العالي بغض النظر عن كمونه.



الشكل (22-4): شكل تخطيطي لمولد فان دي غراف.

عملياً يمكن رفع كمون قطب التوتر العالي إلى أن يحصل الانفراغ الكهربائي عبر الهواء. بما أن الحقل الكهربائي الذي يحول الهواء إلى ناقل هو حوالي 3×10^6V/m فإن

كرة معدنية نصف قطرها 1m يمكن أن يرفع كمونها حتى قيمة عظمى مقدارها 3×10^6V.

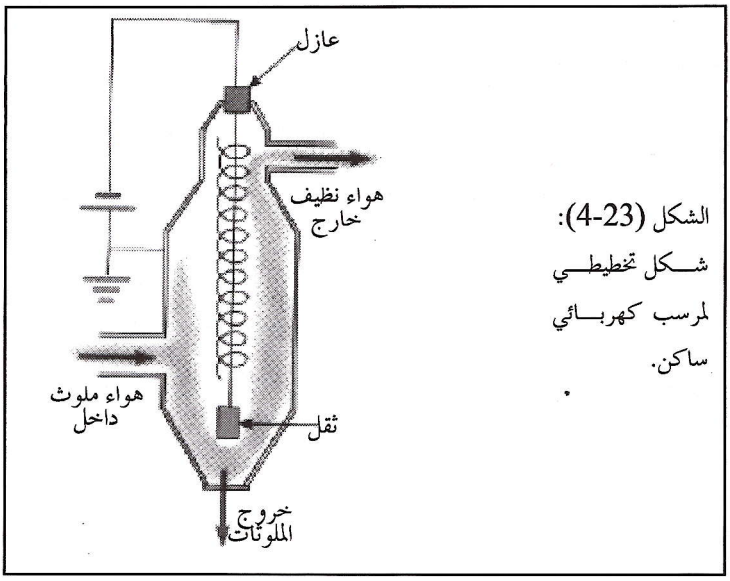
ويمكن رفع الكمون أكثر من ذلك عن طريق زيادة نصف قطر الناقل المجوف وأيضاً عن طريق وضع كامل الجملة في وعاء محكم الإغلاق مملوءة بغاز بضغط مرتفع. كما يمكن لمولدات فان دي غراف أن تنتج فروق كمون بارتفاع 20 مليون فولت. تصل البروتونات التي تسرع عبر فروق كمون كهذه إلى سرعاتٍ تمكنها من البدء في تفاعلات نووية بينها وبين نوى أهدف مختلفة.

٤-٨-٢- المرسبات الكهربائية الساكنة *The Electrostatic Precipitator:*

أحد التطبيقات الهامة للإنفراغ الكهربائي في الغازات هو جهاز يدعى المرسب الكهربائي الساكن. يستخدم هذا الجهاز، الشكل (23-4)، لإزالة مواد خاصة من مركبات الغازات وبذلك يُنقص تلوث الهواء. إنه مفيد بشكل خاص في محطات الطاقة التي تستخدم احتراق الكربون في العمليات الصناعية التي تنتج كميات هائلة من الدخان. الأجهزة الحالية قادرة على إلغاء أكثر من 99% وزناً من الرماد والغبار من الدخان.

يظهر الشكل (23-4) الفكرة الأساسية للمرسب الكهربائي الساكن. يُحافَظ على توتر عالٍ (من 40 kV إلى 100 kV عادةً) بين السلك الذي يسير نحو الأسفل باتجاه مركز الأنبوبة والجدار الخارجي الذي يكون مؤرضاً، ويكون كمون السلك سالب بالنسبة للجدار، بالتالي يتجه الحقل الكهربائي باتجاه السلك، يصل الحقل الكهربائي بجوار السلك إلى قيم عالية بشكل كافٍ ليسبب إنفراغ كورونا حول السلك وليشكل شوارد موجبة، وإلكترونات و شوارد سالبة مثل O_2^-. عند تسريع الإلكترونات والشوارد السالبة باتجاه الجدار الخارجي بواسطة حقل كهربائي غير منتظم، تصبح عندها الجسيمات الملوثة في تيار الغاز مشحونة بسبب التصادمات، وبسبب عملية الأسر الإلكتروني أيضاً تسحب هذه الجسيمات من قبل الحقل

الكهربائي نحو الجدار الخارجي. وعن طريق الهز الدوري للأنبوب، تتسرب الجسيمات من المحلول وتتجمع في الأسفل.



الشكل (23-4): شكل تخطيطي لمرسب كهربائي ساكن.

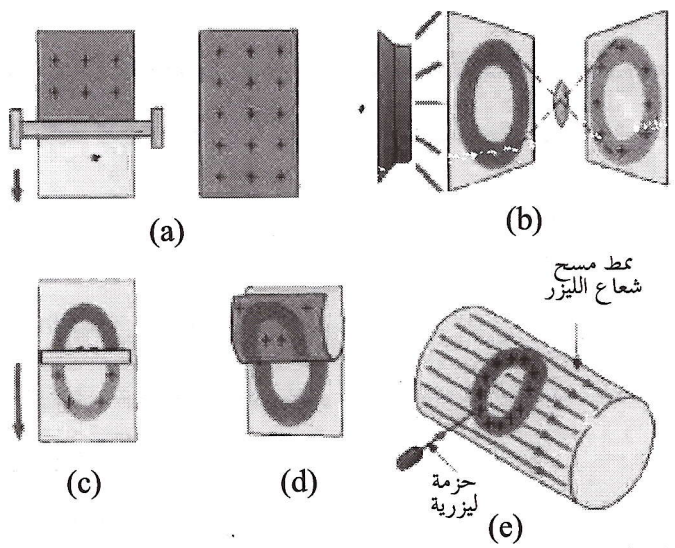
يستخدم المرسب الكهربائي الساكن بالإضافة إلى ذلك، في تغليف المواد الثمينة لحمايتها، ويكون هذا التغليف على شكل أكسيد معدني.

٤-٨-٣-التصوير الجاف Xerography:

تستخدم عمليات التصوير على نطاق واسع للحصول على نسخ من الكتابات والوثائق وغيرها من المواد المطبوعة، طورت الفكرة الأساسية لهذه العملية من قبل (Chester Carlson)، وقد حصل من أجلها على براءة اختراع في العام 1940. الفكرة الأولى التي جعلت هذا العمل استثنائي هي استخدام المواد الناقلة للصور لتشكيل صورة (ناقل الصور هو المادة التي تكون سيئة النقل في الظلمة لكنها تتحول إلى ناقل كهربائي جيد عندما تتعرض للضوء).

يوضع الشكل (24-4) عملية التصوير الجاف. يغلف في البداية لوحاً زجاجياً بغشاء رقيق من مادة ناقلة ضوئياً (عادة من السيلينوم أو مركب من مركباته)، ويعطى اللوح بعد ذلك شحنة كهربائية موجبة ساكنة وهو في وسط معتم، ثم تُسقط الصورة

الضوئية المرغوب بها على السطح الناقل ضوئياً المشحون فيصبح ناقلاً فقط في مناطق اللوح المتوافقة مع الصورة الضوئية السالبة (وهي التي عكست فيها ألوانها فالأسود يصبح أبيضاً مثلاً) فيولد الضوء في هذه المناطق حاملات شحنة (إلكترونات) تتعادل مع الشحنات الموجبة. أما المناطق الأخرى من اللوح الحامل للمادة الناقلة ضوئياً فإنها لا تتعرض للضوء وتكون متفقة مع الصورة الضوئية الموجبة (وهي التي لم تعكس فيها ألوانها)، التي تكمن فيها صورة الجسم كتوزع سطحي موجب للشحنات.



الشكل (24-4): عملية التصوير الجاف.

a. السطح الناقل للصورة يشحن إيجابياً.

b. تشكل باستخدام منبع ضوء وعدسة صورة خفية على شكل توزع شحني موجب .

c. يُذرى على السطح الذي يحوي الصورة بودرة مشحونة سلبياً فتلتصق بمناطق السطح الحاوية للصورة فقط.

d. تلصق ورقة معطاة شحنة موجبة على اللوح فتنتقل الصورة إليها. تعالج الورقة بعدئذ بالحرارة لتثبيت المسحوق على عليها.

e. طابعة ليزرية تعمل بصورة مشابهة للتصوير الجاف ما عدا أن الصورة تنتج هنا عن طريق تشغيل وإطفاء حزمة ليزرية تقوم بمسح اسطوانة مغلفنة بالسيلينوم.

في المرحلة التالية يذرى مسحوق مشحون سلبياً (يدعى Toner) على اللوح فيلتصق باللوح في مناطق الصورة الموجبة فقط، عند هذه اللحظة تصبح الصورة مرئية.

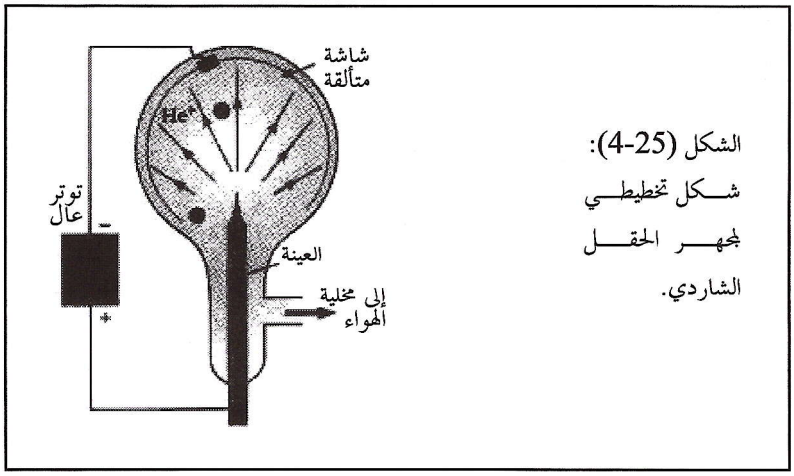
بعد ذلك تُطْبَق بشكل جيد ورقة مشحونة إيجابياً بقياس مناسب على هـذا اللـوح فتنتقل الصورة الموجبة المرئية إليه. وأخيراً تثبت مادة التونر Toner على سطح الورقة من خلال تطبيق حرارة على الورقة. وتمكّن هذه النتائج من نسخ الأصل باستمرار.

٤-٨-٤- مجهر الحقل الشاردي The Field-Ion Microscope:

أشرنا في الفقرة (4-6) أن شدة الحقل الكهربائي يمكن أن تكون عاليـة جـداً قرب الرأس المدبب على ناقل مشحون، والجهاز الذي يعمل على هذه الظاهرة هـو مجهر الحقل الشاردي، الذي اخترع من قبل E. A. Mueller مـن جامعـة ولايـة بنسلفانيا. الغاية من هذا الجهاز هي رؤية الذرات المفردة على سطح عينة صغيرة جداً.

يوضح الشكل (4-25) بينة هذا الجهاز الأساسية ، تصنع العينة المراد دراسـتها من سلك رفيع جداً ذي رأس مدبب كرأس الإبرة، ويتم ذلك عادة بطريقة التآكـل الحمضي، يكون قطر رأس السلك حوالي 0.1μm عادةً.

توضع العينة في مركز أنبوبة زجاجية مفرّغة تحوي شاشة متألقة، تدخل كميـة قليلة من الهليوم في الأنبوبة، ويطبق توتر عالٍ (فرق الكمون)، بين العينـة والشاشـة يؤدي إلى توليد حقل كهربائي عالي الشدة قرب رأس العينة.



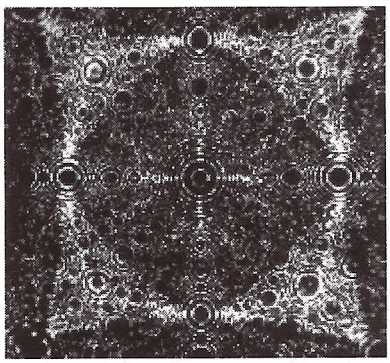
الشكل (4-25): شكل تخطيطي لجهر الحقل الشاردي.

تتشرد ذرات الهليوم بانتزاع إلكترونات منها تحت تأثير هذا الحقل العالي وذلك في الجوار القريب من رأس السلك، فتبقى شوارد الهيليوم الموجبة التي تسـرَّع باتجـاه

الشاشة المتألقة المشحونة سلبياً، ويؤدي ذلك إلى ارتسام نمط تداخلي على الشاشة يعبر عن خصائص الذرات الفردية لرأس العينة.

من المهم تبريد رأس العينة إلى درجة تمييع النتروجين السائل على الأقل لإبطاء الذرات، كما أنه من المهم الحصول على تفريغ عالٍ، تمكننا هذه الشروط من أخذ صورة عن توزع الذرات المفردة في سطح العينة، الأمر الذي يمكننا من دراسة البنية البلورية للعيتة.

ولسوء الحظ تنشئ الحقول الكهربائية العالية إجهاداً ميكانيكياً كبيراً قرب رأس العينة، وهذا يجعل تطبيق هذه التقنية مقتصراً على العناصر المعدنية المتينة مثل التنغستين والزينيوم، يبين الشكل (26-4) نمطاً لبلورة البلاتينيوم تم الحصول علية باستخدام هذا المجهر الشاردي.



الشكل (26-4):
نمط لبلورة البلاتينيوم تم الحصول عليه باستخدام مجهر الحقل الشاردي.

أسئلة ومسائل غير محلولة

الأسئلة:

١. حقل كهربائي منتظم يوازي المحور ox، بأي اتجاه يمكن لشحنة أن تتراح ضمن هذا الحقل بدون أن يطبق عمل خارجي عليها؟

٢. علل لماذا تكون سطوح تساوي الكمون دائماً عمودية على خطوط الحقل الكهربائي؟

٣. صف سطوح تساوي الكمون من أجل الحالات التالية:

a. شحنة خطية لانهائية.

b. كرة مشحونة بشحنة منتظمة.

٤. علل، من أجل الشحنة الكهربائية الساكنة في ناقل لماذا تكون جميع نقاط هذا الناقل على سطح تساوي كمون واحد.

٥. يكون الحقل الكهربائي داخل قشرة كروية مشحونة بانتظام مساوياً للصفر فهل يدل هذا ضمناً على أن الكمون داخلها يساوي الصفر؟ أوضح ذلك.

٦. يعرف كمون الشحنة النقطية على مسافة لانهائية منها بأنه يساوي الصفر لماذا لا يمكن القول عن كمون شحنة خطية لانهائية الطول أنه يساوي الصفر عندما $r = \infty$؟

٧. كرتان بنصفي قطرين مختلفين، ناقلتان ومشحونتان وموصولتان بسلك ناقل، أي من الكرتين تملك الكثافة الأكبر من الشحنات؟

٨. ما هو الكمون الذي من أجله يمكن لقبة مولد فان دي غراف أن ترتفع؟

٩. في أي نوع من الطقس تُفرغ فيه بطارية السيارة شحنتها أكثر؟ ولماذا؟

١٠. علل ظهور تألق حول خطوط التوتر العالي في بعض الأحيان.

١١. لماذا يجب تجنب الحواف الحادة والنقاط على النواقل المستخدمة في أجهزة التوتر العالي؟

١٢. كيف تحمي الدارات الإلكترونية والمخابر من تشويشات الحقول الكهربائية؟ ولماذا تقوم بذلك؟

١٣. لماذا يكون الجلوس في سيارة ذات هيكل معدني آمناً نسبياً أثناء حصول الصواعق؟

١٤. السير على الموكيت أو السجاد ومن ثم ملامسة شخص آخر يؤدي إلى صدمة كهربائية. أوضح لماذا يحصل ذلك؟

المسائل:

المسألة (1):

تبلغ المسافة بين قطبي شمعة الاشتعال في محرك سيارة 0.06cm، ومن أجل إنتاج شرارة كهربائية في مزيج الهواء والبترين فإنه يجب التوصل إلى حقل كهربائي بينهما قيمته $3\times10^{6}V/m$. ما هي القيمة الدنيا للكمون الواجب تطبيقه من قبل دارة الاشعال لدى انطلاق السيارة؟

المسألة (2):

يسرع دويترون (نواة تحوي بروتون ونترون) خلال فرق كمون مقداره 2.7kV. المطلوب:

a. ما مقدار الطاقة التي يكسبها هذا الدويترون؟

b. ما هي السرعة التي يصل إليها إذا كان قد انطلق من السكون؟

المسألة (3):

ما هو العمل المنجز من قبل منبع طاقة كهربائية بتحريك 6.02×10^{23} إلكترون (عدد أفوكادرو من الإلكترونات)، من النقطة حيث الكمون الكهربائي 9V إلى النقطة التي كمونها 5V-؟ ملاحظة: يقاس الكمون بالنسبة إلى نقطة مرجعية مشتركة.

المسألة (4):

صفيحتان متوازيتان المسافة بينهما 1.8cm، وتبلغ قيمة الحقل الكهربائي بين هاتين الصفيحتين $2.4\times10^{4}N/C$. المطلوب:

a. أوجد فرق الكمون بين هاتين الصفيحتين.

b. ما هي الطاقة الحركية التي يكتسبها دويترون يسرع من الصفيحة الموجبة إلى السالبة؟

المسألة (5):

يتحرك إلكترون بموازاة المحور ox وتكون سرعته الابتدائية 3.7×10^{6}m/s عند نقطة المبدأ، تتناقص سرعته لتصبح 1.4×10^{5}m/s عند النقطة $x = 2$ cm. المطلوب:

a. احسب فرق الكمون بين نقطة المبدأ وبين النقطة $x = 2$ cm.

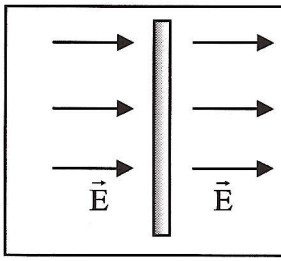
b. أي من النقطتين ذات كمون أعلى؟

المسألة (6):

قضيب عازل مشحون بشحنة خطية بكثافة مقدارها $\lambda = 40\ \mu C/m$، وتبلغ الكثافة الكتلية الخطية لهذا القضيب $\mu = 0.1\ kg/m$، يُترك هذا القضيب من السكون في حقل كهربائي منتظم شدته $E = 100\ V/m$، ومتجه بشكل عمودي على القضيب، كما في الشكل (27-4). المطلوب:

a. عين سرعة القضيب بعد أن يسير مسافة مقدارها 2m.

b. أعد الطلب (a) إذا كان الحقل غير عمودي على القضيب.



الشكل (27-4): قضيب عازل مشحون في حقل كهربائي منتظم.

المسألة (7):

تبلغ قيمة الكمون الكهربائي لشحنة نقطية q على بعد r منها $V = 400\ V$، وتبلغ قيمة الحقل على نفس البعد r من هذه الشحنة $E = 150\ N/C$. المطلوب: عين قيم كل من r , q.

المسألة (8):

على أية مسافة من شحنة نقطية مقدارها 8μC يكون الكمون الكهربائي مساوياً 3.6×10^4V؟

المسألة (9):

يعطى الكمون الكهربائي الساكن المتعلق بجملة من الشحنات النقطية بالإحداثيات الديكارتية بالعلاقة التالية:

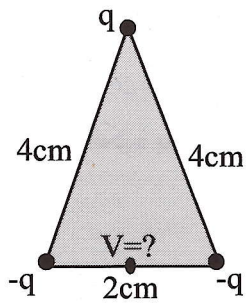
$$V=\frac{36}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}-\frac{45}{x^2+(y-2)^2}$$

حيث V بالفولت. عين قيم ومواضع جميع الشحنات في هذه الجملة.

المسألة (10):

يوجد ثلاث شحنات على رؤوس مثلث متساوي الساقين، كما في الشكل (28-4). إذا علمت أن q=7μC فالمطلوب:

احسب قيمة الكمون الكهربائي في منتصف القاعدة.



الشكل (28-4):
توزع شحن على رؤوس مثلث.

المسألة (11):

بين أن العمل اللازم لوضع أربع شحنات نقطية، قيمة كل منها Q، على رؤوس مربع طول ضلعه S هو $5.41\ k_e\ Q^2/S$.

المسألة (12):

يبلغ الكمون الكهربائي فوق منطقة معدنية في الفضاء $V=5x-3x^2y+2yz^2$.

والمطلوب:

a. أوجد علاقات المركبات x , y , z بالحقل الكهربائي فوق هذه المنطقة.

b. أوجد قيمة الحقل في النقطة p التي إحداثياتها (1,0,-2)m.

المسألة (13):

أربع جسيمات متماثلة شحنة كل منها $q = 0.5\mu C$، وكتلة كل منها 0.01kg، تترك من السكون على رؤوس مربع طول ضلعه 0.1m. المطلوب: كم تصبح سرعة كل من هذه الشحنات عندما تتضاعف المسافة بينها وبين مركز المربع؟

المسألة (14):

الكمون في المنطقة بين $x = 0$ و $x = 6m$ هو $V = a + bx$ حيث:

$b = -7V/m , a = 10V$، المطلوب:

a. ما هي قيمة الكمون الكهربائي في النقطتين $x = 6m$, $x = 0.3\ m$؟

b. عين قيمة واتجاه الحقل الكهربائي في هاتين النقطتين.

المسألة (15):

عندما توضع كرة ناقلة غير مشحونة نصف قطرها a في مبدأ جملة إحداثية xyz وتكون هذه الجملة متوضعة في حقل كهربائي ابتدائي منتظم $\vec{E} = \vec{E}_0 \vec{k}$، فإن الكمون الكهربائي الساكن الناتج من أجل النقاط داخل الكرة هو $V(x,y,z) = V_0$ ومن أجل النقاط خارج الكرة يعطى الكمون الكهربائي الساكن بالعلاقة:

$$V(x,y,z) = V_0 - E_0 z + \frac{E_0 a^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

حيث V_0 (ثابت) هو الكمون الكهربائي الساكن على الناقل. المطلوب: استخدم القانون أعلاه لتعيين المركبات (x,y,z) للحقل الكهربائي الناتج.

المسألة (16):

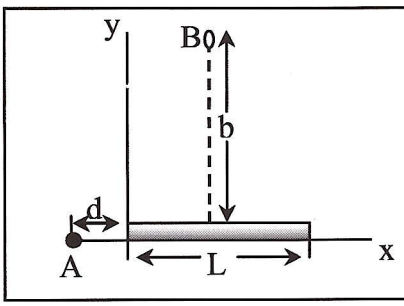
نأخذ حلقة نصف قطرها R وشحنتها الكلية Q موزعة بانتظام على محيطها. المطلوب: ما هو فرق الكمون بين نقطة مركز الحلقة ونقطة واقعة على محورها وتبعد عن المركز بمقدار 2R؟

المسألة (17):

قضيب طوله L، متوضع على طول المحور ox، تنطبق نهايته اليسرى على المبدأ، كما في الشكل (4-29)، وهو يحمل شحنة تتوزع خطياً عليه بشكل غير منتظم وفق العلاقة: $\lambda = \alpha x$ حيث α ثابت موجب، والمطلوب:

a. ما هي واحدات α، b؟

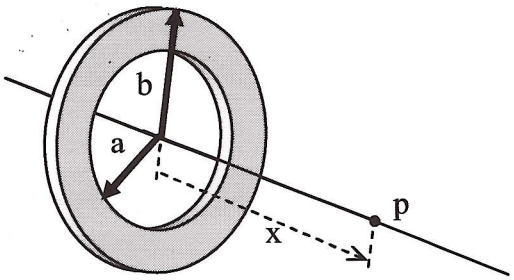
b. احسب الكمون الكهربائي في النقطة a.



الشكل (4-29): توزع شحنات مستمرة على قضيب.

المسألة (18):

احسب الكمون الكهربائي في النقطة p على محور الحلقة الموضحة في الشكل (4-30)، والتي تملك شحنة موزعة عليها بكثافة سطحية منتظمة مقدارها σ.



الشكل (4-30): توزع شحنات مستمرة على حلقة.

المسألة (19):

ما عدد الإلكترونات الواجب إزالتها من كرة ناقلة غير مشحونة بدايةً، نصف قطرها 0.3m لإنتاج كمون مقداره 7.5kV على سطحها؟

المسألة (20):

ناقلان كرويان موصولان بواسطة سلك ناقل طويل، تحمل هذه الجملة شحنة مقدارها $20\mu C$. المطلوب:

a. إذا كان نصف قطر إحداها هاتين الكرتين 4cm ونصف قطر الأخرى 6cm، ما هو الحقل الكهربائي في الجوار المباشر لكل من سطحي الكرتين؟

b. ما هو الكمون الكهربائي لكل من الكرتين؟

الفصل الخامس

الطاقة الكهربائية الساكنة

Electrostatic energy

٥-١ - طاقة مجموعة من الشحنات

Energy of a group charges:

نعرف الطاقة الكهربائية الساكنة لمجموعة شحنات كهربائية ذات توزع معين بأنها العمل اللازم لبناء هذا التوزع بنقل الشحنات المكونة له من اللانهاية بسرعة لا متناهية في الصغر.

نأخذ بدايةً مجموعة من الشحنات النقطية $(q_1,q_2,..,q_n)$ ذات توزع محدد ولنحسب استناداً للتعريف السابق الطاقة الكهربائية الساكنة المختزنة في هذه المجموعة.

لتكن $(p_1,p_2,..,p_n)$ هي على الترتيب مواضع هذه الشحنات واستناداً إلى التعريف تكون الطاقة اللازمة لنقل q_1 مثلاً من اللانهاية إلى موضعها p_1 مساوية للعمل المبذول لعملية النقل هذه، وهي تعطى بالعلاقة:

$$W_1 = -\int_0^{p_1} q_1 \vec{E}\, d\vec{r} = q_1 U_1$$

وإذا فرضنا أن الموقع p_1 لا يتأثر بأي حقل من أية شحنة أخرى (على اعتبار أن الشحنة q_1 هي أول شحنة تنقل)، فتكون قيمة محصلتي الحقول الكهربائية والكمون الكهربائي مساويتين للصفر في هذه النقطة، وهكذا تكون الشحنة q_1 قد انتقلت من ∞ حيث الكمون معدوم إلى p_1 حيث الكمون معدوماً أيضاً وبالتالي فالعمل الكهربائي المبذول على هذا الانتقال يكون معدوماً أي أن:

$$W_1 = q_1.U_1 = 0$$

ننقل الآن الشحنة q_2 من ∞ إلى الموضع p_2 في المجموعة بسرعة لامتناهية في الصغر مع تثبيت الشحنة q_1 في موضعها p_1، إن العمل اللازم تقديمه للقيام بهذه العملية هو الطاقة الكامنة للشحنة q_2 الناتجة عن تأثرها بالكمون المتولد عن الشحنة q_1 في النقطة p_2،

وهو يكون على حساب قوة أو طاقة خارجية أو على حساب قوة أو طاقة الحقل وذلك بحسب إشارتي الشحنتين، وهكذا تكون الطاقة الكامنة للشحنة q_2:

$$W_2 = q_2 U_1(p_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2}$$

لننقل الآن الشحنة q_3 من اللانهاية بسرعة لا متناهية في الصغر إلى الموضع p_3 في المجموعة حيث الكمون المتولد عن الشحنتين q_1 و q_2 المفروضتين بأنهما ثابتتين في موضعهما، فتكون طاقتها:

$$W_3 = q_3[U_1(p_3) + U_2(p_3)] = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{p_1 p_3} + \frac{q_2}{p_2 p_3}\right)$$

وهكذا فإن الطاقة الكامنة للشحنة q_i المنقولة من ∞ إلى الموضع p_i ضمن المجموعة بسرعة لا متناهية في الصغر وحيث أنه يوجد في الموضع p_i الكمون التأثيري لجميع الشحنات النقطية التي نقلناها قبل q_i، هي:

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{p_1 p_i} + \frac{q_2}{p_2 p_i} + \cdots\cdots + \frac{q_{i-1}}{p_{i-1} p_i}\right)$$

$$W_i = q_i U_i = q_i \sum_{j=1}^{i-1} U_j(p_i) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{p_i p_j} \qquad (5\text{-}1)$$

يمثل المجموع السابق الكمون الناشئ عن الشحنات $(q_1, q_2, .., q_{i-1})$ في الموقع p_i وهو لا يتضمن الكمون الذاتي للشحنة q_i.

بفرض أننا نقلنا جميع الشحنات فتكون الطاقة الكهربائية الساكنة الكلية للمجموعة n من الشحنات الكهربائية النقطية المتوازنة هي:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{p_i p_j} \qquad (5\text{-}2)$$

يتمثل المجموع السابق في المصفوفة أدناه بمجموع كافة الحدود تحت القطرية $(i, j < i)$ فقط، أي:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i,j<i}^{n} \frac{q_i q_j}{p_i p_j}$$

$2W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot$ $\cdot\sum_{i\neq j}^{n}\frac{q_iq_j}{p_ip_j}$		$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j,i<j}^{n}\frac{q_jq_i}{p_jp_i}$							
		$W_1=0$	W_2	W_3	...	W_j	...	W_{n-1}	W_n
$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_{i,j<i}\frac{q_iq_j}{p_ip_j}$	$W_1=0$	$\frac{q_1q_1}{p_1p_1}$	$\frac{q_1q_2}{p_1p_2}$	$\frac{q_1q_3}{p_1p_3}$	... ...	$\frac{q_1q_j}{p_1p_j}$	... ...	$\frac{q_1q_{n-1}}{p_1p_{n-1}}$	$\frac{q_1q_n}{p_1p_n}$
	W_2	$\frac{q_2q_1}{p_2p_1}$	$\frac{q_2q_2}{p_2p_2}$	$\frac{q_2q_3}{p_2p_3}$	... ...	$\frac{q_2q_j}{p_2p_j}$	... ...	$\frac{q_2q_{n-1}}{p_2p_{n-1}}$	$\frac{q_2q_n}{p_2p_n}$
	W_3	$\frac{q_3q_1}{p_3p_1}$	$\frac{q_3q_2}{p_3p_2}$	$\frac{q_3q_3}{p_3p_3}$	... ...	$\frac{q_3q_j}{p_3p_j}$	... ...	$\frac{q_3q_{n-1}}{p_3p_{n-1}}$	$\frac{q_3q_n}{p_3p_n}$
	⋮ ⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮	⋮ .... ⋮	⋮ ⋮	⋮ .... ⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮
	W_i	$\frac{q_iq_1}{p_ip_1}$	$\frac{q_iq_2}{p_ip_2}$	$\frac{q_iq_3}{p_ip_3}$	... ...	$\frac{q_iq_j}{p_ip_j}$	... ...	$\frac{q_iq_{n-1}}{p_ip_{n-1}}$	$\frac{q_iq_n}{p_ip_n}$
	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ .... ⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ .... ⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮
	W_{n-1}	$\frac{q_{n-1}q}{p_{n-1}p}$	$\frac{q_{n-1}q}{p_{n-1}p}$	$\frac{q_{n-1}q}{p_{n-1}p}$	... ...	$\frac{q_{n-1}q}{p_{n-1}p}$	... ...	$\frac{q_{n-1}q_n}{p_{n-1}p_n}$	$\frac{q_{n-1}q}{p_{n-1}p}$
	W_n	$\frac{q_nq_1}{p_np_1}$	$\frac{q_nq_2}{p_np_2}$	$\frac{q_nq_3}{p_np_3}$	... ...	$\frac{q_nq_j}{p_np_j}$	... ...	$\frac{q_nq_{n-1}}{p_np_{n-1}}$	$\frac{q_nq_n}{p_np_n}$

حيث أن $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ لم يكتب في خلايا المصفوفة لضيق المساحة، وإن الجمع على $i=1,2,\ldots\ldots,n$ وَ $j=1,2,\ldots\ldots,n$ بدون أي قيد أو شرط يعطى بمجموع جميع حدود المصفوفة أعلاه بدون استثناء، أي:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j}^{n}\frac{q_i q_j}{p_i p_j}=\ldots\ldots$$

أما إذا كان الجمع مقيداً بأحد الشروط $(i\neq j),(j,i<j)$ مثلاً، فإنه يعني مجموع جميع حدود المصفوفة فوق القطرية وجميع الحدود اللاقطرية على الترتيب، أي:

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j<i}^{n}\frac{q_i q_j}{p_i p_j}\quad;\quad 2W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}^{n}\frac{q_i q_j}{p_i p_j}$$

إن الدليلين i,j يلعبان الدور نفسه في المجموع السابق، وبالتالي يمكن كتابة هذا المجموع على أحد الشكلين التاليين وذلك بالاستعانة بالمصفوفة السابقة:

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j<i}^{n}\frac{q_i q_j}{p_i p_j}\quad;\quad W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j,i<j}^{n}\frac{q_j q_i}{p_j p_i}$$

وبالجمع طرفاً لطرف نجد:

$$2W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sum_{i,j<i}^{n}\frac{q_i q_j}{p_i p_j}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j,i<j}^{n}\frac{q_j q_i}{p_j p_i}\right)$$

$$2W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}^{n}\frac{q_i q_j}{p_i p_j}=\sum_{i=1}^{n}q_i\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{q_j}{p_i p_j}\right)$$

يمثل المقدار بين قوسين مجموع كمونات جميع الشحنات في النقطة p_i موقع الشحنة q_i باستثناء الكمون الذاتي المتولد عنها. وهو ضعف الكمون المستخدم في العلاقة (5-1) ومن أجل i-1=n، لذلك نستخدم الرمز U_i أيضاً للدلالة عليه ونكتب:

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=j}^{n}q_i U_i \qquad (5\text{-}3)$$

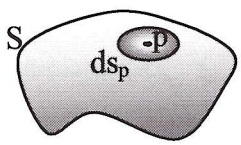
٥-٢- طاقة توزع مستمر من الشحنات

:Energy of continues distribution of charges

درسنا في الفقرة السابقة الطاقة الكهربائية الساكنة الكلية لتوزع مؤلف من عدد من الشحنات النقطية المتوضعة في نقاط محددة ولنعمم ذلك من أجل توزع سطحي

للشحنات بكثافة سطحية σ غير منتظمة بشكل عام. يحوي كل عنصر سطح ds_p المحيط بالنقطة p، على الشحنة العنصرية $dq_p=\sigma.ds_p$ كما في الشكل (5-1). ويمكن دوماً اعتبار الشحنة المتوضعة على سطح عنصري (تفاضلي) بأنها نقطية. بفرض U_p هو الكمون في النقطة p المتولد عن التوزع السطحي للشحنات ما عدا الشحنة العنصرية dq_p الموجودة في النقطة p وبالتالي فإن طاقة هذه الشحنة العنصرية هي:

$$dW = dq_p \cdot U_p = \sigma \cdot ds_p \cdot U_p$$



الشكل (5-1):
الطاقة الكامنة لتوزع سطحي مستمر.

وتكون الطاقة الكهربائية الساكنة الكلية للتوزع السطحي للشحنات بكثافة سطحية منتظمة σ مساوية لمجموع طاقات الشحنات العنصرية، وبالاستعانة بالعلاقة (5-3) نجري تكاملاً للطاقة على كافة السطح S على النحو التالي:

$$W = \frac{1}{2}\iint_S \sigma U_p ds_p \qquad (5\text{-}4)$$

وباعتبار أن الكمون في أية نقطة من جسم مشحون يكون ثابت لأن الجسم المشحون يشكل سطح تساوي كمون، فإنه يمكن حذف الأدلة من العلاقة (5-4) فتصبح كما يلي:

$$W = \frac{1}{2}\iint_S \sigma U ds \qquad (5\text{-}5)$$

يمكن تطبيق النتيجة السابقة على حجم يحوي توزع حجمي ما من الشحنات بكثافة حجمية منتظمة ρ فتكون الطاقة الكهربائية الساكنة الكلية مساوية لمجموع طاقات الشحنات العنصرية، وبالاستعانة بالعلاقة (5-3) نجري تكاملاً للطاقة على كافة الحجم V على النحو التالي:

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \rho U dv \qquad (5\text{-}6)$$

٥-٣- طاقة ثنائي أقطاب في حقل كهربائي ساكن

:Energy of dipole in an electrostatic field

درسنا سابقاً حركة ثنائي الأقطاب الكهربائي الموضوع في حقل كهربائي، ونريد الآن حساب طاقته الكهربائية الساكنة عند وضعه في حقل كهربائي.

يتألف ثنائي الأقطاب الكهربائي من شحنتين نقطيتين متساويتين بالقيمة ومتعاكستين بالإشارة. ليكن p_1 موقع إحدى شحنتي الثنائي وليكن p_2 موقع الشحنة الأخرى، وبإهمال التأثير المتبادل بين شحنتي الثنائي نفترض الكمون الكلي في الموضع p_1 هو U_{p1} والكمون الكلي في p_2 هو U_{p2} (يستبعد من هذين الكمونين كمونا كلٍ من شحنتي الثنائي الذاتيين التأثيريين لكلٍ منهما على الأخرى. أي أن الكمونين U_{p2} ، U_{p1} ناتجان عن الشحنات المولدة للحقل الذي وضعنا فيه هذا الثنائي) وتكون بالتالي الطاقة الكلية لهذا الثنائي مساوية لمجموع طاقتي شحنتيه أي:

$$W = qU_{p1} - qU_{p2} = q\,(U_{p1} - U_{p2}) \qquad (5\text{-}6)$$

إن $U_{p1} - U_{p2}$ هو فرق الكمون بين موقعي شحنتي الثنائي، وإذا رمزنا لطول الثنائي بالرمز ℓ فإنه بحسب تعريف الثنائي يمكننا أن نكتب فرق الكمون بين نقطتين ضمن الحقل $\vec{E}$ على النحو:

$$U_{p1} - U_{p2} = \int_0^{\ell} \vec{E}\,d\vec{r} \Rightarrow U_{p1} - U_{p2} = \vec{E}.\vec{\ell}$$

وبالتالي تصبح العلاقة (5-6) على النحو:

$$W = q\,.\vec{E}\,.\vec{\ell} = \vec{E}\,.\vec{p} \qquad (5\text{-}7)$$

حيث أن المتجه $\vec{p}$ يمثل عزم ثنائي الأقطاب الكهربائي والذي يعطى بالعلاقة:

$$\vec{p} = q\,\vec{\ell} \qquad (5\text{-}8)$$

٥-٤- الطاقة الكامنة في مكثفة مشحونة

:Potential Energy in charged Capacitor

إن إضافة شحنة مقدارها ΔQ إلى مكثفة شحنتها Q وفرق الكمون بين لبوسيها U يتطلب بذل عمل مقداره:

$$\Delta W = (\Delta Q) \cdot U \qquad (5\text{-}9)$$

عند شحن المكثفة من القيمة 0 إلى القيمة Q فإن ذلك يترافق مع تزايد فرق الكمون بين لبوسيها من القيمة 0 إلى القيمة U ومعنى ذلك أن القيمة المتوسطة لفرق الكمون أثناء عملية الشحن $\frac{U}{2}$ وبذلك يكون العمل اللازم لشحن المكثفة بالشحنة Q هو:

$$W = \frac{1}{2}.U.Q \qquad (5\text{-}10)$$

وحسب مبدأ انحفاظ الطاقة يتحول هذا العمل الذي قدم من قبل المولد إلى طاقة كهربائية تخزن في المكثفة ونستطيع الحصول مجدداً على هذه الطاقة عند تفريغ المكثفة وتظهر على شكل شرارة أثناء عملية التفريغ تشتمل على أشكال أخرى من الطاقة مثل الضوء والصوت والحرارة ... . وتسمى الطاقة الداخلية أو الطاقة الكامنة للمكثفة ونرمز لها بالرمز E_{in} ونكتب بالتالي:

$$E_{in} = \frac{1}{2}.U.Q \qquad (5\text{-}11)$$

وبكتابة $Q = C.U$ تصبح العلاقة (5-11) كما يلي:

$$E_{in} = \frac{1}{2}.C.U^2 \qquad (5\text{-}12)$$

وبكتابة $U = \frac{Q}{C}$ تصبح العلاقة (5-11) كما يلي:

$$E_{in} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \qquad (5\text{-}13)$$

إن شحن المكثفة يعني نقل الشحنة من أحد طرفيها إلى الآخر، وهو يكافئ شحن ناقل بنفس الشحنة التي تنقل إليه من اللانهاية، فالطاقة الكامنة له هي العمل اللازم لنقل تلك الشحنة وتحسب بنفس الطريقة آنفة الذكر.

٥-٥- طاقة شحنة نقطية *Energy of Point Charge:*

تولد الشحنة النقطية حقلاً كهربائياً ساكناً في كل نقطة من نقاط الفضاء وتعطى قيمة هذا الحقل في كل نقطة من الفراغ بدلالة بعدها r عن الشحنة النقطية بالعلاقة التالية:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

من المعلوم أن الطاقة الكامنة لا تكون معرفة إلا بوجود أكثر من شحنة، ولكننا يمكن أن نفهم أن الطاقة الكامنة تكون موجودة حيث يوجد الحقل، ويمكن اعتبارها متناسبة مع مربع شدته في نقطة ما ومع الحجم المحيط بتلك النقطة، ونكتب:

$$dW = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV \qquad (5\text{-}14)$$

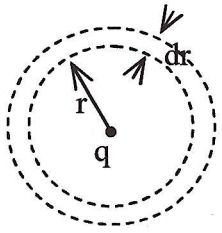
نأخذ الحجم العنصري dV كقشرة كروية سماكتها dr وسطحها $2\pi r^2$ ونجعله محيطاً بالشحنة المذكورة كما في الشكل (2-5)، ولحساب الطاقة الكامنة في هذا الحجم العنصري dV نكتب:

$$dW = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \right)^2 .2\pi r^2 .dr$$

$$dW = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2} .dr$$

وهكذا فإن الطاقة الكلية تحسب بأن نكامل على نصف القطر r من الصفر إلى اللانهاية فنجد:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\infty \varepsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$



الشكل (2-5):
الطاقة الكامنة للقل الكهربائي.

$$W = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r}\right]_0^\infty \qquad (5\text{-}15)$$

إن قيمة التكامل السابق هي عدم تعيين أي لا معنىً فيزيائياً لها وأن هذه المشكلة ناتجة من كوننا طبقنا على حساب الطاقة قوانين القشرة الكروية واعتبرنا أبعاد الشحنة

النقطية معدومة، و يمكن حل هذه المشكلة بإعطاء أبعاد غير معدومة لحوامل الشحنة النقطية ،لأنه طالما أن الشحنة موجودة فإن لها أبعاد وإن إلغاء هذه الأبعاد قد يسبب في بعض الحالات تناقضات كما في حالتنا هذه.

ملاحظة:

بفرض R نصف قطر صغير جداً للشحنة النقطية q فالعلاقة (5-15) تصبح:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{R} \qquad (5\text{-}16)$$

من هذه العلاقة نلاحظ أن الطاقة الكامنة في هذه الحالة مقدار كبير جداً، وهذا يتوافق مع حالة مجموعة من الشحنات النقطية المتماثلة موضوعة في حجم صغير جداً يؤدي إلى تنافرها بشكل قوي جداً نظراً لطاقتها الكامنة الكبيرة (إنها موجبة في هذه الحالة). هذه الفكرة تفسر ظاهرة الرؤوس المدببة التي تعمل على تشريد الهواء المجاور، أو تتسبب في حصول شرارة كهربائية بين الرأس المدبب وبين أقرب ناقل إليه.

أما إذا كان نصف قطر R كبيراً فالعلاقة السابقة تعطي الطاقة الكامنة لكرة مشحونة وتكون قيمتها منطقية.

مسائل محلولة:

مسألة ١:

احسب التغير في الطاقتين الكامنة والحركية لإلكترون يتحرك بين نقطتين واقعتين ضمن حقل كهربائي يبلغ فرق الكمون بينهما 1V، علماً أن شحنة الإلكترون تساوي $e=1.602\times10^{-19}$ Coul.

الحل:

نعلم أن العمل بدلالة غيره من المقادير الفيزيائية يساوي:

العمل = الشحنة × فرق الكمون = تغير الطاقة الكامنة = تغير الطاقة الحركية. أي:

$$\Delta E_{kin} = \Delta E_{po} = q.U = 1.602\times10^{-19}\times1 = 1.602\times10^{-19} J$$

ونوضح هذا التغير كما يلي: إذا تمت حركة الإلكترون على حساب قوى خارجية ضد الاتجاه الذي تفرضه قوى الحقل الكهربائي ، فإن طاقته الكامنة تزداد بمقدار

$1.602\times10^{-19}J$ وتتناقص بالمقابل طاقته الحركية بنفس المقدار، أما إذا تمت حركة الإلكترون على حساب قوى الحقل الكهربائي وفق الاتجاه الذي يفرضه هذا الحقل تتناقص طاقته الكامنة بالمقدار السابق وتزداد طاقته الحركية بنفس المقدار، ويعزى ذلك إلى قانون انحفاظ الطاقة.

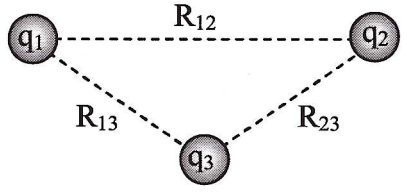
مسألة٢:

احسب الطاقة الكامنة لثلاث جسيمات مشحونة بشحنات مختلفة والموضحة بالشكل (5-3)، إذا علمت أن شحناتها $q_1=2\mu C, q_2=-6\mu C, q_3=3\mu C$ وأن المسافات بينها $r_{12}=3m, r_{12}=4m, r_{12}=5m$.

الحل:

إن جلب q_1 من اللانهاية إلى موقعها البعيد عن تأثيرات أية شحنة أخرى لا يتطلب أي عمل، أما جلب q_2 من اللانهاية إلى موقعها الذي كمونه V_1 والناتج عن q_1 فقط فهو يتطلب العمل q_2V_1، وحيث أن هذا العمل يساوي الطاقة الكهربائية الكامنة U لجملة هذين الجسيمين عندما تفصل بينهما مسافة r_{12} كما في الشكل (5-3) فإننا نكتب:

$$U = q_2 V_1 = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



الشكل (5-3): تتعلق الطاقة الكامنة بالشحنتين والمسافة الفاصلة بينهما.

وهي طاقة موجبة إذا كانت هاتين الشحنتين من نفس الإشارة، وهذا يوافق قوة تتدافع بينهما والعمل سالب لأنه يصرف من قبل قوة خارجية عليهما حتى تصبح إحداهما بجانب الأخرى. أما إذا كان للشحنتين إشارتان متعاكستان فالطاقة سالبة، وهذا يوافق قوة تجاذب بينهما والعمل موجب لأن الشحنتين في هذه الحالة تعطيانه للوسط الخارجي بعد تصبحان إحداهما بجانب الأخرى.

إذا كانت الجملة تتألف من ثلاثة جسيمات مشحونة، فإنه يمكن الحصول على الطاقة الكامنة الكلية لها بتطبيق الحد الثالث من الفقرة (٥-١) ونكتب:

$$U=k_e\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}}+\frac{q_1q_3}{r_{13}}+\frac{q_2q_3}{r_{23}}\right)$$

يمثل الحدان الأخيران في هذه العلاقة العمل اللازم لجلب الشحنة q_3 من اللانهاية إلى جانب كل من q_1 , q_2 باعتبارهما جلبتا أولاً، وفي الواقع لا تتعلق النتيجة بالترتيب الذي تُنقل به الشحنات.

بالتعويض عن القيم المعطاة نجد:

$$=8.99\times10^9\left(\frac{(2\times10^{-6})(-6\times10^{-6})}{3}+\frac{(2\times10^{-6})(3\times10^{-6})}{4}+\frac{(-6\times10^{-6})(3\times10^{-6})}{5}\right)$$

$$\Rightarrow\ U=-5.484\times10^{-2}\ J$$

مسألة٣:

يتحرك جسيم مشحون بحرية ضمن حقل كهربائي منتظم من النقطة a إلى النقطة b، فإذا كانت شحنة هذا الجسيم q+ وكتلته m، بين أنه يكون لمجموع طاقتيه الكامنة والحركية القيمة نفسها في كل من النقطتين المذكورتين.

الحل:

تعطى سرعة الجسيم عند النقطة b بالعلاقة:

$$v_b^2 = v_a^2 + 2\,d\,.\gamma \qquad (a)$$

حيث d المسافة بين النقطتين a ، b وتمثل γ تسارع الجسيم وتعطى القوة المؤثرة عليه بالعلاقة:

$$\vec{F} = q\,.\vec{E} = m\,\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{q\,.\vec{E}}{m}$$

نبدل γ بقيمتها في العلاقة (a) فينتج:

$$v_b^2 = v_a^2 + 2\,\frac{q\,.E}{m}\,d$$

نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ m/2 فنحصل على:

$$\frac{1}{2}m.v_b^2 = \frac{1}{2}m.v_a^2 + q.E.d \qquad (b)$$

يمثل الجداء E.d فرق الكمون بين النقطتين a ، b أي أن:

$$V = V_b - V_a = E.d$$

نعوض V بقيمتها في العلاقة (b) فتصبح:

$$\frac{1}{2}m.v_b^2 = \frac{1}{2}m.v_a^2 + q(V_b - V_a)$$

$$\frac{1}{2}m.v_b^2 - q.V_b = \frac{1}{2}m.v_a^2 - q.V_a \qquad (c)$$

إن المقدار $\frac{1}{2}m.v_a^2$ يمثل الطاقة الحركية للجسيم في النقطة a ويمثل المقدار $q.V_a$ – الطاقة الكامنة له في النقطة نفسها. والمقدار $\frac{1}{2}m.v_b^2$ يمثل الطاقة الحركية للجسيم في النقطة b ويمثل المقدار $q.V_b$ – الطاقة الكامنة له في النقطة b أيضاً. والعلاقة (c) تمثل المطلوب.

أسئلة ومسائل غير محلولة

الأسئلة:

١. ما الفرق بين الكمون الكهربائي والطاقة الكامنة الكهربائية؟

٢. تتحرك شحنة سالبة مع اتجاه حقل كهربائي منتظم. هل تزداد الطاقة الكامنة لهذه الشحنة أم تنقص؟ وهل تتحرك هذه الشحنة إلى منطقة كمون أعلى أم أدنى؟

٣. علل فيزيائياً،لماذا تكون الطاقة الكامنة لشحنتين متماثلتين موجبة بينما تكون الطاقة الكامنة لشحنتين متعاكستين سالبة.

المسائل:

المسألة (1):

احسب سرعة البروتون الذي يسرع انطلاقاً من السكون خلال فرق كمون مقداره 120V. واحسب سرعة الإلكترون الذي يسرع خلال نفس فرق الكمون.

المسألة (2):

يسرع بوزيترون (له نفس كتلة الإلكترون ونفس قيمة شحنته ولكن بإشارة موجبة) من السكون بين نقطتين بفرق كمون محدد فتصل سرعته إلى 30% من سرعة الضوء. ما هي السرعة التي يمكن أن يصلها بروتون يسرع من السكون بين نفس هاتين النقطتين؟

المسألة (3):

يسرع إلكترون من حزمة في أنبوب الصورة لتلفزيون عادي خلال فرق كمون مقداره 20kV، والمطلوب قبل أن يصدم هذا الإلكترون سطح الأنبوب:

a. ما هي طاقته بواحدة eV؟ وما هي سرعته عندما يصدم الشاشة؟

b. ما هي كمية الحركة (الدفع) التي تنتقل إلى الشاشة بواسطة هذا الإلكترون؟

المسألة (4):

تسرع شاردة خلال فرق كمون مقداره 115V فيؤدي ذلك إلى زيادة طاقته الحركية بمقدار $7.37\times10^{-17}J$، المطلوب: احسب شحنة هذا الشاردة.

المسألة (5):

شحنتان نقطيتان $Q_1=5nC$, $Q_2=-3nC$، تفصل بينهما مسافة مقدارها 35cm، والمطلوب:

a. ما هي قيمة الطاقة الكامنة لهذا الزوج من الشحنات؟ ما دلالة الإشارة الجبرية للطاقة الكامنة؟

b. ما قيمة الكمون الكهربائي في النقطة الواقعة في منتصف المسافة بين الشحنتين؟

المسألة (6):

ينص نموذج بور لذرة الهيدروجين، على أن الإلكترون يمكن أن يوجد في مدارات محددة مسموح بها، ويعطى نصف قطر كل من مدارات بور بالعلاقة:

$$r = n^2 (0.0529\ nm)$$

حيث: $n = 1 , 2 , 3 ...$، المطلوب: احسب الطاقة الكامنة الكهربائية لذرة الهيدروجين عندما يكون الإلكترون في الأماكن التالية:

a. المدار الأول المسموح $n = 1$.

b. المدار الثاني المسموح $n = 2$.

c. عندما يتحرر الإلكترون من الذرة، أي عندما $r = \infty$. أعطِ إجاباتك بواحدة الإلكترون فولت eV.

المسألة (7):

شحنة مستوية لانهائية رقيقة تبلغ كثافتها السطحية $25\ nC/m^2$، وتتوضع في المستوي yz مروراً من نقطة المبدأ، وهي ذات كمون مقداره 1kV. ويتوضع سلك طويل شحنته الخطية 80nC/m بشكل موازٍ للمحور oy، ويقطع المحور ox في الموضع x=3m. المطلوب:

a. عين قيمة الكمون على طول المحور ox بين السلك والشحنة المستوية، بتابعية x.

b. ما هي الطاقة الكامنة الكهربائية لشحنة مقدارها 2nC متوضعة عند x =0.8m؟

الفصل السادس

المكثفات والعوازل

The Capacitors & Dielectrics

٦ – ١ – السّعات الكهربائية *Electric Capacitances:*

تمثل السعة الكهربائية خاصية هامة لناقل كهربائي ما، وهي تتعلق بشكله الهندسي وبوجود النواقل المجاورة له، ذلك أن وجودها يؤثر على ترتيب الشحنات داخل هذا الناقل.

لنقم بالتجربة التالية، بفرض أنه لدينا كما في الشكل (6-1)، قرصاً معدنياً على ساق عازلة، نصله بواسطة سلك رفيع وطويل إلى مقياس تكهرب electrometer لقياس الشحنة، ويمكن أن نستبدله بمقياس كمون لقياس الكمون، إذ أن القياسين الناتجين عن هذين المقياسين متناسبان. وبفرض أن المقياس يقع على مسافة كبيرة من اللوح المعدني وذلك لتجنب عملية الانشحان بالتأثير. نقوم بشحنه بشحنات مختلفة موجبة أو سالبة $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ فيكتسب كموناً ذاتياً في كل مرة، نقيس هذا الكمون من أجل كل شحنة فنجده على الترتيب $V_1, V_2, \ldots, V_n$، عند ذلك نجد النسبة بين الشحنة والكمون في جميع الحالات متساوية:

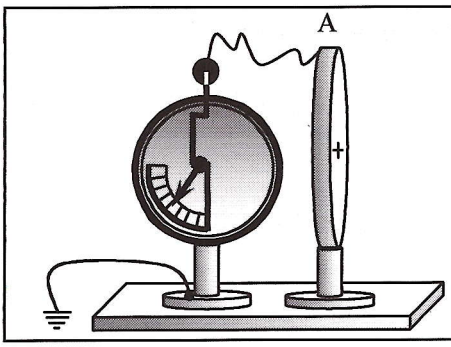
$$\frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_2}{V_2} = \ldots = \frac{Qn}{Vn}$$

هذا يعني أن كلٍ من الشحنة والكمون يتغيران زيادةً أو نقصاناً بحيث تبقى تلك النسبة ثابتة وهي ما نسميه سعة الناقل ونكتب:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad (6\text{-}1)$$

لنتعرف على سعة كرة معدنية، نأخذ كرة نصف قطرها R، وشحنتها Q فيكون الكمون على سطحها وفي داخلها مساوياً:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} \qquad (6\text{-}2)$$



الشكل (1-6):
قياس شحنة وكمون
قرص مشحون.

وهو كما علمنا في فصل الكمون الكهربائي أنه يساوي العمل اللازم لنقل واحدة الشحنة من اللانهاية إلى سطح الكرة، ويكون عملاً موجباً إذا كان على حساب طاقة الحقل الكهربائي وهذا ما يحصل إذا كانت واحدة الشحنة وشحنة الكرة من نوعين مختلفين، ويكون عملاً سالباً إذا تم على حساب قوى خارجية، وهذا ما يحصل إذا كانت واحدة الشحنة وشحنة الكرة من نفس النوع، وبناءً عليه يمكن كتابة فرق الكمون بين أية نقطة من سطح الكرة والنقطة الواقعة في اللانهاية، على اعتبار أن الكمون في اللانهاية معدوماً، على الشكل التالي:

$$U = V(R) - V(\infty) = V(R) - 0 = V(R)$$

بالتبديل من هذه العلاقة في العلاقة (6-2) ينتج:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (6\text{-}3)$$

تعطي العلاقة (6-1) سعة الكرة عندما يكون فرق الكمون بين سطحها واللانهاية أو الأرض مساوياً القيمة U، حيث نعتبر كمون الأرض معدوماً، كما تعطي العلاقة (6-3) هذه السعة بدلالة R الذي يعبر عن الشكل الهندسي للجسم وهو الكرة في هذه الحالة.

بناءً على العلاقة (6-3) نعرف المقدار C بأنه مَقْدِرة الجسم على استيعاب الشحنات الكهربائية، وندعوه بالسعة الكهربائية electric capacity وهو مقدار ثابت بالنسبة لناقل محدد ما لم يتغير هو والأجسام التي في جواره موضعاً وعدداً وشكلاً، فهو يختلف من ناقل لآخر بحسب شكل هذا الناقل الهندسي، ويمكن بحسب العلاقة (6-1)

أن نعرف السعة أيضاً في الحالة العامة بأنها النسبة الثابتة بين الشحنة التي يحملها هـذا الناقل وفرق الكمون الكهربائي بين أية نقطة منه والأرض.

للتعبير عن الشحنة بدلالة فرق الكمون يمكن كتابة العلاقة (6-1) على النحو:

$$Q = C\,U \qquad (6\text{-}4)$$

وهي كما نلاحظ علاقة خطية تمثل السعة فيها ميل المستقيم الذي يمكن رسمه باعتبار الشحنة تابع للكمون.

إن للسعة الكهربائية واحدة كغيرها من المقادير الفيزيائية تستنتج من العلاقـة (6-1) كما يلي:

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{Coul}{Volt} = \frac{A.S}{V} = F$$

حيث نختصر بالرمز F الكلمة Farad المأخوذة من اسم عالمٍ له مساهمة كبيرة في هذا المجال، ويمكن أن نكتب $1Farad = 1\frac{A.S}{V}$ في الجملة الدولية SI، وأيضـاً يمكـن أن نكتب التعريف التالي لواحدة الفاراد:

الفاراد Farad: هو سعة ناقل كهربائي يحمل شحنة مقدارها كولون واحـد (1Coul) عندما يكون فرق الكمون بينه وبين الأرض مساوياً فولطاً واحداً (1V).

يعتبر الفاراد واحدة كبيرة جداً، ولإيضاح كبرها نحسب سعة الكرة الأرضية كمثـال على ذلك، فباستخدام العلاقة (6-3) نجد:

$$C_{erth} = 4\pi\varepsilon_0 R_{erth} = (4\pi\varepsilon_0)(6{,}37.10^{6}) = 7{,}09.10^{-4}\ F$$

ونلاحظ أن سعة الكرة الأرضية لا تساوي إلا جزءاً بسيطاً من الفاراد، لذلك فإننـا عادة ما نستخدم أجزاء الفـاراد الصـغيرة كالتاليـة: الميكروفـاراد $1\mu F=10^{-6}F$ والنانوفاراد $1nF=10^{-9}F$ والبيكوفاراد $1pF=10^{-12}F$.

أما في الجملة السغثية CGS التي أخذت تسميتها من الواحدات سـنتمتر cm، غرام gr، ثانية sec، فإن واحدة السعة تحسب كما يلي: في الجملة السـغثية واحـدة القوة هي الدينه dyne وعبارتي قوة كولون والكمون هما:

$$F = \frac{q^2}{r^2} \quad , \quad V = \frac{q}{r} \Rightarrow F = V^2 \quad ; \quad q = V \cdot r$$

بالتالي يمكن أن نكتب واحدتي الكمون والشحنة في الجملة السغثية على النحو:

$$[V] = \sqrt{[F]} = \sqrt{dyne}$$

$$[q] = [V] \cdot [r] = \sqrt{dyne} \cdot cm$$

وباستخدام العلاقة (1-6) نجد المطلوب:

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{\sqrt{dyn} \cdot cm}{\sqrt{dyn}} = cm$$

فواحدة السعة الكهربائية الـ cm في الجملة السغثية هي سعة كرة ناقلة نصف قطرها 1cm، وهذا ما يتضح مباشرة عندما نكتب عبارة سعة الكرة مثلاً في الجملة السغثية، بعد أن نعلم $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$ في هذه الجملة فبالتعويض في العلاقة (3-6) نجد:

$$C = R \qquad (6\text{-}5)$$

أما العلاقة بين واحدتي السعة في الجملتين الدولية SI والسغثية CGS فيمكن إيجادها على النحو التالي:

نأخذ كرة ناقلة نصف قطرها 1cm ونحسب سعتها في الجملتين المذكورتين، ووجدنا آنفاً أن سعتها في الجملة السغثية تساوي 1cm، أما في الجملة الدولية فتكون سعتها وفقاً للعلاقة (3-6) وبعد تحويل نصف قطرها من السنتمتر إلى المتر نجد:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi \ 8{,}86.10^{-12}(F/m) \cdot 0{,}01(m) = 1{,}1134.10^{-13} \ F$$

أي أن:

$$1cm = 1{,}1134.10^{-13} \ F \quad ; \quad 1 \ F = 8{,}98.10^{12} \ cm$$

٦-٢- السعات والمكثفات الكهربائية

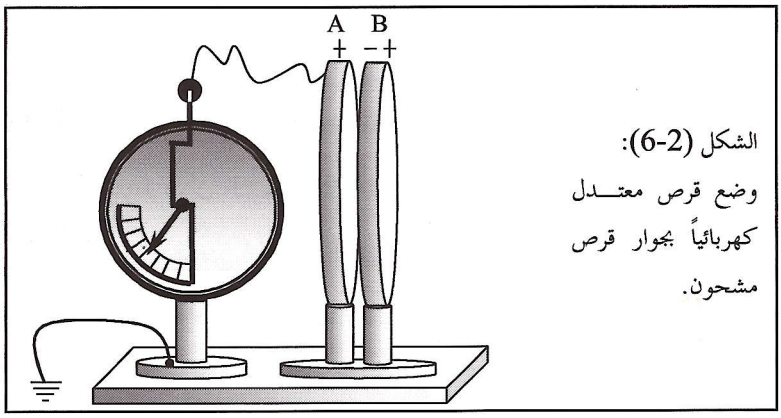
Electric Capacitances and Capacitors:

تبقى السعة الكهربائية لناقل ثابتة حسب العلاقة (3-6) ما دام مستقلاً في وجوده عن نواقل أخرى بعيدة بعداً كافياً بحيث لا يتأثر بها. ندعو كمون الناقل المشحون بالكمون الذاتي لأنه ناتج عن الشحنة المتوضعة عليه وأن تغيره لا يعني تغير هذه السعة بل يعني تغير الشحنة المتوضعة عليه. لنرَ ماذا يحصل عندما يوجد في جوار الناقل نواقل أخرى من خلال التجربة التالية:

ليكن القرص المعدني A في الشكل (1-6) مشحوناً بشحنة موجبة Q_1 مثلاً التي نقيسها بمقياس التكهرب فيكون كمونه الذاتي U_1 الذي نقيسه بمقياس الكمون، وعليه فسعته بحسب العلاقة (1-6) هي:

$$C_1 = \frac{Q_1}{U_1} \qquad (a)$$

نقرب الآن من القرص A لوحاً معدنياً آخر B مماثلاً له، ولكنه غير مشحون ومثبت أيضاً على ساق عازلة ويوضع بشكل موازي للّوح A كما في الشكل (2-6)، (التماثل والتوازي ليسا ضروريان في التجربة). تبقى شحنة القرص A ثابتة في هذه الحالة أي مساوية لقيمتها Q_1 في الحالة السابقة، لكن ما نلاحظه بواسطة مقياس الكمون هو تناقص كمون القرص A إلى القيمة U_2 وتزداد سعته في هذه الحالة بحسب العلاقة (1-6) أيضاً كما يلي:



الشكل (2-6):
وضع قرص معتدل كهربائياً بجوار قرص مشحون.

$$C_2 = \frac{Q_1}{U_2}; \quad U_2 < U_1 \;,\; C_2 > C_1 \qquad (b)$$

ندعو فرق كمون $\Delta U_1 = U_2 - U_1$ بفرق الكمون التأثيري لأنه ناتج عن تقريب الناقل B إلى جوار الناقل A.

يمكن الإبقاء على C_2 ثابتة بإضافة فرق الكمون هذا إلى المقام وإضافة مقدار ΔQ_1 مناسب إلى البسط ونكتب:

$$C_2 = \frac{Q_1}{U_2} = \frac{Q_1 + \Delta Q_1}{U_2 + \Delta U_1} = \frac{Q_2}{U_1}; \quad Q_2 > Q_1 \qquad (c)$$

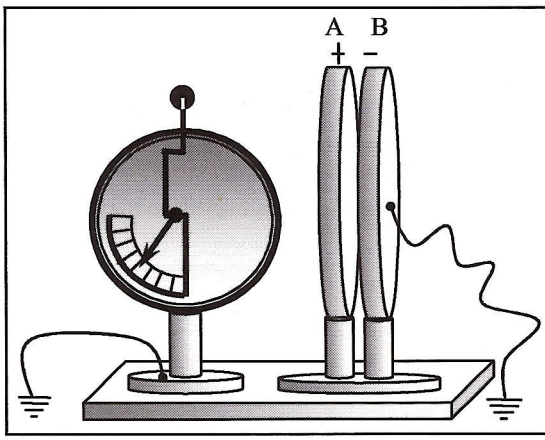
يمكن زيادة سعة الناقل A حتى القيمة C_3 بوصل الوجه البعيد للناقل B إلى الأرض فتتفرغ الشحنة الموجبة المتوضعة عليه، الشكل (3-6)، في حين يبقى الوجه القريب للناقل B محتفظاً بشحنته السالبة المتوضعة عليه، ويصبح كمون الناقل A مساوياً U_3 وهو أصغر من U_2، وفرق الكمون التأثيري هو $\Delta U_2 = U_3 - U_2$ الذي بإضافته إلى المقام يستوجب إضافة المقدار ΔQ_2 إلى البسط من أجل أن تبقى C_3 ثابتة، ويمكن أن نكتب:

$$C_3 = \frac{Q_1}{U_3} = \frac{Q_1 + \Delta Q_2}{U_3 + \Delta U_2} = \frac{Q_3}{U_1} ; \qquad (d)$$

$$Q_3 > Q_2 > Q_1 \ , \ U_3 < U_2 < U_1 \ , \ C_3 > C_2 > C_1$$

نفسر زيادة سعة الناقل المشحون A بتقريب الناقل B المعتدل بإحدى الفكرتين:

١. إن الشحنتين السالبة والموجبة المتساويتين بالقيمة المطلقة والمختلفتين بالإشارة، والمكتسَبتين بتأثير الناقل المشحون على وجهي الناقل المجاور المعتدل، القريب والبعيد على الترتيب، تؤثران على شحنة الناقل المشحون بقوتي تجاذب وتنافر، قوة التجاذب أكبر من قوة التنافر لأن الشحنة المماثلة أبعد بمقدار سماكة الناقل، فالمحصلة هي قوة تجاذب تعمل على إنقاص الحركة العشوائية للشحنات داخل الناقل المشحون مما يتيح مجالاً لاتساع شحنة إضافية، الأمر الذي يجعل شحنة الناقل المشحون تتكثف على وجهه الأيمن.



الشكل (3-6):
وصل الوجه البعيد للقرص المجاور للقرص المشحون بالأرض.

٢. إن الشحنتين المتولدتين بالتأثير على الناقل المجاور المعتدل تولـــدان كمـــونين تأثيريين سالب وموجب في موضع الناقل المشحون، السالب أكبر بالقيمة المطلقة من الموجب لأن شحنة الوجه المقابل أقرب من شحنة الوجه البعيد، فالمحصلة هي كمون تأثيري سالب يُجمع مع الكمون الذاتي للناقل المشحون، الأمر الذي يؤدي إلى إنقاص الكمون الكلي، وبالتالي زيادة السعة.

نستنتج مما سبق أن وجود ناقلين في جوار بعضهما البعض يؤدي إلى زيادة سعة كلٍ منهما وهما يشكلان مكثفة نظراً لإمكانية تكثيف الشحنات الأكبر التي يكســبها أحدُهما للآخر، ولهذا السبب سميت المكثفة بهذا الاسم وندعو الناقلين بلبوسي المكثفة. في الواقع في الحالة الخاصة التي يكون فيها الناقل منفرداً وبعيداً عن تأثيرات الأجسْـــام الأخرى، يمكن أن نعدّه مكثفة أيضاً، يعتبر هو أحد لبوسيها وأما اللبوس الآخر فيعتبر في اللانهاية.

٦-٣- عوامل السعة وعوامل التأثير

:Capacitance Coefficients and influence Coefficients

نخلص من الفقرة السابقة إلى أن أي جسم مشحون (جسم أول)، ندعوه جسماً محرِّضاً، يملك توزيعاً معيناً لشحنته عندما يكون منفرداً أي بعيداً عن أيـــة تـــأثيرات خارجية، ويولد حقلاً يعمل على تغيير طفيف في توزع شحنات جسم معتدل (أو غير معتدل)، (جسم ثان) ندعوه جسماً متحرضاً يوضع في الجوار. يولد الجسم المتحرض (الثاني) بدوره حقلاً يعمل على تغيير طفيف في توزع شـــحنات الجســـم المحـــرِّض (الأول)، وبالتالي يمتلك توزعاً جديداً لشحناته يؤدي إلى تغيير بسيط في حقله الـــذي يؤثر على الجسم المتحرض (الثاني)، مما يعمل على تغيير في توزع شحناته، وهكذا على هذا النحو يحصل التفاعل بسرعة الضوء بين الجسمين المحرّض والمتحرض حتى تستقر شحنات كل من الجسمين في توزع نهائي. وبالنتيجة تتوزع الشحنات في الجســـمين بحيث تكون محصلة الحقلين الناتجين عن جميع الشحنات المحرّضة والمتحرضـــة داخـــل

الجسمين معدومة. أما كمون الناقل المحرّض بعد التوازن فيساوي كمونه الذاتي قبل وضعه في جوار الناقل المتحرض مضافاً إليه الكمون التأثيري الناتج عن الناقل المتحرض، وكمون الناقل المتحرض هو الكمون التأثيري فقط الناتج عن الناقل المحرّض.

نسمي ما سبق وصفه من إعادة توزع للشحنات وتغيير في حقل وكموني الناقلين المحرّض والمتحرض بشرط التوازن الكهراكدي (الساكن) الذي نعبر عنه بشكل مختصر كما يلي:

"يعاد توزع شحنات نواقل معزولة، أحدها على الأقل مشحون، لدى وضعها في تجاورٍ ما، بحيث تصبح محصلة الحقول المتولدة عن الشحنات المعاد توزعها في النواقل المشحونة منها، والحقول المتولدة عن الشحنات المتحرضة في النواقل المعتدلة منها بعد التوازن، معدومة داخل أي من هذه النواقل، وتصبح كمونات النواقل المشحونة أقل بمقدار زيادة كمونات النواقل المعتدلة وذلك بالقيمة المطلقة".

لندرس الآن عوامل السعة وعوامل التأثير، لذلك نأخذ ثلاثة نواقل موضوعة في جوف كرة معدنية موصولة بالأرض من أجل استبعاد كافة التأثيرات الخارجية كما في الشكل (4-6)، كمونها V=0، لتكن V_1, V_2, V_3 وَ Q_1, Q_2, Q_3 كمونات وشحنات هذه النواقل. باستخدام أسلاك رفيعة وطويلة لوصل بعض هذه النواقل بالأرض عبر الكرة المؤرضة يمكن لنا أن نعتبر الحالات الثلاث التالية:

١. الحالة a التي يكون فيها للنواقل الكمونات $V_{11}=V_1\neq 0, V_{21}=0, V_{31}=0$ التي تعني أن الجسم الأول فقط غير مؤرض، وبالتالي فإن شحناتها تتناسب مع كمون الأول V_1 فقط ونكتب:

$$Q_{11} = C_{11} V_1 \ , \quad Q_{21} = C_{21} V_1 \ , \quad Q_{31} = C_{31} V_1 \qquad (6\text{-}6)$$

٢. الحالة b التي يكون فيها للنواقل الكمونات $V_{12}=0, V_{22}=V_2\neq 0, V_{32}=0$ وبالتالي فإن شحناتها تتناسب مع كمون الثاني V_2 فقط ونكتب:

$$Q_{12} = C_{12} V_2 \ , \quad Q_{22} = C_{22} V_2 \ , \quad Q_{32} = C_{32} V_2 \qquad (6\text{-}7)$$

٣. الحالة c التي يكون فيهـــا للنواقـــل الكمونـــات $V_{13}=0, V_{23}=0, V_{33}=V_3\neq 0$

وبالتالي فإن شحناتها تتناسب مع كمون الثالث V_3 ونكتب:

$$Q_{13}=C_{13}V_3\ ,\quad Q_{23}=C_{23}V_3\ ,\quad Q_{33}=C_{33}V_3 \qquad (6\text{-}8)$$

إن الثوابت C_{ij}; i,j=1,2,3 تتعلق بأشكال الأجسام ومواقعها بالنسبة لبعضها.

الآن بتطبيق مبدأ التركيب يمكن لنا أن نوجد حالة رابعة d تمثل مجموع الحالات الثلاث a, b, c السابقة ويكون من أجلها الحقل الكهربائي في أية نقطة يساوي المجموع الشعاعي للحقول الناتجة فيها في الحالات الثلاث، وكمون وشحنة كل من الأجســـام الثلاثة يساوي المجموع الجبري للكمونات والشحنات للأجســـام الـــثلاث في تلـــك الحالات، ونكتب الكمونات:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{11}+V_{12}+V_{13}\\ V_2 &= V_{21}+V_{22}+V_{23}\\ V_3 &= V_{31}+V_{32}+V_{33} \end{aligned} \qquad (6\text{-}9)$$

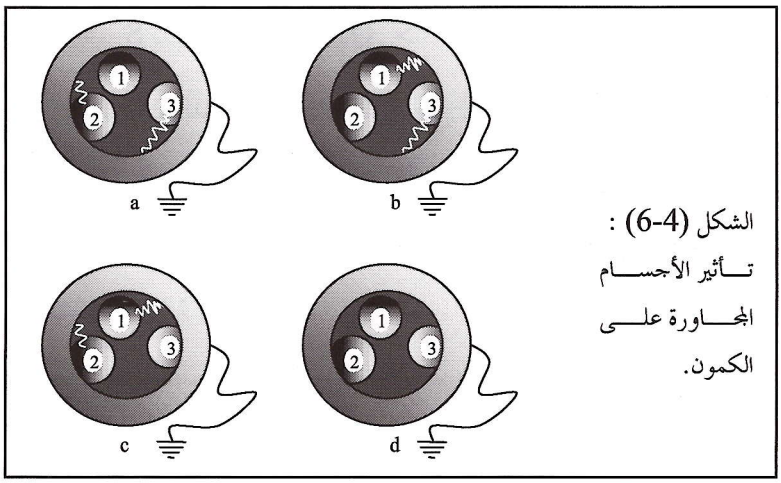
والشحنة:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{11}+Q_{12}+Q_{13}\\ Q_2 &= Q_{21}+Q_{22}+Q_{23}\\ Q_3 &= Q_{31}+Q_{32}+Q_{33} \end{aligned} \qquad (6\text{-}10)$$

وبالتعويض من العلاقات (6-8), (6-7), (6-6) نجد:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}V_1+C_{12}V_2+C_{13}V_3\\ Q_2 &= C_{21}V_1+C_{22}V_2+C_{23}V_3\\ Q_3 &= C_{31}V_1+C_{32}V_2+C_{33}V_3 \end{aligned} \qquad (6\text{-}11)$$

وذلك وفقاً لمبدأ التركيب الذي يعني أن الحالة d هي مجموع الحالات a, b, c.



الشكل (6-4): تـــأثير الأجســـام المجـــاورة علـــى الكمون.

٦ – ٤ – تابعية السعة للشكل الهندسي للمكثفات

The Capacity dependence to geometrical form of capacitors:

يمكن اعتبار الناقل الكروي مكثفة يمثل هو أحد لبوسيها، ولبوسها الآخر في اللانهاية. ووجدنا بحسب العلاقتين (6-3) وَ (6-5) كيف تتعلق سعة الناقل بشكله الهندسي، فمن الواضح أن هذه السعة تتناسب طرداً مع نصف قطره R في كلتي الجملتين الدولية والسغثية.

للتعرف على علاقة سعة المكثفة المستوية مثلاً بشكلها الهندسي نقوم بشحن المكثفة بتيار مستمر، ولا يستخدم التيار المتناوب لهذا الغرض، مع العلم أن المكثفة تستخدم بشكل كبير في دارات التيار المتناوب، ثم نقيس سعتها بتغيير بارامتراتها الهندسية. تشحن المكثفة بوصل أحد لبوسيها بأحد قطبي مولد مستمر يعطي فرقاً في الكمون U، ويوصل القطبان الآخران للمكثفة والمولد مع بعضهما أو إلى الأرض، الشكل (6-5)، تكتسب المكثفة الشحنة Q على أحد لبوسيها، وتكون سعتها معطاة بالعلاقة (6-1):

$$C = \frac{Q}{U} \qquad (6\text{-}1)$$

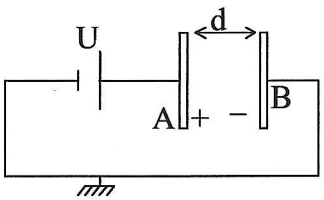
نجعل كمون المولد ثابتاً ونبقي مساحة سطحي اللبوسين S ثابتة ونغير المسافة d بين لبوسي المكثفة زيادةً أو نقصاناً فنلاحظ تجريبياً بأن الشحنة تتناقص أو تزداد وبالتالي فإن السعة تتناقص أو تزداد على الترتيب، ونكتب:

$$C = \frac{Q'}{U}; \; C' > C \; , \; Q' > Q \; , \; d' < d \; , S = ct$$

نبقي كمون المولد ثابتاً الأمر الذي يعني أن فرق الكمون بين لبوسي المكثفة يبقى ثابتاً أيضاً، ونثبت المسافة d ونقوم بتغيير مساحة سطح لبوسي المكثفة S زيادةً أو نقصاناً فنلاحظ تجريبياً بأن الشحنة تزداد أو تتناقص وبالتالي فإن السعة تزداد أو تتناقص على الترتيب، ونكتب:

$$C = \frac{Q'}{U}; \; C' > C \; , \; Q' > Q \; , \; S' > S \; , d = ct$$

نلخص ما سبق بالقول بأن سعة المكثفة تزداد وبالتالي إمكانية شحنها بشحنة أكبر تزداد أيضاً إذا ما ازداد سطحها أو تناقص البعد بين لبوسيهما، أو كليهما معاً، والعكس بالعكس، ونقول أن هذين التناسبين الأول طردي والثاني عكسي، وسوف نوجد العلاقات التي تعطي سعات بعض المكثفات في فقرة لاحقة.



الشكل (5-6):
تغير شحنة مكثفة مستوية بتابعية أبعادها.

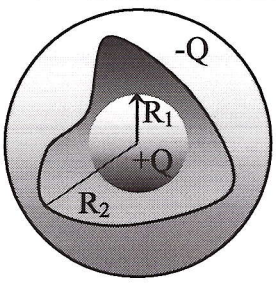
تفسر زيادة السعة بزيادة الحقل الكهربائي بين اللبوسين عندما يزداد سطح اللبوسين أو تنقص المسافة بينهما، مما يؤدي لازدياد القوة الكهربائية التي تؤثر بها شحنات أحد اللبوسين على شحنات اللبوس الآخر، الأمر الذي يقلل من الحركة العشوائية لشحنات كلٍ من اللبوسين ويزيد إمكانية استقبال شحنات جديدة.

٦-٤-١- المكثفات الكروية *Spherical Capacitors:*

تتألف المكثفة الكروية من كرتين ناقلتين متمركزتين، الخارجية منهما مجوفة وتحيط بالداخلية، ولا فرق في أن تكون الداخلية مصمتة أم مجوفة، لأن الشحنات تتوضع فقط على الطبقات السطحية من الجسم المشحون، ويفصل بين هاتين الكرتين الخلاء أو الهواء أو على الأغلب مادة عازلة، الشكل (6-6).

تتم عملية شحن المكثفة الكروية عن طريق شحن كرتها الداخلية بواسطة سلك رفيع ناقل يمر من ثقب عبر الكرة الخارجية ويكون معزولاً عنها فتشحن الكرة الخارجية بالتأثير على وجهها الداخلي حيث يكون الوجه الخارجي موصولاً بالأرض، أما عند شحن الكرة الخارجية فقط فإن الداخلية لا تنشحن بالتأثير لأنه لا توجد خطوط حقل كهربائية للشحنة الخارجية تتجه نحو الداخل. وبهدف حساب سعة المكثفة الكروية نفرض أن R_1 نصف قطر الكرة الداخلية لهذه المكثفة، و R_2 نصف

قطر الكرة الخارجية ولتكن Q قيمة الشحنة على كل من لبوسيها فيكون الكمون على سطح الكرة الداخلية هو التالي:



الشكل (6-6):
حساب سعة مكثفة كروية بتابعية أبعادها.

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{Q}{R_1}$$

أما كمون الكرة الخارجية فيعطى بالعلاقة التالية:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{Q}{R_2}$$

وبالتالي يكون فرق الكمون بين الكرتين هو:

$$U = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{R_2 - R_1}{R_1 \times R_2} \qquad (6\text{-}12)$$

وباستخدام العلاقة العامة (6-4) لسعة المكثفة نحصل على علاقة سعة المكثفة الكروية التالية:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \qquad (6\text{-}13)$$

ومن أجل الحالة الخاصة $R_2 = \infty$ نحصل على الحالة الخاصة من العلاقة (6-13) والتي تمثل سعة كرة:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 . R_1 \qquad (6\text{-}3)$$

وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها المسافة d بين كرتي المكثفة الكروية أصغر بكثير من كل من نصفي قطريها وهي الحالة التي نعبر عنها رياضياً بالمتراجحة ($d << R_1, R_2$)، من الممكن كتابة التقريب $R_1 \approx R_2 \approx R \Rightarrow R_1 \cdot R_2 = R^2$ وعلى اعتبار أن $R_2 - R_1 = d$ تصبح العلاقة (6-13) كما يلي:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{d} \qquad (6\text{-}14)$$

ووفق التقريب $R_1 = R_2$ فإن سطح الكرة الداخلية S_1 يساوي تقريباً سطح الكرة الخارجية S_2 أي أن $S_1 \approx S_2 \approx S$ وتصبح العلاقة (6-8) بالتالي كما يلي:

$$C = \frac{S\,\varepsilon_0}{d} \qquad (6\text{-}15)$$

٦-٤-٢- المكثفة المستوية *Plate Capacitor:*

سنقوم بحساب سعة المكثفة المستوية انطلاقاً من المكثفة الكروية وسعتها. لتكن d المسافة بين لبوسي المكثفة الكروية التي نصفي قطري كرتيها الداخلية والخارجية هما على الترتيب R, R′ فيكون بالتالي $R' = R + d$ ولتكن Q شحنة كل من لبوسيْ هذه المكثفة فتكون سعتها حسب العلاقة (6-13) هي التالية:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R(R+d)}{d} \qquad (6\text{-}16)$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $d \ll R$ من الممكن كتابة التقريب $R + d \approx R$ فتصبح العلاقة (6-10) كما يلي:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^2}{d} \qquad (6\text{-}17)$$

تتوزع الشحنة Q بكثافة منتظمة (ثابتة) على السطح الخارجي للكرة الداخلية وعلى السطح الداخلي للكرة الخارجية وتبلغ قيمة هذه الكثافة وفق التقريب السابق ما يلي:

$$\sigma \approx \frac{Q}{4\pi R^2}$$

لنأخذ جزأي سطحين متقابلين من الكرتين الداخلية والخارجية لهذه المكثفة، بحيث تكون مساحتاهما متساويتين وكلٍ منهما S فتكون المسافة بينهما d والشحنة التي يحملها كل منهما هي $Q' = \frac{SQ}{4\pi R^2}$، وبالتالي يساهم كلٌ من جزأي السطح S بجزء من السعة الكلية للمكثفة الكروية، نحسب هذا الجزء من السعة كما يلي:

إن فرق الكمون بين جزأي السطحين S هو نفسه فرق الكمون بين لبوسي المكثفة الكروية المفروضة ويساوي بالتالي وحسب العلاقة (6-12) ما يلي:

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(R+d-R)}{R(R+d)} \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{d}{R^2} \qquad (6\text{-}18)$$

ونحصل أخيراً على السعة التي يساهم بها جزءا السطحين المتقابلين واللذان قيمة كل منهما S، من خلال قسمة الشحنة التي يحملها كل منهما على فرق الكمون بينهما كما يلي:

$$C = \frac{Q'}{U} = \frac{\frac{Q}{4\pi R^2}\cdot S}{\frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2}} \Rightarrow C = \frac{S\varepsilon_0}{d} \qquad (6\text{-}19)$$

تمثل العلاقة (6-19) السعة بشكل مستقل عن نصف قطر كل من الكرتين أي أن هذه العلاقة صحيحة أيضاً عندما $R \to \infty$ ويكون في هذه الحالة جزءا السطحين المتقابلين واللذان مساحة كل منهما S مستويان، لأن السطح المستوي هو سطح منحني نصف قطر انحنائه لا نهائي، وهكذا يمكن اعتبار العلاقة (6-19) صالحة لحساب سعة المكثفة المستوية التي سطح كل من لبوسيها S والمسافة بينهما d ويفصل الخلاء بينهما.

هذا ويمكن استخدام مفهوم الجولان في حساب سعة المكثفة المستوية الموضحة في الشكل (6-7) والتي لبوساها A, B ولتكن $+\sigma$, $-\sigma$ كثافتي توزع الشحنات الكهربائية على هذين اللبوسين ولتكن d المسافة بين لبوسيها، ولتكن E شدة الحقل المنتظم بين لبوسي المكثفة. وحسب علاقة الحقل الكهربائي الساكن المتولد عن مستوٍ غير محدود يعطى هذا الحقل بدلالة الكثافة على سطحي اللبوسين الموجب والسالب على الترتيب كما يلي:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}; E_2 = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}$$

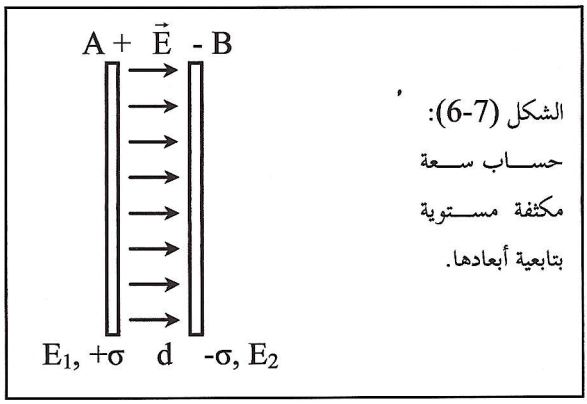
وتكون قيمة الحقل المنتظم بينهما هي:

$$E = E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \left(\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\right) \Rightarrow$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (6\text{-}20)$$

ولنأخذ جولان الحقل الكهربائي بين اللبوسين A, B وذلك بحساب تكامل الحقل على المسافة بين اللبوسين، ونرمز له بالرمز C_A^B ونكتب بالتالي:

$$C_A^B = \int_A^B E \cdot dl = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dl = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \qquad (6\text{-}21)$$



الشكل (6-7): حساب سعة مكثفة مستوية بتابعية أبعادها.

ومن جهة أخرى لدينا:

$$-\int_A^B dv = \int_A^B E \cdot dl = V_A - V_B \qquad (6\text{-}22)$$

ونشير هنا إلى أن جولان الحقل الكهربائي بين نقطتين يمثل دوماً فرق الكمون بينهما وبالمقارنة بين العلاقتين (6-21) و (6-22) نجد:

$$V_A - V_B = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \qquad (6\text{-}23)$$

وباعتبار $\sigma = \frac{Q}{S}$ تصبح العلاقة الأخيرة كما يلي:

$$U = V_A - V_B = \frac{Qd}{S\varepsilon_0} \qquad (6\text{-}24)$$

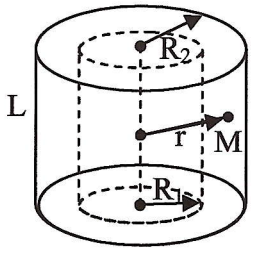
وباستخدام العلاقة (6-1) لسعة المكثفة نجد:

$$C = \frac{Q}{\frac{Qd}{S\varepsilon_0}} \Rightarrow C = \frac{S\varepsilon_0}{d} \qquad (6\text{-}25)$$

وهي نفسها العلاقة (6-19) التي توصلنا إليها انطلاقاً من سعة المكثفة الكروية.

٦-٤-٣- المكثفة الاسطوانية Cylindrical Capacitor:

تتألف المكثفة الاسطوانية من اسطوانتين ناقلتين لهما المحور نفسه (متمحورتين) كما في الشكل (8-6). تشحن المكثفة الاسطوانية عن طريق وصل لبوسيها المتمثلين في اسطوانتيها بقطبي مولد مستمر مباشرةً، أو عن طريق وصل لبوسها الداخلي بأحد أقطاب المولد المستمر الذي يوصل قطبه الآخر بالأرض، وأن يوصل اللبوس الآخر للمكثفة بالأرض أيضاً. من أجل حساب سعة المكثفة الاسطوانية نفرض L ارتفاع كل من اسطوانتيها ولتكن d المسافة بينهما، R_1 نصف قطر الاسطوانة الداخلية، R_2 نصف قطر الاسطوانة الخارجية.



الشكل (8-6): حساب سعة مكثفة اسطوانية بتابعية أبعادها.

نحسب أولاً باستخدام نظرية غوص شدة الحقل الكهربائي في النقطة M الواقعة بين اللبوسين وتبعد بمقدار r عن محورهما المشترك. نعتبر في هذه الحالة أن سطح غوص المغلق هو سطح الاسطوانة المارة من M ونصف قطرها r أي إنها تتمحور أيضاً مع لبوسي المكثفة الاسطوانية. تكون خطوط الحقل بين لبوسي المكثفة الاسطوانية متوازية وعمودية على سطحي الاسطوانتين في مواضع دخولها أو خروجها منهما، أما على قاعدتي اسطوانة غوص فلا يوجد تدفق لخطوط الحقل من خلالهما وبالتالي يعطى التدفق وحسب تعريفه كما يلي:

$$\Phi = 2\pi rL \cdot E \qquad (a)$$

وإذا فرضنا أن Q هي قيمة الشحنة على كل من لبوسي المكثفة الاسطوانية يعطى التدفق من خلال اسطوانة غوص وحسب هذه النظرية كما يلي:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{(b)}$$

وتمثل Q في العلاقة b شحنة اللبوس الداخلي حيث أن تدفق شحنة اللبوس الخارجي من خلال سطح غوص معدوم لأن كل الشحنة واقعة خارجه. وبمقارنة العلاقتين a, b ينتج:

$$E = \frac{1}{2\pi rL} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (6\text{-}26)$$

وهي قيمة الحقل عند أية نقطة من اسطوانة غوص وبالتالي عند النقطة M. نأخذ جولان الحقل الكهربائي بين اللبوسين الداخلي والخارجي للمكثفة ونرمز لهما بالرمزين B; A على الترتيب فنكتب:

$$C_A^B = \int_A^B (-dv) = \int_A^B E \cdot dr \Rightarrow V_A - V_B = \int_{R1}^{R2} \frac{Q}{2\pi rL\varepsilon_0} dr \Rightarrow$$

$$U = V_A - V_B = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1} \qquad (6\text{-}27)$$

ونحصل بالتالي على سعة المكثفة الاسطوانية عن طريق قسمة شحنة كل من لبوسيها على فرق الكمون بينها ونكتب بالتالي:

$$C = \frac{Q}{(Q / 2\pi\varepsilon_0 L) \ln R_2 / R_1}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln R_2 / R_1} \qquad (6\text{-}28)$$

تعطي العلاقة السابقة سعة المكثفة الاسطوانية ذات الأبعاد R_1, R_2, L. لنأخذ الحالة الخاصة التي تكون فيها المسافة بين لبوسي المكثفة الاسطوانية صغيرة جداً، بالمقارنة مع نصفي قطري هذين اللبوسين، أي أن $d << R_1 \text{ or } R_2$، عند ذلك نستطيع إجراء التقريبات التالية:

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \frac{d + R_1}{R_1} = \ln(1 + \frac{d}{R_1}) \approx \frac{d}{R_1}$$

$$R_1 \approx R_2 \approx R$$

وباستخدام هذه التقريبات تصبح العلاقة السابقة على النحو:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{d/R} = \frac{2\pi\varepsilon_0 LR}{d} = \frac{S\varepsilon_0}{d} \qquad (6\text{-}29)$$

حيث $S = 2\pi\varepsilon_0 LR$ هو سطح الاسطوانة، وهكذا نكون قد حصلنا على سعة المكثفة الاسطوانية بدلالة سطحها والبعد بين لبوسيها، وهي مماثلة لما حصلنا عليه من أجل المكثفتين الكروية والمستوية.

ملاحظات:

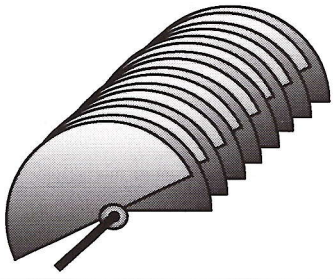
- يكون للمكثفة سعة 1F عندما تختزن شحنة مقدارها 1Coul على كل من لبوسيها وذلك عندما يطبق عليها فرق كمون مقداره 1V.
- إن العلاقتين (6-29) ,(6-1) تسمحان بحساب شحنة المكثفة بتابعية أبعادها، سطح اللبوسين والبعد بينهما وفرق الكمون بينهما، كما يلي:

$$\frac{Q}{U} = \frac{S\varepsilon_0}{d} \Rightarrow Q = \frac{S\varepsilon_0}{d}U \qquad (6\text{-}30)$$

٦-٥- بعض النماذج التقنية المستخدمة للمكثفات

Some Technical Models of used Capacitors:

١- المكثفة المتغيرة: تتألف المكثفة المستوية متغيرة السعة من مجموعة من الصفائح المستوية على شكل نصف دائرة وبحيث يكون العدد الكلي لها زوجياً، تثبت الصفائح ذات الأرقام الفردية على محور قابل للدوران حول محور آخر ثابت ومثبت عليه الصفائح ذات الأرقام الزوجية كما هو مبين في الشكل (6-9).



الشكل (6-9):
مكثفة متغيرة العازل بين لبوسيها هو الهواء.

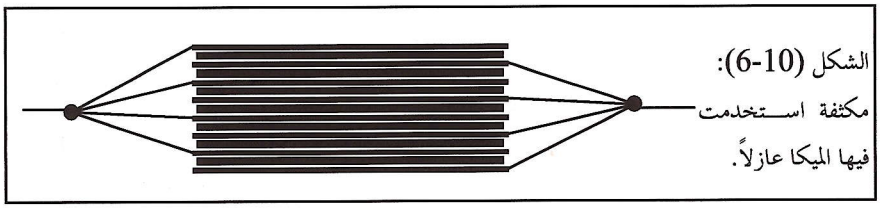
تسمح هذه الآلية بتغيير السطح المشترك بين الصفائح المتجاورة، وبالتالي تغيير السعة الكهربائية لهذه المكثفة الكلية المكونة من مجموعة من المكثفات التي يمكن اعتبارها

موصولة فيما بينها على التفرع، وتكون المكثفة الجزئية الواحدة مكونة من صفيحة ذات رقم فردي مثلاً وأخرى ذات رقم زوجي.

إن مثل هذه المكثفات موجود في دارات انتخاب أو انتقاء الترددات في جهاز الراديو مثلاً، حيث أنه بتغيير سعة المكثفة يحصل تغيير تردد الطنين لدارة الانتخاب التي أحد عناصرها هذه المكثفة وهذا يعني تغيير تردد الموجة التي يمكن تحليلها ومعالجتها من بين جميع الأمواج التي يستقبلها الهوائي antenna، وبالتالي تغيير المحطات الإذاعية التي يمكن سماعها بواسطة جهاز الراديو.

٢- مكثفة الميكا: توضع رقائق الميكا المفضضة بشكلٍ متوازٍ ويفصل فيما بينها مادة عازلة على شكل رقائق هي الأخرى، توصل كل من مجموعتي الرقائق الفردية والزوجية إلى نقطتين مستقلتين كما هو مبين في الشكل (10-6).

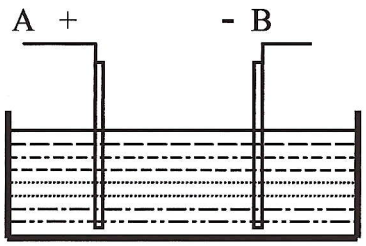
إن هذه المكثفة إذاً هي عبارة عن مجموعة من المكثفات الموصولة مع بعضها على التوازي، والتي سعتها الإجمالية تساوي مجموع سعات المكثفات المفردة المكونة لها، وبذلك يمكن الحصول على مكثفات ذات سعات كبيرة، كما أن العازل الفاصل بين رقائق المكثفة يزيد من سعتها عدد من الأضعاف يساوي عامل العازلية ε_r كما سنرى لاحقاً.



الشكل (10-6): مكثفة استخدمت فيها الميكا عازلاً.

٣- المكثفة الإلكتروليتية: إن الوعاء المستخدم في التحليل الكيميائي للأملاح أو الأكاسيد المعدنية الموضح في الشكل (11-6)، يمكن اعتبار مسرييه المعدنيين لبوسين لمكثفة مكونة منهما، كما يمثل المحلول الإلكتروليتي المكون من الملح المعدني والماء عازل يفصل بين هذين اللبوسين، وتعمل الأكاسيد المترسبة على اللبوسين المتمثلين بالمصعد

والمهبط على زيادة سعة هذه المكثفة لأن الأكاسيد المترسبة ذات ثابتة عازلية نسبية أعلى منها في محاليلها الملحية.



الشكل (11-6):
وعاء تحليل كيميائي
يمكن اعتباره مكثفة

هذا من جهة ومن جهة أخرى يمكن أن تصنف المكثفات إلى نوعين عادي وكيميائي، أما النوع الأول فتكون فيه المادة العازلة صلبة القوام كما في مكثفات الميكا والمكثفات السيراميكية أو لا تكون موجودة كما في المكثفات المستوية متغيرة السعة والعازل في هذه الحالة هو الهواء، وأما النوع الثاني فتكون فيه المادة العازلة سائلة القوام وهي عبارة عن محلول كيميائي (إلكتروليتي)، وتدعى المكثفة في هذه الحالة بالمكثفة الكيميائية أو الإلكتروليتية، ومن المهم في هذه الحالة الانتباه إلى قطبية المكثفة، حيث يُؤشر الطرف الموجب للمكثفة عادة بعلامات مختلفة كوضع إشارة + أو بجعل اختناقاً على جسمها، أما الطرف الآخر غير المؤشر فيكون هو الطرف السالب، ويوصل الطرفين الموجب والسالب للمكثفة الكيميائية في الدارات، إلى الفرعين الموصولين إلى القطبين الموجب والسالب للمولد أو إلى النقطتين ذاتي الكمون المرتفع والمنخفض على الترتيب، وهذه القطبية المشار إليها ليست مهمة في المكثفات الأخرى.

٦-٦- وصل المكثفات *Connection of Capacitors:*

يستخدم في مخططات الدارات الكهربائية الرمز ⊣⊢ للدلالة على المكثفات العادية والرمز ⊣⊢⁺ للدلالة على المكثفة الكيميائية، مع أن هذا الرمز يبدو وكأنه خاص بمكثفة مستوية إلا أنه يستخدم لتمثيل جميع المكثفات بجميع أنواعها، وتصنع المكثفات عادة بسعات قياسية فإذا أردنا الحصول على سعة مختلفة عن السعة المتوفرة

لدينا، فإننا نصل مجموعة من المكثفات معاً بالشكل الذي يعطينا السعة المطلوبة وهناك طريقتان أساسيتان لوصل المكثفات في الدارات الكهربائية هما: الوصل على التسلسل (التوالي)، والوصل على التفرع (التوازي) ومن الممكن إجراء الوصل المختلط في دارة واحدة أي أن يكون في الدارة مجموعة مكثفات موصولة على التسلسل فيما بينها وجملة هذه المكثفات موصولة مع مكثفات أخرى على التوازي.

٦-٦-١- وصل المكثفات على التسلسل

Connection of Capacitors in series:

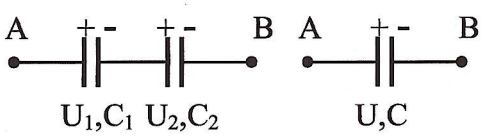
يتم وصل المكثفات على التسلسل بوصل نهاية كل مكثفة ببداية المكثفة التي تليها، ونشير هنا أنه ليس للمكثفة الواحدة قبل أن تشحن قطبية أي لا فرق بين طرفيها لذلك لا داعي لمراعاة هذا الأمر أثناء عملية الوصل. ولكن بعد وصل المكثفات بقطبي منبع مستمر DC تنشحن وتصبح كأنها بطاريات موصولة على التسلسل، اللبوس السالب للأولى يتصل باللبوس الموجب للثانية واللبوس السالب للثانية يتصل بموجب الثالثة. وهكذا كما في الشكل (12-6). أما عند وصل مكثفات موصولة على التسلسل بقطبي مولد متناوب (A.C) alternating current فإن التيار الكهربائي يعبرها، وتتناوب لبوساتها الانشحانين السالب والموجب ولا تحتفظ بشحنة بعد قطع تيار المنبع المتناوب بعكس حالة المنبع المستمر حيث تحتفظ بشحنها بعد قطع التيار.

من الممكن دوماً اعتبار المكثفات الموصولة على التسلسل وكأنها مكثفة واحدة لها سعة مكافئة لسعة جملة المكثفات الموصولة على التسلسل كما في الشكل (13-6). وترتبط سعة المكثفة المكافئة بسعات المكثفات الموصولة على التسلسل بعلاقة نتوصل إليها كما يلي: لتكن C_1, C_2 مكثفتين موصولتين على التسلسل بقطبي مولد فرق الكمون بين طرفيه U، يكون في هذه الحالة مجموع فرقي الكمون U_1, U_2 بين لبوسي C_1,C_2 على الترتيب، مساوياً لفرق الكمون الكلي بين قطبي المولد ونكتب العلاقة التالية:

$$U = U_1 + U_2 \qquad (6\text{-}30)$$



الشكل (6-12): الوصل التسلسلي



الشكل (6-13): المكثفة المكافئة لمكثفتين.

كما أنه يمكن أن نعتبر أن U هو فرق الكمون بين لبوسي المكثفة C المكافئة. لكن حسب العلاقة (6-1) فإن:

$$C = \frac{Q}{U}, C_2 = \frac{Q_2}{U_2}, C_1 = \frac{Q_1}{U_1}$$

وبالتبديل تصبح العلاقة (6-30) كما يلي:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \qquad (6\text{-}31)$$

لكن $Q = Q_1 = Q_2$ حيث أنه في حالة الوصل على التسلسل تكون شحنات المكثفات متساوية، وبالتالي تصبح العلاقة الأخيرة كما يلي:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad (6\text{-}32)$$

أي إنه عند وصل مكثفات على التسلسل فإن مقلوب سعة المكثفة المكافئة يساوي مجموع مقلوبي سعتي هاتين المكثفتين.

نعمم العلاقة (6-32) على حالة أكثر من مكثفتين موصولتين على التسلسل فنكتب:

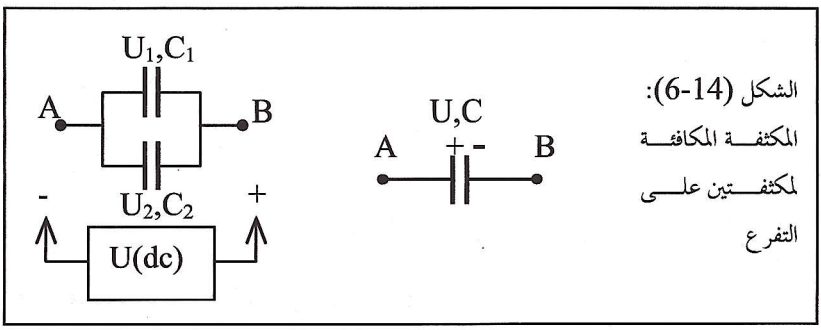
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{C_i} = \sum_i \frac{1}{C_i} \qquad (6\text{-}33)$$

تعني العلاقة (6-33) الأخيرة أنه عند وصل عدد من المكثفات على التسلسل فإن مقلوب سعة المكثفة المكافئة يساوي مجموع مقاليب سعات هذه المكثفات.

٦-٦-٢- وصل المكثفات على التوازي

:Parallel Connection of Capacitors

يتم وصل المكثفات على التوازي بوصل لبوسات البداية لجميع المكثفات التي نريد وصلها على التوازي إلى نقطة واحدة مثل a، ولبوسات نهاياتها إلى نقطة واحدة أيضاً مثل b. وعندما نريد شحنها أو تمرير التيار ضمنها فإننا نصل هاتين النقطتين a,b إلى قطبي مولد DC أو AC على الترتيب. كما في الشكل (6-14).



الشكل (6-14): المكثفة المكافئة لمكثفتين على التفرع

لحساب سعة المكثفة المكافئة C للمكثفتين الموصولتين على التوازي C_1, C_2 نفرض أن المجموعة وُصلت إلى قطبي مولد مستمر DC، فينشحن لبوسا كل من المكثفتين الموصولان إلى النقطة a بشحنة موجبة عن طريق انتقال الإلكترونات منهما إلى القطب الموجب للمولد، حيث يقوم هذا القطب بسحب أو جذب هذه الإلكترونات، وينشحن اللبوسان الموصولان إلى النقطة b بشحنة سالبة عن طريق انتقال الإلكترونات من القطب السالب للمولد إليهما حيث يقوم القطب السالب بضخ الإلكترونات باتجاه هذين اللبوسين. تستمر عملية الشحن ما دامت جملة المكثفتين موصولة بالمولد إلى أن يتساوى فرق الكمون بين لبوسي كل من المكثفتين مع فرق الكمون بين طرفي المولد، أي $U_1=U_2=U$، ويتم بذلك شحن المكثفة C_1 بالشحنة Q_1 والمكثفة C_2 بالشحنة Q_2، وتحقيقاً لمبدأ انحفاظ الشحنة، الذي يعني أن عدد الإلكترونات الخارجة من القطب السالب للمولد يساوي عدد الإلكترونات

الداخلة إلى قطبه الموجب، تكون الشحنة الكلية في الدارة مساوية لمجموع الشحنات على المكثفتين ونعتبر هنا أن شحنة المكثفة هي شحنة أحد لبوسيها فقط، ونكتب بالتالي:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

وبالتعويض عن قيم Q, Q_1, Q_2 من العلاقة (6-1) نحصل على:

$$C.U = C_1U_1 + C_2U_2 \qquad (6\text{-}34)$$

وبما أن: $U_1=U_2=U$، تؤول العلاقة (6-34) إلى:

$$C = C_1 + C_2 \qquad (6\text{-}35)$$

وبشكل عام إذا كان لدينا n مكثفة موصولة على التوازي فإن سعة المكثفة المكافئة لها تعطى بالعلاقة:

$$C = C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_n \Rightarrow C = \sum_{i=1}^{n} C_i \qquad (6\text{-}36)$$

ونلاحظ من العلاقة الأخيرة أنه في حالة الوصل على التوازي تكون سعة المكثفة المكافئة أكبر من سعة أي من المكثفات الموصولة.

٦-٧- أثر ناقل موضوع ضمن مكثفة على سعتها

Effect of Conductor at the Capacity of Capacitors:

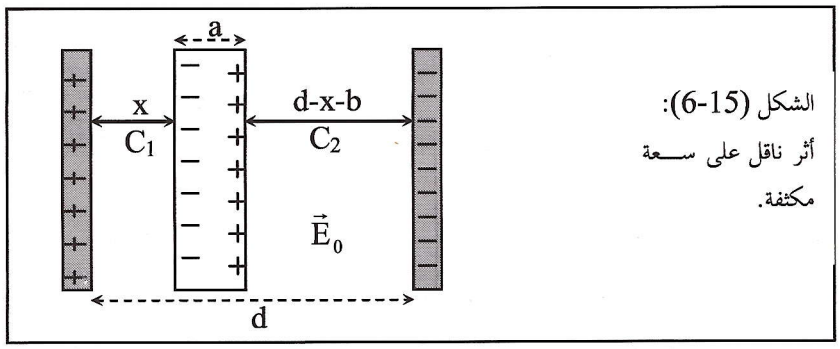
يكون الناقل موضوع بين لبوسي المكثفة و بموازاتهما وسطحه يساوي كلٍ من سطحيهما كما في الشكل (6-15). عند ذلك، فإن الحقل الكهراكدي الناتج عن لبوسيها يولد قوة كولون تؤثر في الإلكترونات الحرة داخل الناقل وذلك وفق آلية الإنشحان بالتأثير، فيؤدي ذلك إلى انشحان الوجه المقابل للبوس الموجب بشحنة سالبة وانشحان الوجه المقابل للبوس السالب بشحنة موجبة وتكون هاتان الشحنتان مساويتين لكلٍ من شحنتي اللبوسين، وتكافىء هذه الجملة في هذه الحالة مكثفتين موصولتين على التسلسل ولنحسب السعة المكافئة لهما.

ليكن S سطح كلٍ من لبوسي المكثفة وسطح كلٍ من وجهي الناقل حسب الشكل (6-15)، وليكن d البعد بين اللبوسين، وليكن b سماكة الناقل، إن سعة

المكثفة قبل وضع الناقل بين لبوسيها تعطى بالقانون الأساسي لسعة المكثفات كما يلي:

$$C = \frac{S\,\varepsilon_0}{d} \qquad (6\text{-}25)$$

لتكن x المسافة بين وجه الناقل وأحد لبوسي المكثفة فتكون المسافة بين الوجه الآخر للناقل واللبوس الآخر للمكثفة هي d-x-b، ونستطيع أن نعتبرهما مكثفتين موصولتين على التسلسل البعد بين لبوسي الأولى x، والبعد بين لبوسي الثانية d-x-b كما يوضح الشكل (6-15)، ولتكن C_1 سعة الأولى، C_2 سعة الثانية، C' سعة المكثفة المكافئة لجملتهما، وهما موصولتان على التسلسل، ولنكتب فيما يلي قيمة كلٍ من C_1, C_2 وذلك حسب القانون الأساسي لسعة مكثفة:



الشكل (6-15): أثر ناقل على سعة مكثفة.

$$C_1 = \frac{S\varepsilon_0}{x}; C_2 = \frac{S\varepsilon_0}{d - x - b}$$

وحسب قانون السعة المكافئة لمكثفتين موصولتين على التسلسل نكتب:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C'} = \frac{x}{S\varepsilon_0} + \frac{d - x - b}{S\varepsilon_0} = \frac{d - b}{S\varepsilon_0}$$

$$C' = \frac{S\,\varepsilon_0}{d - b} \qquad (6\text{-}37)$$

وبمقارنة العلاقة (6-37) بالعلاقة (6-25) نجد $C'>C$ أي أن وضع الناقل بهذه الطريقة قد زاد من سعة المكثفة ونعلل ذلك كما يلي:

إن القانون الأساسي الذي يعطي سعة المكثفة هو $C=\frac{S\varepsilon_0}{d}$ حيث تمثل d الموجودة في المقام المسافة الحرة بين اللبوسين التي تقطعها خطوط الحقل، وبعد وضع الناقل فإن هذه المسافة تتناقص بمقدار سماكة الناقل فيؤدي ذلك إلى تناقص المقام مثلما استنتجنا رياضياً ذلك وفقاً للعلاقة (37-6) وهذا يعني أن سعة المكثفة تزداد.

ونفسر ذلك بشكل أعمق فيزيائياً بأن وضع الناقل يجعل قوى كولون بين شحنات اللبوسات وشحنات وجهي الناقل وتكون هذه على مسافات أقرب بعضها من بعض مقارنةً بالمسافة بين اللبوسين قبل وضع الناقل ويؤدي ذلك إلى تزايد قوى كولون المؤثرة على شحنات اللبوسين، وبالتالي إنقاص الحركة العشوائية لهذه الشحنات، ويترافق ذلك مع إنقاص الحجم المطلوب لكلٍ منها، وبالتالي يتيح المجال لاستقبال شحنات جديدة باستخدام نفس المولد بدون زيادة فرق كمونه (قوة ضخه)، وهذا يعني زيادة في الشحنة بدون زيادة في فرق الكمون، وبالتالي زيادة السعة وذلك بحسب القانون $C = \frac{Q}{U}$.

٦-٨- أثر عازل على سعة مكثفة- ثابتة العازلية النسبية

Effect of a Dielectric at a Capacitance of Capacitor-relative dielectric constant:

وجدنا في الفقرة السابقة أن تغيير الوسط الفاصل بين لبوسي مكثفة عن طريق وضع ناقل يؤدي إلى تغيير في سعة المكثفة والأساس في ذلك هو تغيير المسافة الحرة بين اللبوسين التي تقطعها خطوط الحقل. ولنبحث الآن في آلية التغير الذي يحصل بسبب وضع عازل بين لبوسي مكثفة.

تجريبياً تزداد سعة مكثفة عند وضع مادة عازلة كهربائياً بين لبوسيها، وتختلف نسبة هذه الزيادة باختلاف المادة العازلة، ونسمي نسبة الزيادة في سعة مكثفة باستخدام عازلٍ ما، بثابتة العازلية النسبية للعازل Relative Dielectric Constant،

وتسمى أحياناً السماحية النسبية لهذا العازل Relative Permittivity، ونرمز لها بالرمز ε_r وهي قيمة مميزة للعازل وتختلف من عازلٍ لآخر، كما تختلف أيضاً باختلاف درجة حرارة العازل نفسه، ويعطي الجدولان (١) و(٢) في نهاية الكتاب قيم هذا الثابت لبعض المواد الصلبة والسائلة والغازية في درجة الحرارة العادية.

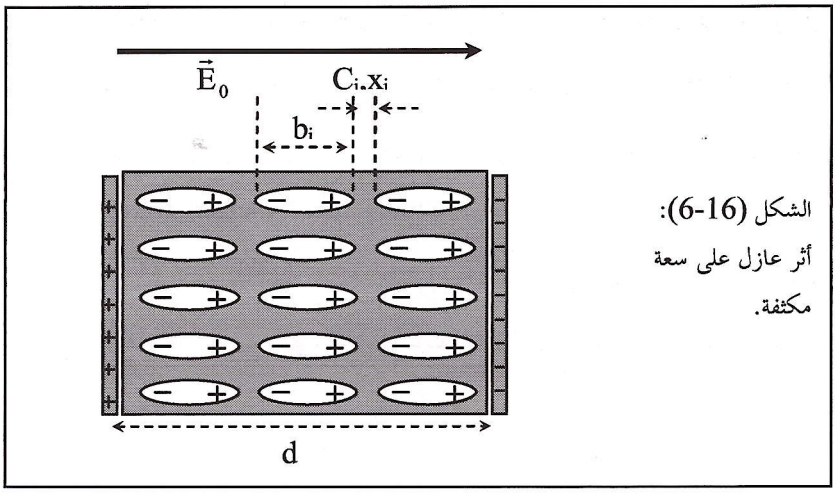
بفرض C_v سعة المكثفة عندما يفصل الخلاء بين لبوسيها، و C_M سعتها عندما تفصل المادة العازلة بين لبوسيها فتكون ثابتة العازلية النسبية لهذه المادة العازلة هي:

$$\varepsilon_r = \frac{C_M}{C_v} \qquad (6\text{-}38)$$

وعليه نعرف ثابتة العازلية النسبية لمادة عازلة بأنها النسبة بين سعة مكثفة مملوءة بهذه المادة العازلة إلى سعتها وهي خالية.

وعند وضع مادة عازلة بين لبوسي مكثفة مشحونة، فإن جزيئات وذرات هذه المادة العازلة تقع تحت تأثير الحقل الكهربائي الناتج، فتنجذب الإلكترونات باتجاه اللبوس الموجب، بينما تنجذب النوى باتجاه اللبوس السالب، ولكن بسبب عدم وجود الإلكترونات ضعيفة الارتباط في ذرات العوازل، فإن ما يحصل هو أشبه ما يكون بعملية انمطاط في هذه الذرات ناتج عن شد في جهتين مختلفتين لكلٍ من نوعي الشحنات المكونة لها حيث تشد الإلكترونات باتجاه اللبوس الموجب، والنوى باتجاه اللبوس السالب، فتأخذ الذرة شكل مغزلي يتوضع فيه مركز الشحنات الموجبة في طرف، ومركز الشحنات السالبة في الطرف الآخر، ويتشكل بذلك ثنائي أقطاب كهربائي، وبهذه الطريقة تتحول جميع ذرات العازل إلى ثنائيات أقطاب كهربائية تقوم بعملية دوران في أماكنها لتأخذ منحى الحقل الكهربائي المنتظم بين لبوسي المكثفة.

وهكذا تنتظم ثنائيات الأقطاب الكهربائية بين لبوسي المكثفة كما في الشكل (6-16)، وكما يوضح هذا الشكل فإن خطوط الحقل الكهربائي تعاني انقطاعاً على ثنائيات الأقطاب الكهربائية فتنقص بذلك المسافة الحرة التي يقطعها كلٍ من خطوط الحقل بمقدار مجموع أطوال ثنائيات الأقطاب المتوضعة وفق منحاه، ويمكن اعتبار هذا التناقص هو تناقص في d المسافة بين لبوسي المكثفة.



الشكل (6-16):
أثر عازل على سعة مكثفة.

إن توضع ثنائيات الأقطاب بالطريقة الموضحة في الشكل، يؤدي إلى حصول تبادل قوى كولون التجاذبية بين شحنة كلٍ من اللبوسين وشحنة النسق الأول من ثنائيات الأقطاب المواجهة له، والتي تساوي شحنته بالقيمة وتخالفها بالإشارة، ومن الواضح أن قوى التجاذب هذه تتم بين شحنات تقع على مسافات أقرب بكثير مما كانت قبل وضع العازل بين لبوسي المكثفة، وتخضع بالتالي الشحنات المتوضعة على كلٍ من اللبوسين لقوى جذب أكبر فيتناقص الاهتزاز الذي تقوم به الجسيمات الحاملة لهذه الشحنات فتوسع مكاناً لقدوم شحنات جديدة من دون زيادة قوة ضخ المولد المتمثلة في فرق الكمون بين مأخذيه، وبذلك تزداد سعة كلٍ من اللبوسين وبالتالي تزداد مقدرة كلٍ من اللبوسين على استقبال شحنات إضافية.

من الممكن إثبات الزيادة في سعة المكثفة بعد وضع العازل بين لبوسيها رياضياً كما يلي:

لتكن المكثفة المستوية المشحونة التي سطح كلٍ من لبوسيها S، والمسافة بينهما d كما في الشكل (6-16)، فتكون سعة هذه المكثفة في حال الخلاء يفصل بين لبوسيها معطاة بالعلاقة:

$$C_v = \frac{S\,\varepsilon_0}{d} \qquad (6\text{-}39)$$

نضع عازل ثابت عازليته النسبية ε_r بين لبوسي هذه المكثفة، فتستقطب ذرات هذا العازل وتتحول إلى ثنائيات أقطاب منتظمة وفق خطوط الحقل كما في الشكل (6-16)، وتكون الشحنات على أوجه السطوح المتوازية المؤلفة من ثنائيات الأقطاب متساوية بالقيمة، ويمكن اعتبارها مجموعة مكثفات موصولة على التسلسل، ولتكن $C_1, C_2, C_3 \dots$ سعاتها، و $x_1, x_2, x_3 \dots$ المسافات بين لبوسي كل منها، والتي تشكل مسافات حرة يقطعها الحقل، ولتكن $b_1, b_2, b_3 \dots$ أطوال ثنائيات الأقطاب المتشكلة، فتكون C_M السعة المكافئة لهذه المكثفات الموصولة على التسلسل هي:

$$\frac{1}{C_M} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{C_M} = \frac{1}{S\varepsilon_0 / x_1} + \frac{1}{S\varepsilon_0 / x_2} + \frac{1}{S\varepsilon_0 / x_3} + \cdots = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots}{S\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_M} = \frac{d - (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots)}{S\varepsilon_0} = \frac{d - nb}{S\varepsilon_0}$$

وذلك بفرض أن المسافات الحرة متساوية $x = x_1 = \dots = x$؛ $b_1 = b_2 = \dots = b$، وأن عددها هو n، فتكون السعة:

$$C_M = \frac{S\varepsilon_0}{d - nb} \qquad (6\text{-}40)$$

وبمقارنة العلاقة (6-40) مع العلاقة (6-39) نجد أن $C_M > C_V$ أي أن سعة المكثفة قد ازدادت عند وضع العازل بين لبوسيها، وهذه الزيادة كما يتضح من العلاقة (6-39) ناتجة عن تناقص قيمة d التي تمثل المسافة الحرة التي تقطعها خطوط الحقل بين اللبوسين.

وباستخدام تعريف ε_r من العلاقة (6-38)، واستخدام العلاقتين (6-40), (6-39) نجد:

$$\varepsilon_r = \frac{d}{d - nb} = \frac{d}{nx} \qquad (6\text{-}41)$$

سنرى فيما يلي ماذا يحصل للمقادير الأخرى المتعلقة بالمكثفة، كفرق الكمون وشدة الحقل والشحنة، وذلك في الحالتين التالتين:

الحالة الأولى: نغير السعة وفرق الكمون وشدة الحقل لمكثفة بثبات شحنتها:

شحنت مكثفة بواسطة مولد مستمر، فرق الكمون بين قطبيه U ومن ثم فصلت عن المولد فيكون فرق الكمون بين لبوسيها U_v نفسه فرق كمون المولد، ولتكن الشحنة على كل من لبوسيها Q_v، ولتكن سعتها C_v التي تعطى بالعلاقة:

$$C_v = \frac{Q_v}{U_v} \qquad (6\text{-}42)$$

نضع بين لبوسي هذه المكثفة مادة عازلة ثابتة عازليتها النسبية ε_r، فتزداد سعتها لتصبح $C_M = \varepsilon_r.C_v$، وذلك حسب العلاقة (6-38)، وبما أن المادة العازلة لا تمرر الشحنات الكهربائية فإن شحنتها Q_M بعد وضع العازل تساوي شحنتها قبل وضع العازل، وأما سعتها الجديدة فهي بالمقارنة مع العلاقة (6-42) تعطى على الشكل:

$$C_M = \frac{Q_M}{U_M} \Rightarrow U_M = \frac{Q_M}{C_M} = \frac{Q_V}{C_M}$$

ولكن $C_M = \varepsilon_r.C_v$ فيكون فرق الكمون بين لبوسيها U_M بعد وضع العازل:

$$U_M = \frac{Q_V}{\varepsilon_r C_V} = \frac{1}{\varepsilon_r}\frac{Q_V}{C_V} = \frac{U_V}{\varepsilon_r} \qquad (6\text{-}43)$$

تمثل العبارة السابقة العلاقة بين فرق الكمون بين لبوسي مكثفة U_M مملوءة بعازل ثابتة عازليته ε_r، وفرق الكمون بين لبوسيها وهي خالية من هذا العازل U_v وذلك من أجل أن تبقى شحنة المكثفة ثابتة في الحالتين، وبما أنه من أجل جميع المواد يكون لدينا $C_M>C_v$ دائماً، وبالتالي فإن $\varepsilon_r>1$ دائماً أيضاً، وهذا يعني أن $U_M<U_v$ دائماً.

أما الحقل الكهربائي فيتغير لتغير الكمون فهو قبل وضع العازل $E_V = \frac{U_V}{d}$ ويصبح بعد وضعه:

$$E_M = \frac{U_M}{d} = \frac{1}{d}\left(\frac{U_V}{\varepsilon_r}\right) = \frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{U_V}{d}\right) = \frac{E_V}{\varepsilon_r} \qquad (6\text{-}44)$$

ونجد بأن $E_M<E_V$ دوماً لأن $\varepsilon_r>1$ دوماً.

الحالة الثانية: نغير شحنة وسعة مكثفة بثبات حقلها وفرق الكمون بين لبوسيها:

يتم إدخال العازل بين لبوسي المكثفة مع إبقائها موصولة بالمولد لضمان بقاء فرق الكمون بين لبوسيها وبالتالي شدة الحقل داخلها ثابتين، أي أنه إذا فرضنا U_V فرق الكمون بين لبوسيها قبل وضع العازل بينهما، وهو نفسه فرق الكمون بين مأخذي المولد، فإن فرق الكمون بين اللبوسين بعد وضع العازل وليكن U_M يكون أيضاً مساوٍ لفرق الكمون بين مأخذي المولد، لأننا أبقيناه موصولاً باللبوسين، وبالتالي $U_M = U_V$ ما دامت d مسافة المكثفة ثابتة فإن شدتي الحقل قبل وبعد وضع العازل تكونان متماثلتين أيضاً أي أن $E_M = E_V$، ولكن ماذا عن شحنة المكثفة في هذه الحالة؟

إن سعة المكثفة قبل وضع العازل هي $C_V=Q_V/U_V$ وسعتها بعد وضع العازل $C_M=Q_M/U_M$، لكن $U_M = U_V$, $C_M = \varepsilon_r C_V$ ويكون:

$$Q_M = C_M U_M = \varepsilon_r C_V U_V \Rightarrow Q_M = \varepsilon_r Q_V \qquad (6\text{-}45)$$

وبما أن $\varepsilon_r>1$ دوماً فإن $Q_M>Q_V$ دائماً ويعني ذلك أن المولد الذي فرق كمونه U استطاع ضخ شحنة مقدارها Q_V فقط إلى كلٍ من لبوسي المكثفة، ولكن هذا المولد وبنفس القوة المحركة يستطيع ضخ شحنات إضافية إلى كلٍ من لبوسي المكثفة بعد وضع العازل بينهما.

عندما تجرى دراسات على الحقول الكهربائية الساكنة في الأوساط المادية تظهر ثابتة العازلية النسبية لهذه الأوساط المادية مترافقة مع ε_0 ثابتة السماحية الكهربائية للخلاء ونستبدل جداءهما بـ ε أي أن:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \ \varepsilon_r \qquad (6\text{-}46)$$

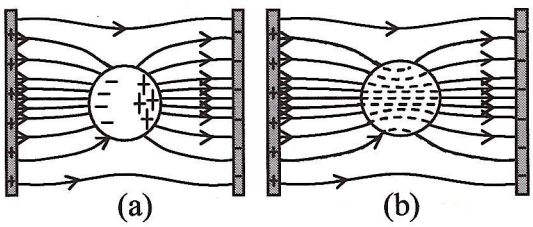
تسمى ε بثابتة العازلية الكهربائية للمادة العازلة أو السماحية المطلقة للمادة العازلة Absolute Permittivity. وحسب تعريف ثابتة العازلية النسبية ε_r فإن $\varepsilon_r =1$ للخلاء،

وأما للغازات فإن ε_r أكبر من الواحد بقليل، وتوجد علاقة تناسب طردي بينها وبين كثافة الغازات، وتأخذ ε_r قيماً حتى القيمة 10 من أجل المواد الصلبة العازلة، ويشذ عن ذلك الألماس الذي له $\varepsilon_r = 16.5$، ويمكن لـ ε_r أن تأخذ قيماً مختلفة بالنسبة للمادة الواحدة حيث تتعلق بدرجة نقائها وبدرجة حرارتها، ونشير هنا إلى أنه لا توجد مادة ذات عازلية مطلقة لذا فإن الشحنات الكهربائية لا تبقى إلى ما لانهاية على لبوسي مكثفة مملوءة بعازل ومشحونة ومفصولة عن المولد حيث تتسرب الشحنات عبر العازل ببطء شديد.

٦-٩- متجه الاستقطاب *Polarization Vector*:

لدراسة صورة خطوط الحقل الكهربائي داخل مكثفة مستوية تحوي عازلاً بين لبوسيها، نضع قرصاً عازلاً صغيراً بين اللبوسين كما في الشكل (17-6)، فنلاحظ تغيراً في شكل خطوط الحقل عما كانت عليه قبل وضع العازل، حيث يعاني بعضها من انقطاعٍ وبعضها الآخر من انحناء، وتختلف درجة هذا الانحناء بحسب البعد والقرب من العازل، ويماثل ذلك تأثير الناقل الموضوع ضمن الحقل الكهربائي، ولكن تأثير الناقل يكون أكبر على خطوط الحقل لأن الشحنات تتجمع في طرفيه بسبب الحركة الحرة لإلكترونات الناقلية في النواقل.

أما في العوازل فتكون الشحنات موزعة على كامل حجم العازل، حيث تصطف خلف بعضها على التناوب سالبة فموجبة، مما يجعل خطوط الحقل تسير بشكل متقطع ضمن العازل كما هو موضح في الشكل (17-6).



الشكل (17-6): أثر حقل كهربائي على ناقل (a) وعازل (b).

أما ضمن الناقل فلا تسير خطوط الحقل مطلقاً وإنما تعاني انقطاعا كاملاً، وإذا كان تأثير العازل على الحقل الذي يخترقه يتناسب مع ثابتة العازلية النسبية ε_r لهذا العازل، وحيث أن ε_r تساوي طول كل من خطوط الحقل على طول المسافة الحرة المتقطعة التي تسيرها هذه الخطوط ضمن العازل.

وإذا افترضنا أن هذا التعريف ساري المفعول على النواقل، فإن طول المسافة الحرة التي يسيرها أي من خطوط الحقل داخل ناقل معدومة، ويقود ذلك إلى أن ε_r لأي ناقل تكون مساوية ∞، ويفسر هذا التأثير الأشد للنواقل على الحقول الكهربائية الساكنة مقارنةً مع تأثير العوازل عليها.

مما سبق نجد أن الشحنات تستقطب على كامل الناقل، وعلى مستوى الجزيئيات في العازل، تسمى هذه الظاهرة بالتوجه الاستقطابي. لذلك من الملائم وصف أية مادة عازلة كهربائياً ومستقطبة بما يسمى متجه العزم الكهربائي Electric moment vector الذي يصف كمياً توزع الشحنات فيها كما يلي:

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r}_i \qquad (6\text{-}47)$$

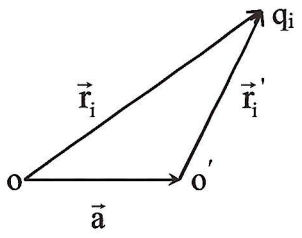
يمثل $\vec{r}_i$ نصف القطر المتجه الممتد من نقطة اختيارية o تؤخذ كمبدأ اختياري، إلى الشحنة q_i، ويشمل المجموع في العلاقة السابقة جميع الشحنات الأولية من الإلكترونات والنوى الداخلة في تركيب المادة العازلة كهربائياً، ونفترض بأن العازل الكهربائي يكون معتدلاً كهربائياً، لأن المجموع الكلي للشحنات ضمنه يساوي الصفر أي:

$$\sum_i q_i = 0 \qquad (6\text{-}48)$$

وهكذا فإن توزع الشحنات يحدد متجه العزم الكهربائي $\vec{P}$ بالنسبة لمبدأ إحداثيات معين.

لنتساءل، هل يتغير شعاع الاستقطاب إذا نقلنا مبدأ الإحداثيات o إلى نقطة أخرى مثل o′ تبعد عنه مسافة تتحدد بالمتجه $\vec{a}$ كما في الشكل (6-18)؟ للإجابة نلاحظ أن جميع أنصاف الأقطار المتجهة تتغير بحسب العبارة:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{a}$$



الشكل (6-18):
لا يغير تغيير مبـــدأ الإحداثيات شعاع الاستقطاب.

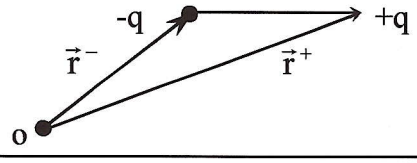
وبالتعويض في عبارة متجه الاستقطاب (6-47) نجد:

$$\vec{P} = \sum_i q_i(\vec{r}_i' + \vec{a}) = \sum_i q_i \vec{r}_i' + \vec{a}\sum_i q_i \qquad (6\text{-}49)$$

وبأخذ العلاقة (6-48) بالاعتبار لأن العازل معتدل كهربائياً تصبح العلاقة الأخيرة:

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r}_i' \qquad (6\text{-}50)$$

العزم الكهربائي لثنائي الأقطاب الكهربائي: يمكن اعتبار العـــازل المعتـــدل بالمحصلة كجملة بسيطة معتدلة كهربائياً مؤلفة من شـــحنتين متســـاويتين بالقيمـــة ومختلفتين بالإشارة كالشحنتين $+q, -q$ كما هو مبين في الشكل (6-19)، التي ندعوها بثنائي أقطاب كهربائي، ويصبح العزم الكهربائي (شعاع الاستقطاب) لهذه الجملة كما في العلاقة التالية:



الشكل (6-19):
العزم الكهربـــائي ثنـــائي أقطاب كهربائي.

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r}_i = q(\vec{r}^+ - \vec{r}^-) = q\vec{\ell} \qquad (6\text{-}51)$$

حيث $\vec{\ell}$ متجه ذراع الثنائية المكونة من الشحنتين، مبدؤه الشحنة الســـالبة ونهايتـــه الشحنة الموجبة.

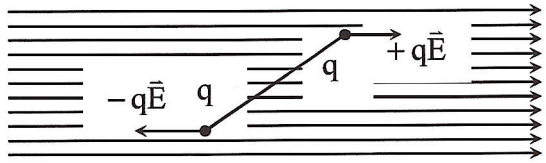
تأتي أهمية إدخال مفهوم العزم الكهربائي لتوزع معتـــدل مـــن الشـــحنات، من كون عبارة عزمه تتطابق مع عزم ثنائي الأقطاب الكهربائي، وهذا ما يمكن التحقق

منه من مقارنة العلاقتين (6-51) , (6-50) مع بعضهما. كما أن كمون التوزعات الكهربائية يتطابق أيضاً مع كمون ثنائي الأقطاب الكهربائي، أي أنه يُحسب من علاقة مماثلة، وذلك عندما يكون حساب هذا الكمون في نقطة بعيدة بالمقارنة مع أبعاد الجملة.

عزم دوران ثنائي الأقطاب الكهربائي: عند وضع ثنائي الأقطاب الكهربائي في حقل كهربائي متجانس أو منتظم، شدته $\vec{E}$، فإن شحنتا الثنائي تتأثران بقوتين متساويتين ولكنهما متعاكستين، ونقطتا تأثيرهما هما شحنتا الثنائي، وهما لا تقعان على حامل واحد ولكن حاملاهما متوازيين، إلا إذا كان ذراع الثنائي ℓ موازٍ لخطوط الحقل $\vec{E}$. إن شدتي هاتين القوتين هما $+q\vec{E}, -q\vec{E}$ وتشكلان بالتالي مزدوجة تولد عزم دوران على الثنائي الذي يدور ليستقر بوضع ينطبق فيه ذراعه على اتجاه الحقل الكهربائي كما في الشكل (6-20)، وبالتالي فإن قوتي المزدوجة تنتجان عزم دوراني تحدد قيمته من العلاقة التالية:

$$\vec{M} = \vec{\ell} \times \vec{F} = \vec{\ell} \times q\vec{E} = q\vec{\ell} \times \vec{E} = \vec{P} \times \vec{E} \qquad (6\text{-}52)$$

ووفق العلاقة الأخيرة يكون عزم دوران الثنائي أعظمي عندما $\vec{E} \perp \vec{\ell}$، وينعدم عندما $\vec{E} // \vec{\ell}$.



الشكل (6-20): عزم دوران ثنائي أقطاب كهربائي.

أي عندما ينطبق ذراع الثنائي على أحد خطوط الحقل. بالتالي يتوقف الثنائي عن الدوران بعد أن يصبح ذراعه موازياً لخطوط الحقل الكهربائي المنتظم، وبعدها ينتظم الثنائي في الحقل ولا يقوم بأي حركة، لأن القوتين $+q\vec{E}, -q\vec{E}$ المتعاكستين تصبحان على حامل واحد. لذلك عند وضع ثنائي الأقطاب الكهربائي في حقل متجانس فإنه يبقى ساكناً إذا كان ذراعه موازٍ لخطوط هذا الحقل.

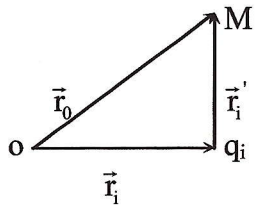
استنتاج عبارة الكمون بدلالة عزم الاستقطاب P لثنائي أقطاب كهربائي:

يعطى الكمون الكهربائي الساكن المتولد عن توزع محدد من الشحنات الكهربائية النقطية في نقطة كيفية M، بالعلاقة:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (6\text{-}53)$$

حيث r_i بعد النقطة M عن الشحنة q_i.

نفرض الآن أن مبدأ الإحداثيات o يقع ضمن المنطقة المشغولة بالشحنات، ولتكن $\vec{r}_i$, $\vec{r}_0$ بعدي النقطة M والشحنة q عنه كما في الشكل (6-21)، عندئذٍ يكون:



الشكل (6-21):
كمون توزع معين من الشحنات.

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_0 - \vec{r}_i \Rightarrow r_i'^2 = r_0^2 - 2\vec{r}_0\vec{r}_i + r_i^2 \qquad (6\text{-}54)$$

نأخذ الآن الجذر التربيعي للطرفين فتصبح العلاقة (6-54) كما يلي:

$$r'_i = (r_0^2 - 2\vec{r}_0\vec{r}_i + r_i^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r_i'} = (r_0^2 - 2\vec{r}_0\vec{r}_i + r_i^2)^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r_i'} = \frac{1}{r_0}\left(1 - 2\frac{\vec{r}_0\vec{r}_i}{r_0^2} + \frac{r_i^2}{r_0^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

ننشر العلاقة الأخيرة حسب سلسلة تايلور فتصبح:

$$\frac{1}{r_i'} = \frac{1}{r_0}\left(1 + \frac{\vec{r}_0\vec{r}_i}{r_0^2} + \cdots\right) \qquad (6\text{-}55)$$

وقد اكتفينا بحدين فقط من منشور سلسلة تايلور وذلك على فرض $r_i \ll r_0$ وبالتعويض في العلاقة (6-53) بعد الأخذ بعين الاعتبار العلاقة (6-48) نجد أن الكمون المتولد عن توزع شحنات هو:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_0}{r_0^3}\sum_i q_i \vec{r}_i \qquad (6\text{-}56)$$

نستطيع كتابة العلاقة الأخيرة بالاستفادة من العلاقة (6-47) بالشكل:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\,\vec{r}_0}{r_0^3} \qquad (6\text{-}56)$$

وتتطابق عبارة الكمون بدلالة عزم الاستقطاب P لثنائي أقطاب كهربائي مع عبارته المحسوبة في المثال (٤-٧).

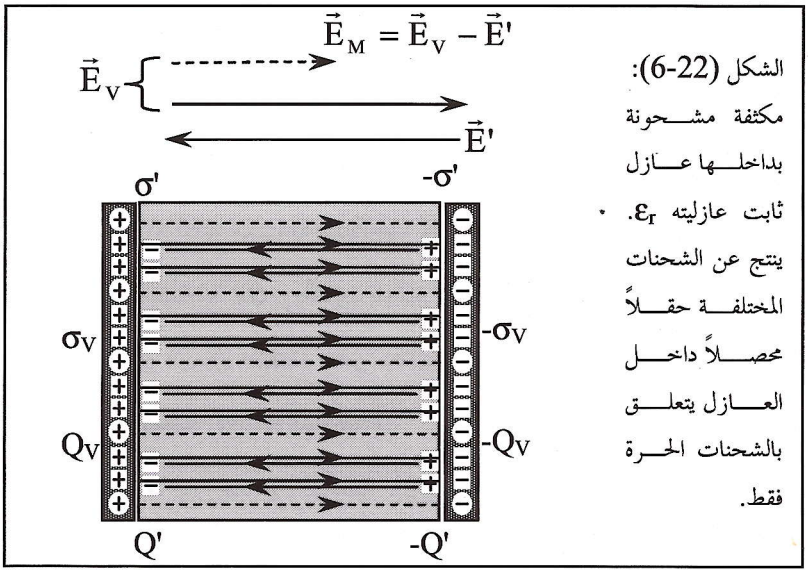
٦-١٠- الانزياح الكهربائي *Electric Displacement:*

نفرض أن مكثفة مستوية سطحها S، والمسافة بين لبوسيها d مشحونة بشحنة Q_V ذات كثافة سطحية σ_V وبالتالي يتولد فيها حقل كهربائي $\vec{E}_V$ متمثل بجميع الأشعة المتجهة إلى اليمين المنقطة وغير المنقطة كما في الشكل (6-22)، وتدعى الشحنة Q_V **بالشحنة الحقيقية** (real charges).

عند وضع عازل ما بين لبوسي المكثفة فإن ذراته تتحول إلى ثنائيات أقطاب تنتظم وفق خطوط الحقل الكهربائي كما في الشكل (6-16)، ويبدي سطحه المواجه للبوس السالب للمكثفة انشحاناً موجباً، ويبدي السطح الآخر المقابل للبوس الموجب للمكثفة انشحاناً سالباً كما في الشكل (6-22)، وبالتالي ينشحن هذا العازل بشحنة 'Q ذات كثافة سطحية 'σ ويتولد فيه حقل كهربائي $\vec{E}'$ يعاكس الحقل $\vec{E}_V$، ويتمثل في الشكل (6-22) بالأشعة الموجهة إلى اليسار. تدعى هذه الشحنة **بالشحنة الظاهرية** (formal charges) لأنها تزول بزوال الحقل وهي تتعلق بمجموعة شحنات اللبوسين المشار إليها بالمربعات كما في الشكل (6-22)، التي تدعى **بالشحنات المرتبطة** (bound charges) لهذا السبب. تتفانى جميع خطوط الحقل $\vec{E}'$ مع قسم كبير من خطوط الحقل $\vec{E}_V$ ونكتب:

$$\vec{E}_M = \vec{E}_V - \vec{E}' \quad ; \quad \vec{E}_V = \vec{E}_M + \vec{E}' \qquad (6\text{-}57)$$

أما القسم المتبقي من الحقل فيتمثل في الشكل (22-6) بالأشعة الموجهة إلى اليمين، المنقطة منها فقط، وهو يمثل الحقل بين لبوسي المكثفة بعد إدخال العازل، ويتعلق بما يدعى **بالشحنات الحرة** (free charges) الموجودة فقط على لبوسي المكثفة، وهي المشار إليها بالدوائر في الشكل (22-6). يمكن وصف ما سبق بالقول أن خطوط الحقل $\vec{E}_V$ تُقصر داخل العازل.



الشكل (22-6): مكثفة مشحونة بداخلها عازل ثابت عازليته ε_r. ينتج عن الشحنات المختلفة حقلاً محصلاً داخل العازل يتعلق بالشحنات الحرة فقط.

من أهم مظاهر الحقل الكهربائي القوة الكهربائية بين الشحنات، وقد كان مفهوم متجه الحقل الكهربائي كافياً للتعبير عن ذلك، لكنه لم يعد كافياً للتعبير عن خاصة الاستقطاب التي تحصل في العوازل بسبب تغير قيمة شدة الحقل الكهربائي عند انتقال خطوطه بين الأوساط المختلفة كالانتقال من الخلاء إلى عازل، الأمر الذي اقتضى إدخال مفهوم جديد بهدف وصف هذا التغير بصورة كمية والتعبير عنه بعلاقات رياضية، نسمي هذا التغير بالانزياح في قيم الحقل الكهربائي أو الانزياح الكهربائي Electric shift (displacement)، أو نسميه بالتحريض الكهربائي Electrostatic induction ونرمز له بالرمز $\vec{D}$.

نتعرف فيما يلي على مفهوم الانزياح، لنوجد العلاقة الرياضية التي تربط بين الكثافة وشدة الحقل E, σ، نعلم أن سعة المكثفة في الخلاء تعطى بالعلاقتين:

$$C_V = \frac{Q_V}{U_V} \; ; \quad C_V = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

نستنتج من هاتين العلاقتين:

$$\frac{Q_V}{S} = \varepsilon_0 \frac{U_V}{d} \qquad (6\text{-}58)$$

لكننا نعلم أن:

$$E_V = \frac{U_V}{d} ; \; \sigma_V = \frac{Q_V}{S}$$

وبالتالي نجد أن:

$$\sigma_V = \varepsilon_0 E_V \qquad (6\text{-}59)$$

حيث ε_0 ثابت العازلية المطلقة للهواء، ونعبر عن هذه العلاقة بشكل متجه على النحو:

$$\vec{D}_V = \varepsilon_0 \vec{E}_V ; D_V = \varepsilon_0 E_V ; \; \left|\vec{D}_V\right| = D_V = \sigma_V \qquad (6\text{-}60)$$

نحصل على ذلك إذا كان المنبع موصول مع المكثفة أو مفصول عنها، أما عندما يفصل عازل ذو ثابت عازلية نسبية ε_r بين لبوسي المكثفة فإنه يجب التمييز بين حالتي المنبع التاليتين:

١. **المنبع مفصول:** إن إدخال العازل يؤدي إلى انخفاض الحقل E_V إلى القيمة $E_M = \frac{E_V}{\varepsilon_r}$ وبقاء الانزياح σ_V ثابتاً، وبالتعويض في (6-59) , (6-60) نحصل على علاقة الحقل بوجود العازل مع الانزياح بغياب العازل كما يلي:

$$\vec{D}_V = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_M = \varepsilon \vec{E}_M ; \; \sigma_V = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_M = \varepsilon E_M \qquad (6\text{-}61)$$

وهذا يعني أن استقطاب العازل يحصل على حساب نقصان الحقل الخارجي بالمقدار $E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$.

٢. **المنبع موصول:** إن إدخال العازل لا يؤدي إلى ازدياد الحقل بل يبقى ثابتاً ويزداد الانزياح إلى القيمة $\sigma_M = \varepsilon_r \sigma_V$، وبالتعويض في (6-60) نحصل على علاقة الانزياح بوجود العازل مع الحقل بغياب العازل:

$$\vec{D}_M = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_V = \varepsilon \vec{E}_V ; \; \sigma_M = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_V = \varepsilon E_V \qquad (6\text{-}62)$$

وهذا يعني أن استقطاب العازل يحصل على حساب زيادة كثافة الشحنات الحرة بالمقدار $\sigma'' = \varepsilon_0 E''$. ونوضح معاني الرموز في الجدول التالي:

E_V	تمثل قيمة الحقل والمنبع مفصول أو موصول في حالة الخلاء.
$E_M = \frac{E_V}{\varepsilon_r}$	تمثل قيمة الحقل والمنبع مفصول في حالة وجود العازل.
$\sigma_V = D_V = \varepsilon_0 E_V$	تمثل قيمة الانزياح والمنبع مفصول أو موصول في حالة الخلاء.
$\sigma_M = D_M = \varepsilon_r \sigma_V$	تمثل قيمة الانزياح والمنبع موصول في حالة وجود العازل.

ونكتب بشكل عام:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}\,;\ \sigma = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon E \qquad (6\text{-}63)$$

وذلك على اعتبار أن الحقل والانزياح يتمثلان بالقيمتين E_M و $\sigma_V = D_V$، أو القيمتين E_V وَ $\sigma_M = D_M$ على الترتيب.

وفقاً للعلاقات السابقة نعرف الانزياح الكهربائي بأنه قيمة متجهة لها اتجاه الحقل الكهربائي نفسه، وطويلتها تساوي طويلة الحقل الكهربائي مضروبة بثابتة العازلية المطلقة للوسط، أو أنه قيمة كثافة التوزع السطحي للشحنات المولدة للحقل الكهربائي، وللكثافة σ_M ; σ_V قيمة جبرية (غير متجهة) وترتبط بقيمة الحقل $E_M ; E_V$ وذلك عندما يفصل بين لبوسي المكثفة عازل في حالتي المنبع موصول ومفصول على الترتيب، وعند كتابة الحقل في العلاقات المذكورة كمتجه $\vec{E}_M ; \vec{E}_V$، نستبدل الكثافات بقيم متجهة $\vec{D}_V ; \vec{D}_M$. لقد تم اشتقاق العلاقات السابقة من أجل حقل كهربائي منتظم كالحقل بين لبوسي مكثفة مستوية، وتصلح هذه العلاقات أيضاً حتى في الحالة العامة من أجل أي حقل كهربائي.

نعين واحدة الانزياح الكهربائي في الجملة الدولية كما يلي:

$$[D] = [\sigma] = \frac{Coul}{m^2} = \frac{A \cdot S}{m^2}$$

أما في الجملة السغثية فإن $\varepsilon_0 = 1$ وبالتالي:

$$\vec{D}^{*} = \varepsilon_r \vec{E}^{*} \Rightarrow$$

$$[D^{*}] = [E^{*}] = \frac{\sqrt{dyn}}{cm}$$

يمكن أن نعين قيمة الانزياح الكهربائي في الحالة الخاصة التي يكون فيها الحقل الكهربائي منتظم بتعيين الكثافة السطحية للشحنات الكهربائية دون أن نلمس الشحنة المولدة لهذا الحقل، يُمكننا ذلك عن طريق وضع وريقتين معدنيتين متلاصقتين ضمن هذا الحقل فتنشحنا بالتأثير، نفصل إحداهما عن الأخرى وهما ما تزالان ضمن الحقل، ثم نقيس كثافة الشحنات على إحدى الوريقتين فنحصل على قيمة σ التي تساوي قيمة D، أما قيمة E فتحسب من إحدى العلاقات السابقة.

٦-١١- الانزياح الكهربائي ومتجه الاستقطاب

:Electric Displacement and Vector Polarization

من الأهمية بمكان إيجاد العلاقة بين كثافتي الشحنات قبل وضع العازل على أحد لبوسي المكثفة σ_V، والشحنات المتحرضة على العازل بعد وضعه بين لبوسي المكثفة σ' من جهة، وبين شعاعي الانزياح الكهربائي والاستقطاب من جهة أخرى. من العلاقة (6-59) نكتب:

$$E_V = \frac{\sigma_V}{\varepsilon_0}$$

ومنها وبتذكر العلاقة $E_V = \varepsilon_r E_M$ نكتب:

$$E_M = \frac{\sigma_V}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

وبالمقارنة معها نكتب:

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

وبالتعويض في العلاقة (6-57) نجد:

$$\frac{\sigma_V}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_V}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} + \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \qquad (6\text{-}64)$$

ومنها نجد العلاقة بين الكثافتين σ_V ,σ':

$$\sigma' = (\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r})\sigma_V \qquad (6\text{-}65)$$

الآن باستخدام العلاقتين (6-63) يمكن أن نكتب :

$$D = \varepsilon_0\varepsilon_r E = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0\varepsilon_r E - \varepsilon_0 E$$

$$D = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

$$D = \varepsilon_0 E + P \; ; \; \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad (6\text{-}66)$$

حيث أننا ندعو المقدار:

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E \; ; \; \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} \qquad (6\text{-}67)$$

بشعاع الاستقطاب الحاصل على حساب الحقل الخارجي أو على حساب زيادة كثافة الشحنات الحرة كما ذكرنا في الفقرة السابقة. يتناسب شعاع الاستقطاب هذا مع شعاع الحقل $\vec{E}$ الناتج بعد حصول الاستقطاب بحسب العلاقة التالية:

$$P = \varepsilon_0\chi E \; ; \; \vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E} \qquad (6\text{-}68)$$

حيث:

$$\chi = \varepsilon_r - 1$$

معامل التناسب بلا أبعاد ويدعى بالطواعية العازلية dielectric susceptibility، ويتعلق الاستقطاب بطبيعة العازل وحالته الفيزيائية ويتطابق اتجاهه مع اتجاه الحقل $\vec{E}$ في العوازل المتناحية.

٦-١٢ - استمرار وانقطاع الحقل والانزياح الكهربائيان

Continuity & Discontinuity Electric Field & displacement:

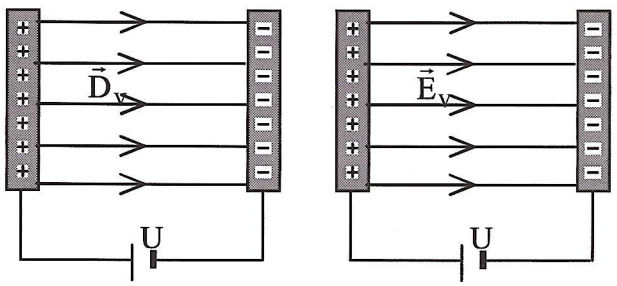
تأخذ متجهة الانزياح الكهربائي منحى واتجاه متجهة الحقل الكهربائي نفسه بشكل عام. ولندرس هاتين المتجهتين بين لبوسي مكثفة مستوية موصولة بشكل دائم بمنبع ثابت U = cte وبالتالي فرق الكمون بين اللبوسين سيبقى ثابتاً ومساوياً لفرق الكمون بين مأخذي المنبع أي يساوي U، وبفرض أن الخلاء يفصل بين لبوسي المكثفة فإنه يمكن تمثيل خطوط الحقل $\vec{E}$ والانزياح $\vec{D}$ بصورة متماثلة كما في الشكل (6-23)، وبحسب تعريف الانزياح وشدة الحقل الكهربائي في الخلاء D_V , E_V نكتب:

$$D_V = \frac{Q_V}{S}$$

$$E_V = \frac{U_V}{d}$$

$$D_V = \varepsilon_0 E_V$$

حيث: $U_V=U=cte$ وأن S , d تمثلان مساحة والبعد بين لبوسي المكثفة على الترتيب، و Q_V تمثل شحنة كلٍ من اللبوسين.



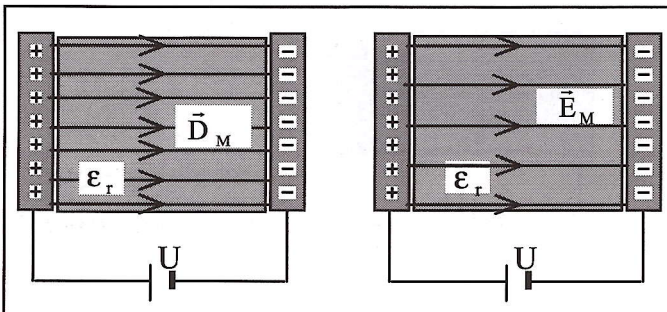
الشكل (6-23): الانزياح والحقل الكهربائيان في مكثفة لا تحوي عازل وتبقى موصولة مع المنبع.

وفي الحالة التي يكون فيها الحجم بين لبوسي المكثفة مملوءاً بمادة عازلة ثابتة عازليتها النسبية ε_r فإن سعة هذه المكثفة تزداد بمقدار ε_r ضعفاً بالمقارنة مع سعتها وهي خالية أي تصبح $C_M = \varepsilon_r . C_V$ كما في الشكل (6-24). وبما أن فرق الكمون المطبق بين لبوسي المكثفة ثابت $U=cte$، فإن شحنة المكثفة تزداد أيضاً بمقدار ε_r ضعفاً عن شحنتها وهي خالية أي أن $Q_M = \varepsilon_r . Q_V$، وذلك لأن:

$$Q_M = C_M . U \ , \ Q_V = C_V . U$$

ونحصل بالتالي على عبارة الانزياح الكهربائي بوجود العازل كما يلي:

$$D_M = \frac{Q_M}{S} = \varepsilon_r \frac{Q_V}{S} = \varepsilon_r D_V \qquad (6\text{-}69)$$



الشكل (6-24): الانزياح والحقل الكهربائيان في مكثفة تحوي عازل وتبقى موصولة مع المنبع.

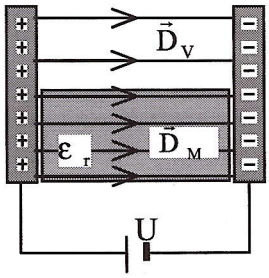
أي إن الانزياح الكهربائي قد ازداد عند وضع العازل ذي ثابتة العازليـــة النســـبية ε_r ليصبح ε_r ضغفاً من قيمته بوجود الخلاء. أما شدة الحقل فإنها تبقى ثابتة ما دام فـــرق الكمون بين لبوسي المكثفة ثابتاً أي أن:

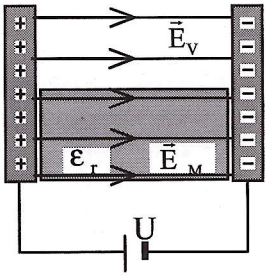
$$E_M = \frac{U}{d} = E_V \qquad (6\text{-}70)$$

ويعزى ارتفاع قيمة الانزياح الكهربائي بوجود المادة العازلة ضمن الحقل الكهربـــائي إلى ارتفاع كثافة الشحنات على لبوسي المكثفة، وبالرغم من ذلك تبقى شدة الحقـــل الكهربائي بوجود العازل مماثلة لشدته بوجود الخلاء، وذلك لأن قسماً من الشحنات الحقيقية للبوسي المكثفة يتعادل مع الشحنات السطحية للعازل، وأما الشحنات الحرة للمكثفة بوجود عازل فتكون متساوية في الحالتين ونلخص ما سبق بالنتيجة التالية:

نتيجة: في حالة وجود عازل بين لبوسي مكثفة تعتبر الشحنات الحقيقية هـــي المسؤولة عن خطوط الانزياح الكهربائي $\vec{D}$، وأما خطوط الحقل الكهربائي فهي ناتجة فقط عن الشحنات الحرة للمكثفة. ويوضح الشكل (6-24) أنه عند وضع المادة العازلة تتزايد كثافة خطوط $\vec{D}$، وبالتالي تتزايد قيمته، بينما تبقى كثافة خطـــوط $\vec{E}$ ثابتـــة وبالتالي تبقى قيمته ثابتة.

حالة خاصة١: نفرض في هذه الحالة أن المادة العازلة تملأ الحجم الفاصل بـــين لبوسي مكثفة بشكل جزئي بحيث يكون السطح غير الملامس للبوسي المكثفة عمودياً على لبوسيها كما هو موضح في الشكل (6-25).





الشكل (6-25):
الانزيـــــاح والحقـــــل الكهربائيان في مكثفة مملوءة جزئياً بعازل وتبقى موصولة مع المنبع، السطح الفاصـــل بـــين الوســـطين معامـــد للبوسين.

يمكن في هذه الحالة اعتبار المكثفة على أنها مكثفتين موصولتين على التوازي، وفي حال بقاء المكثفة موصولة بمنبع كمون ثابت U=cte يكون لجزأي المكثفة نفس فرق كمون المولد U، ويكون لهما نفس شدة الحقل الكهربائي $E_M = E_V = U/d$ أيضاً، وبالرغم من تساوي شدة الحقل وفرق الكمون الكهربائيان في جزأي المكثفة، فإن كثافة الشحنات الكهربائية تختلف من قسم لآخر على اللبوسين ، وهي تكون أكبر في القسم المحاذي للمادة العازلة، ويكون بالتالي الانزياح الكهربائي D_M في جزء المكثفة المملوء بالمادة العازلة أكبر من الانزياح الكهربائي D_V في القسم الخالي من المكثفة، وتعطى قيمة الانزياح الكهربائي في القسم الخالي من المكثفة بالعلاقة:

$$D_V = \varepsilon_0 \ E_V$$

أما في القسم المملوء بالمادة العازلة فتعطى قيمة الانزياح الكهربائي بالعلاقة:

$$D_M = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_M = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_V = \varepsilon_r D_V \quad ; \quad E_M = E_V \qquad (6\text{-}71)$$

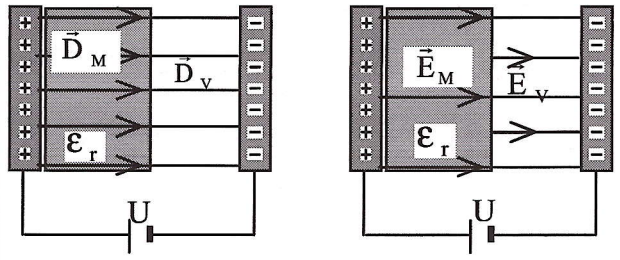
ويزداد بالتالي الانزياح الكهربائي في المكثفات المملوءة بمادة عازلة بمقدار ε_r ضعفاً عن مثيله في المكثفات الخالية من المواد العازلة، ونلاحظ إضافة لما سبق أن الانزياح الكهربائي الموضح في الشكل (6-25) يسير بشكل مماسي للسطح الفاصل بين العازل والخلاء، ويمكننا أن نكتب النتيجة التالية:

نتيجة: تكون المركبة المماسية للحقل الكهربائي مستمرةً على السطح الفاصل بين جزأي المكثفة، المملوء بالمادة العازلة، والخالي منه، في حين يعاني الانزياح الكهربائي انقطاعاً على هذا السطح، ويقصد بالانقطاع هنا التغيير المفاجئ في قيمة الانزياح D.

حالة خاصة٢: نفرض في هذه الحالة أن المادة العازلة تملأ الحجم الفاصل بين لبوسي مكثفة بشكل جزئي، بحيث يكون السطح غير الملامس للبوسي المكثفة موازياً لهما كما هو موضح في الشكل (6-26)، يكون الانزياح الكهربائي في هذه الحالة متماثلاً في جزأي المكثفة، أي أن قيمته متساوية فيهما، إذ يمكن اعتبار المكثفة في هذه الحالة مكثفتين موصولتين على التسلسل، وبالتالي تكون كثافة الشحنات متماثلة في جميع نقاط اللبوسين، ويمكن أن نكتب:

$$D_V = D_M ; D_V = \varepsilon_0 E_V ; D_M = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_M$$

$$\Rightarrow E_M = \frac{1}{\varepsilon_r} E_V \qquad (6\text{-}72)$$



الشكل (6-26):
الانزياح والحقل الكهربائيان في مكثفة مملوءة جزئياً بعازل وتبقى موصولة مع المنبع، السطح الفاصل بين الوسطين موازي للبوسين.

نستنتج من العلاقة السابقة أن شدة الحقل الكهربائي تتناقص في الأوساط المملوءة بمادة عازلة عن مثيلتها في الأوساط الخالية بنسبة $1/\varepsilon_r$، حيث تكون الشحنات الحرة المسؤولة عن خطوط الحقل الكهربائي في القسم الخالي من المكثفة مساوية للشحنات الحقيقية على كلٍ من لبوسي المكثفة، وأما في القسم المملوء بالعازل فيتعادل قسم من تلك الشحنات الحقيقية الموجودة على لبوسي المكثفة مع الشحنات الظاهرية على سطح المادة العازلة ويبقى قسم آخر يمثل الشحنات الحرة المسؤولة عن خطوط الحقل الكهربائي.

باعتبار أن المكثفة في الشكل (6-26)، مكثفتين موصولتين على التسلسل فإنه يمكن أن نقول أن فرق الكمون الكلي الثابت U موزع على المكثفتين، وإذا كانتا d_M , d_V سماكتي القسمين الخالي والمملوء من المكثفة على الترتيب، فإنه يمكن أن نكتب:

$$U = \int \vec{E}\,\overrightarrow{dr} = E_M d_M + E_V d_V = E_V \left(\frac{d_M}{\varepsilon_r} + d_V\right) \qquad (6\text{-}73)$$

وكما هو واضح من الشكل (6-26) فإن كلاً من الانزياح الكهربائي $\vec{D}$ وشدة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ يكون في وضع عمودي على سطح العازل وسطحي لبوسي المكثفة.

ومما سبق يمكن أن نكتب النتيجة التالية:

نتيجة: عندما يملأ عازل بشكل جزئي الفراغ بين لبوسي مكثفة مستوية بحيث يكون سطحه غير الملامس للبوسيها موازياً لهما، فإن المركبة الناظمية للانزياح تكون في هذه الحالة مستمرة على السطح الفاصل بين قسمي المكثفة، المملوء بالمادة العازلة والخالي منها، وبالمقابل فإن شدة الحقل الكهربائي تعاني انقطاعاً، أي تغيراً مفاجئاً في قيمتها، على هذا السطح الفاصل.

٦-١٣- أثر العازل على الحقل الكهربائي في بعض تطبيقات:

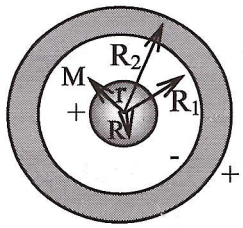
Effect of Dielectric at Electric Field in some Applications:

٦-١٣-١- الحقل الكهربائي داخل قشرة كروية عازلة

The electric field in spherical dielectric shell:

ليكن R نصف قطر كرة معدنية مشحونة بشحنة مقدارها q، وليكن R_2 , R_1 نصفا قطري قشرة كروية عازلة الداخلي والخارجي على الترتيب، وبفرض أن القشرة تحيط بالكرة بحيث تكونان متمركزتين في نقطة واحدة مثلما يوضح ذلك الشكل (6-27).

إن وجود الكرة المشحونة داخل القشرة الكروية العازلة يؤدي إلى انشحان الأخيرة بطريقة التأثير وذلك باستقطاب ذراتها وتحولها إلى ثنائيات أقطاب، عند ذلك يبدي السطح الداخلي انشحاناً معاكساً لشحنة الكرة المعدنية المشحونة، أما السطح الخارجي للقشرة فإنه يبدي انشحاناً مماثلاً كما هو مبين في الشكل (6-27)، ونشير هنا إلى أن شحنتي الوجهين الداخلي والخارجي للقشرة العازلة هما شحنتان ظاهريتان أو مؤقتتان، أي لا يكمن الاحتفاظ بهما بأي حال من الأحوال بعد إبعاد الحقل الكهربائي الذي أدى إلى تشكلهما.



الشكل (6-27):
أثر قشرة كروية محيطة بكرة ناقلة.

لتكن q'_1 ، q'_2 قيمتا الشحنتين المتشكلتين على السطح الـــداخلي والخـــارجي للقشرة الكروية العازلة، ولتكن σ'_1 ، σ'_2 الكثافتان السطحيتان للشحنات على هذين السطحين على الترتيب، عند ذلك يمكننا أن نكتب:

$$q'_1 = 4\pi R_1^2 \sigma'_1$$
$$q'_2 = 4\pi R_2^2 \sigma'_2$$

أما الحقل المتولد عن شحنة الكرة المعدنية الموجودة بداخل القشرة، فإنـــه يعطـــى في النقطة التي تبعد عن مركزها بالمقدار r وفي الخلاء بالعلاقة:

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

وتعطى شدة الحقل داخل العازل في النقطة التي تبعد r عن المركز المشترك بالعلاقة:

$$E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma'_2 (4\pi R_1^2)}{r^2}$$

$$\Rightarrow E' = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R_1^2 \sigma'_1}{r^2}$$

إن الحقل $\vec{E}'$ يعاكس $\vec{E}_0$ بالاتجاه وهذا يؤدي إلى أن الحقل الحاصل ضـــمن العازل هو:

$$E(r) = E_0 - E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} - \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2\sigma'_1}{r^2} \qquad (6\text{-}74)$$

من الواضح أن الحقل يتناقص وفق القانون $\frac{1}{r^2}$ فإذا رمزنا بـــ $E(R_1)$ لشدة الحقل في العازل في الجوار المباشر للسطح الداخلي للطبقة العازلة فيمكن أن نكتب:

$$\frac{E(R_1)}{E(r)} = \frac{r^2}{R_1^2} \Rightarrow E(R_1) = E(r)\frac{r^2}{R_1^2}$$

وهذا الحقل هو الذي يحدد الكثافة السطحية σ'_1 وباستخدام العلاقة (6-63) نجد:

$$\sigma'_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_1 - 1)E(R_1) = \varepsilon_0\chi E(r)\frac{r^2}{R_1^2} \qquad (6\text{-}75)$$

حيث χ تعطى بالعلاقة:

$$\chi = \varepsilon_r - 1$$

نبدل σ'_1 بقيمتها من العلاقة (6-75) في العلاقة (6-74) فنحصل على العلاقة التالية:

$$E(r) = E_0 - \chi E(r)$$

وبالتالي يعطى الحقل داخل العازل بالعلاقة:

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}; \varepsilon_r = \chi + 1$$

وبالأخذ بالاعتبار $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ نجد أن متجهة الانزياح تعطى بالعلاقة:

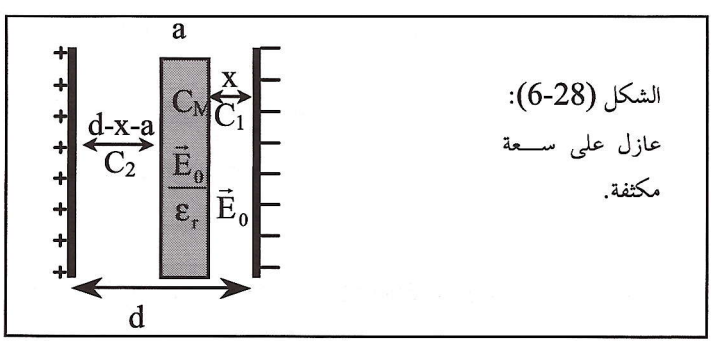
$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}(r) = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} = \varepsilon_0\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}_0$$

٦-١٣-٢- سعة مكثفة مستوية ذات عازل لا يملأ الفراغ بين لبوسيها

:The capacitance of capacity with isolator don't filled space between his parallel plates

نأخذ مكثفة مستوية البعد بين لبوسيها d وسطح كلٍ منهما S، يوجد بين لبوسيها صفيحة عازلة ثابت عزلها ε_r، توازيها وتساويها بالسطح وسماكتها a بحيث $a < d$ كما يوضح الشكل (6-28).

نشحن المكثفة تحت فرق كمون U قبل وضع الصفيحة العازلة، ثم نفصلها عن المنبع. ولتكن شحنتها Q موزعة بكثافة سطحية منتظمة σ على كلٍ من اللبوسين. ليكن الحقل E_0 قبل وضع الصفيحة العازلة. وبعد وضع الصفيحة العازلة تبقى قيمة الحقل في المنطقة الخالية منه ثابتة أي تبقى مساوية E_0، ولكن تنخفض ضمن المادة العازلة لتصبح $E = E_0/\varepsilon_r$، فيكون فرق الكمون بين لبوسي المكثفة هو تكامل الحقل الكهربائي بالنسبة للمسافة على أقسام المكثفة الثلاث، القسمين الخاليين والقسم المملوء بالمادة العازلة:



الشكل (6-28):
عازل على سعة مكثفة.

$$U' = \int E \cdot d\ell = \int_0^{d-a} E_0 d\ell + \int_0^{a} E \cdot d\ell$$

$$\Rightarrow U' = E_0(d-a) + \frac{E_0}{\varepsilon_r} a = E_0 \left[d - a + \frac{a}{\varepsilon_r} \right]$$

لكن $E_0 = \sigma / \varepsilon_0$ وبالتالي يكون:

$$U' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left[d - a + \frac{a}{\varepsilon_r} \right]$$

ولكن Q تبقى ثابتة حتى بعد وضع الصفيحة العازلة وتكون بالتالي السعة:

$$C = \frac{Q}{U'} = \frac{\sigma S}{U'} \Rightarrow C = \frac{S\varepsilon 0}{d - a + \frac{a}{\varepsilon_r}} \qquad (6\text{-}76)$$

نستطيع الحصول على العلاقة الأخيرة أيضاً بالطريقة التالية: تشكل المكثفة بعد وضع العازل ثلاث مكثفات موصولة على التسلسل كما هو موضح في الشكل (6-28)، C_1, C_2, C_M سعاتها، x, d-x-a, a الأبعاد بين لبوسي كل منها، تعطى السعات بالعلاقات التالية:

$$C_1 = \frac{S\varepsilon_0}{x}$$

$$C_2 = \frac{S\varepsilon_0}{d - x - a}$$

$$C_M = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon_r}{a}$$

ولتكن سعة المكثفة المكافئة C، فتكون:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{-x}{S\varepsilon_0} + \frac{d-x-a}{S\varepsilon_0} + \frac{a}{S\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$\Rightarrow C = \frac{S\varepsilon_0}{d - a + a/\varepsilon_r}$$

٦-١٣-٣- القوة بين صفيحتي مكثفة مستوية بوجود عازل

Force Between two Plates of Parallel Capacitor with isolator:

يتجاذب لبوسا المكثفة المستوية بسبب احتوائهما على شحنتين من إشارتين مختلفتين ونستخدم العبارة $F = Q.E$ لتعيين قوة التجاذب هذه، حيث تمثل Q شحنة كلٍ

من اللبوسين وتمثل E شدة الحقل الكهربائي على كلٍ من اللبوسين. وحيث يمكن اعتبار كلٍ من اللبوسين بأنه مماثل لحالة مستوٍ لانهائي مشحون (درسنا هذه الحالة في الفصل السابق)، وذلك بسبب انتظام توزع الشحن على سطح كلٍ من اللبوسين وتعطى بالتالي شدة الحقل على سطح كلٍ منهما عندما يفصل بينهما الخلاء بالعلاقة:

$$E_V = \frac{\sigma_V}{2\varepsilon_0} \qquad (6\text{-}77)$$

وعندما يفصل بين لبوسي المكثفة المستوية مادة عازلة ثابتة عازليتها النسبية ε_r تصبح العلاقة (6-77) كما يلي:

$$E_M = \frac{\sigma_M}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

ومن الممكن في العلاقتين السابقتين كتابة $\sigma = \frac{Q}{S}$ حيث S سطح كلٍ من اللبوسين فتصبح هاتان العلاقتان على الترتيب كما يلي:

$$E_V = \frac{Q_V}{2S\varepsilon_0}$$

$$E_M = \frac{Q_M}{2S\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

وباستخدام العبارة $F = Q.E$ نحصل على الشكل النهائي لعلاقة القوة التي يجذب بها كلٍ من لبوسي المكثفة المستوية الآخر، وذلك على الترتيب من أجل مكثفة مستوية يفصل الخلاء بين لبوسيها، ومكثفة مستوية تفصل مادة عازلة بين لبوسيها:

$$F_V = \frac{Q_V^2}{2S\varepsilon_0} \qquad (6\text{-}78)$$

$$F_M = \frac{Q_M^2}{2S\varepsilon_0\varepsilon_r} \qquad (6\text{-}79)$$

ومن الممكن استخدام العلاقتين $C_V = \frac{S\varepsilon_0}{d}$ و $C_M = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon_r}{d}$ لكتابة العلاقتين السابقتين من جديد كما يلي:

$$F_V = \frac{Q_V^2}{2C_V d} \qquad (6\text{-}80)$$

$$F_M = \frac{Q_M^2}{2C_M d} \qquad (6\text{-}81)$$

وبكتابة $Q_M = C_M.U_M$ ، $Q_V = C_V.U_V$ تصبح العلاقتان الأخيرتان كما يلي:

$$F_V = \frac{C_V U_V^2}{2d} \qquad (6\text{-}82)$$

$$F_M = \frac{C_M U_M^2}{2d} \qquad (6\text{-}83)$$

وبكتابة $C_V = \frac{S\varepsilon_0}{d}$ و $C_M = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon_r}{d}$ تصبح العلاقتان الأخيرتان أخيراً كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} F_V &= \frac{1}{2} S \varepsilon_0 \frac{U_V^2}{d^2} \\ F_M &= \frac{1}{2} S \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{U_M^2}{d^2} \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}84)$$

٦-١٤- صلادة العازل الكهربائي *Dielectric Rigidity*:

نعرف صلادة العازل الكهربائي أو ما يسمى بفرق الكمون الانفجاري Explosive Potential بأنها فرق الكمون اللازم لحدوث شرارة كهربائية Spark بين لبوسي مكثفة مستوية من خلال سماكة قدرها 1cm من هذا العازل.

إذا فرضنا أن الهواء هو الفاصل بين اللبوسين، فإن فرق الكمون الانفجاري بتابعية البعد بين اللبوسين، تحت الضغط الجوي النظامي يعطى بالعلاقة:

$$U = 2000 + 3\times10^6 d \qquad (6\text{-}85)$$

حيث تقاس U بالفولت وتقاس d بالمتر، وتختلف قيمة فرق الكمون الانفجاري من عازل كهربائي لآخر فهي للهواء مثلاً تحت الضغط الجوي النظامي $0{,}32\times10^5\ V$ بينما للكوارتز $6\times10^5\ V$، وتزداد هذه القيمة بشكل حساس جداً مع ارتفاع الضغط حيث تبلغ مثلاً $1\times10^5\ V$ للهواء تحت ضغط مساوٍ لـ 10 ضغط جوي.

إن وضع عازل كهربائي بين لبوسي مكثفة لا يزيد من سعتها فحسب بل يزيد من قيمة فرق الكمون الانفجاري، وهذا ما يوسع مجال استخدامها، كما أن وجود

العازل بين لبوسي مكثفة مهما كان نوعها يمكن من المحافظة على المسافة الصغيرة عادة بين لبوسيها، ويمنع حصول التماس بين اللبوسين ويحافظ على شكليهما حيث يمنع تشوههما عند تعرضهما لضغط ما بسبب أو بآخر.

هنالك بعض أنواع المكثفات المتغيرة السعة والتي تعمل على المبدأ التالي، إما تغيير السطوح المتقابلة للمكثفة أو لجملة المكثفات كما في الفقرة (٦-٥) من هذا الفصل، أو تغيير المسافة بين اللبوسين، وتتغير سعة المكثفة في كلتا الحالتين، وذلك حسب العلاقة $C=\frac{S\varepsilon_0}{d}$. ولكن عند العمل وفق مبدأ تغيير المسافة فيجب الانتباه إلى عدم إنقاص قيمة d عن القيمة التي توافق فرق الكمون الانفجاري، والتي يمكن حسابها من العلاقة (74-6) بتعويض قيمة فرق الكمون الانفجاري. إذن فرق الكمون الانفجاري يقيد بقيمة حدية عظمى التزايد في سعة مكثفة عن طريق إنقاص المسافة بين لبوسيها.

٦-١٥ - استخدام المكثفات *Usage of Capacitors:*

تدخل المكثفات في تركيب معظم الأجهزة الإلكترونية، حيث أنها تقوم بتخزين الشحنات الكهربائية، وبمعنى آخر تقوم بتخزين الطاقة الكهربائية الساكنة التي تعتبر طاقة كامنة تبقى مرافقة للمكثفة ما لم يحصل تفريغ لها، فهي تستخدم كمرشحات في الدارات الإلكترونية، وتستخدم لتوليد الحقول الكهربائية الساكنة التي تمكننا من التحكم بحركة الشحنات الكهربائية، كالتحكم في حزمة الإلكترونات في أنبوب شاشة التلفزيون، كما أنها تستخدم على نطاق واسع في المسرعات وهي تعتبر العنصر الأساسي في بنائها، وباستخدامها يمكن تسريع نوعي الشحنات السالبة والموجبة.

وتستخدم المكثفات أيضاً في دارات التحكم في توجيه لواقط السخانات الشمسية، وفي جميع دارات الراديو والتلفزيون والفيديو والكومبيوتر وغير ذلك الكثير،

وحتى أنه يمكن القول أنه لا يخلو جهاز إلكتروني أو كهربائي منـــها، وتســـتخدم في صناعتها تقنيات مختلفة وحديثة جداً.

يكتب على السطح الخارجي للمكثفة مقداران يميزانها الأول هو فرق الكمون الأعظمي الذي يمكن أن تتحمله، وهو فرق الكمون الذي يمكن تطبيقه على لبوسيها بشكل مستمر دون أن تحدث شرارة بينهما تؤدي إلى تخريب المكثفة والعازل الـــذي بين لبوسيها إن كان موجوداً، والثاني هو سعة المكثفة معبراً عنها بإحدى واحـــدات السعة المستخدمة.

مسائل محلولة:

مسألة (1):

أوجد السعة الكهربائية مقدرة بالبيكو فاراد لناقل كروي نصف قطره 18cm.

الحل: لحساب السعة نطبق قانون السعة:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

بالتعويض عن قيمة $R=18\ cm = 0.18\ m$ نجد:

$$C = \frac{1}{9\times10^{9}}.o.18 = 2\times10^{-11}F = 2\times10^{-11}(10^{12}pF) = 20pF$$

مسألة (2):

يحمل ناقل كروي نصف قطره 10cm شحنة مقـــدارها $Q=+33\times10^{-7}Coul$. ومحاط بناقل آخر كروي نصف قطره 10.1cm متمركز معه وموصـــول بـــالأرض، والمطلوب:

١. إيجاد السعة الكهربائية للناقلين الكرويين الـــداخلي والخـــارجي، أي اللبوســـين الداخلي والخارجي للمكثفة المكونة من الناقلين.

٢. إيجاد سعة المكثفة المشكلة من الناقلين الكرويين الداخلي والخارجي السابقين. وماذا تستنتج من مقارنة سعة المكثفة مع سعة كل من الناقلين الكرويين؟

الحل:

١. تعطى السعة الكهربائية للناقل الكروي بالعلاقة:

$$C = 4\pi \varepsilon_0 R$$

بالتعويض عن قيم نصفي قطري الناقلين الكرويين بعد التحويل إلى واحدة المتر نجد أن سعتي الناقلين تحسبان على النحو:

$$C_1 = \frac{1}{9\times10^9}.o.1 = 1.11\times10^{-11}\,F$$

$$C = \frac{1}{9\times10^9}.o.101 = 1.12\times10^{-11}\,F$$

٢. تعطى سعة المكثفة الكروية بالعلاقة:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

بالتعويض عن قيم نصفي قطري الناقلين المعطيين نجد:

$$C = \frac{1}{9\times10^9}.\frac{0.1\times0.101}{0.101-0.1} = 1.111\times10^{-9}\,F$$

نستنتج من مقارنة قيمة سعة المكثفة مع قيمتي سعتي كل من الناقلين الكرويين أن سعة المكثفة أكبر من سعة كل من لبوسيها وهي دوماً أكبر من مجموعهما أيضاً.

مسألة (3):

لدينا مكثفة مستوية سطح كل من لبوسيها S، يفصل بينهما صفيحتان من مادتين عازلتين سماكتاهما d_1, d_2 وثابتتا العزل الكهربائي النسبيتان لهما $\varepsilon_{r,1}$, $\varepsilon_{r,2}$، والمطلوب حساب سعة هذه المكثفة.

الحل:

يمكن اعتبار هذه المكثفة على أنها مكثفتين موصولتين على التسلسل، سعتاهما:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_{r,1}.S}{d_1}$$

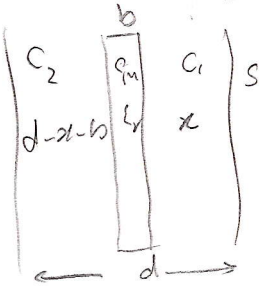
$$C_2 = \frac{\varepsilon_{r,2}.S}{d_2}$$

ونحسب سعة المكثفة الحاصلة من مجموعهما على التسلسل بتطبيق العلاقة:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1.C_2}{C_1 + C_2}$$

وبالتعويض من معطيات المسألة نجد سعة المكثفة المطلوبة:

$$C = \frac{\frac{\varepsilon_{r,1}.S}{d_1} \cdot \frac{\varepsilon_{r,2}.S}{d_2}}{\frac{\varepsilon_{r,1}.S}{d_1} + \frac{\varepsilon_{r,2}.S}{d_2}} = \frac{\varepsilon_{r,1}\varepsilon_{r,2}S}{\varepsilon_{r,1}d_2 + \varepsilon_{r,2}d_1}$$



أسئلة ومسائل غير محلولة

الأسئلة:

١. ماذا يعني التكثيف الكهربائي؟ وما هي الطريقة أو الطرق لإنجاز ذلك؟

٢. هل تتساوى شحنتي ناقلين كرويين مختلفين عندما يتساوى كموناهما؟ علل ذلك؟

٣. ماذا يحصل لسعة ناقل عند تقريب ناقل آخر منه؟ اشرح آلية ذلك؟

٤. يتم شحن المكثفة الكروية بوصل لبوسها الداخلي بأحد مأخذي مولد كهربائي للتيار المستمر (direct Current) D.C، وموصول مأخذُه الآخر بالأرض أو باللبوس الآخر للمكثفة. فهل يمكن شحن هذه المكثفة بوصل لبوسها الخارجي بأحد مأخذي مولد التيار المستمر، وبحيث يكون مأخذه الآخر موصول بالأرض؟

٥. ماذا يحصل عند تقريب لبوسي مكثفة مشحونة أحدهما من الآخر؟ وهل يحصل ذلك قُبيل التلامس أم بُعيده؟ ناقش ذلك.

٦. من المعلوم أن الشحنات الكهربائية الساكنة تتوضع قرب السطح على عمق من مرتبة المكرومتر في النواقل، فكيف يتغير هذا العمق بالنسبة لمكثفة مشحونة عند زيادة شحنتها برفع فرق كمون المولد المستمر الموصول إليها، أو بتقريب لبوسيها أحدهما من الآخر، ناقش ذلك.

٧. علل توزع ثنائيات الأقطاب الكهربائية بشكل عشوائي في المواد العازلة في الحالة الطبيعية؟

٨. كيف يتم انشحان المواد العازلة؟

٩. هل تحدث ظاهرة الانشحان بالتوجه الاستقطابي لدى النواقل أيضاً؟

١٠. هل يمكن التمييز بين الانشحان بالتوجه الاستقطابي للذرات والانشحان بالتوجه الاستقطابي للجزيئات؟

١١. كيف يمكن تعليل تناقص القوى الكهربائية بين الشحنات الكهربائية في الأوساط العازلة؟

١٢. لماذا تعتبر قيمة ثابتة العازلية النسبية للنواقل لا نهائية؟

١٣. تتجه القوة الكهربائية في منطقة السطح الفاصل بين وسطين عازلين دوماً من الوسط ذي ثابتة العازلية النسبية الأعلى إلى الوسط ذي ثابتة العازلية النسبية الأقل وتحافظ على هذا الاتجاه حتى عند عكس اتجاه الحقل الكهربائي الخارجي المؤثر، فكيف يمكن تعليل ذلك؟

١٤. عند إحاطة جسم بوسط ذي عازلية نسبية أكبر من ثابتة العازلية النسبية لهذا الجسم، فإن هذا الجسم يعاني عند تطبيق حقل كهربائي خارجي ضغطاً متساوياً وعمودياً على سطحه من كافة الاتجاهات، فكيف يمكن تعليل ذلك؟

١٥. علل تناقص الاستقطاب والتوجه الاستقطابي في العوازل بارتفاع درجة حرارتها؟

المسائل:

مسألة (1):

شحنت مكثفة يفصل بين لبوسيها الهواء بوصل لبوسيها هذين بقطبي مولد مستمر، فكانت شحنة كل من اللبوسين 200 μCoul، وضعت هذه المكثفة وهي ما تزال موصولة إلى المولد في الزيت فزادت شحنتها بمقدار 300 μCoul، والمطلوب حساب ثابتة العازلية النسبية للزيت.

مسألة (2):

مكثفة مستوية سعتها $6\times10^{-4}F$ والمطلوب:

١. كم تصبح سعتها إذا وضع بين لبوسيها صفيحة نحاسية بحيث تكون متساوية البعد عنهما، وموازية لهما وتساويهما بالمساحة مع العلم أن ثخنها يساوي ربع البعد بينهما.

٢. هل تتغير السعة إذا تغير موضع الصفيحة.

٣. إذا استبدلت هذه الصفيحة النحاسية بعازل يملأ كامل الفراغ بين اللبوسين بحيث لا تتغير السعة، فاحسب ثابتي العزل النسبي والمطلق لهذه المادة.

٤. إذا استبدلت هذه الصفيحة النحاسية بأخرى عازلة ثابت عازليتها النسبي $\varepsilon_r = 3$، فكم تصبح سعة هذه المكثفة.

مسألة (3):

مكثفة مستوية تبلغ مساحة كل من لبوسيها $1\times10^{-2}m^2$ ومشحونة بحيث تكون شحنة كل من لبوسيها $Q=10^{-7}Coul$. وبعد وضع العازل بين لبوسيها بلغت شدة الحقل الكهربائي بينهما $E=3.3\times10^5$ V/m، والمطلوب:

١. حساب ثابتة العازلية النسبية للمادة العازلة.

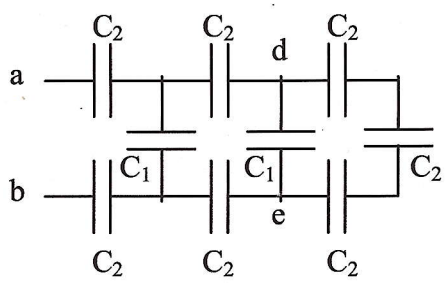
٢. ما هي الشحنة الكلية المتحرضة على أحد وجهي العازل.

مسألة (4):

١. احسب السعة المكافئة للشبكة الكهربائية، الشكل (6-29)، الواقعة بين النقطتين a, b، وذلك بفرض أن $C_2 = 2\ \mu F, C_1 = 3\ \mu F$.

٢. احسب الشحنة على كل من المكثفتين المجاورتين للنقطتين a, b، وذلك بفرض أننا وصلنا إلى النقطتين a, b كموناً مستمراً قيمته $U_{ab} = 900V$.

٣. احسب في هذه الحالة فرق الكمون بين النقطتين d, e.

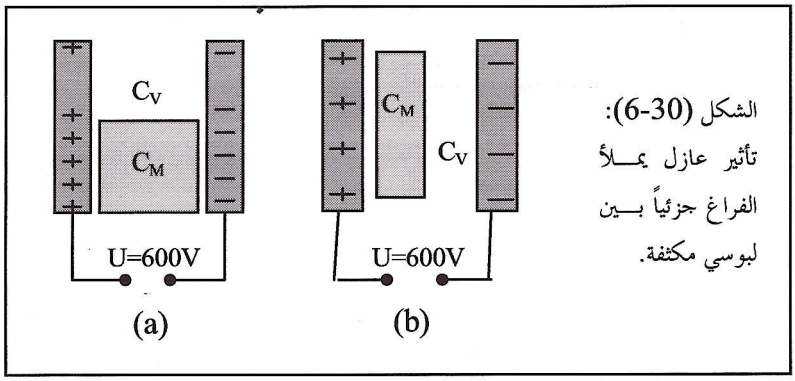


الشكل (6-29): السعة المكافئة لمجموعة من المكثفات.

مسألة (5):

شحنت مكثفة بواسطة منبع كمون مستمر DC قيمته 600V، والبعد بين لبوسيها $d=4\times10^{-4}m$، وسطحها $S=1\times10^{-2}m^2$. يملأ نصف الفراغ بين لبوسي هذه المكثفة بعازل ثابتة عازليته النسبية $\varepsilon_r=7$ ونضع هذا العازل بالطريقتين الموضحتين في الشكلين (6-30, a,b). والمطلوب:

آ. نضع العازل أولاً ثم نصل المكثفة بالمولد ونبقي عليها موصولة، والمطلوب حساب ما يلي: $Q_M, Q_V, D_M, D_V, U_M, U_V, E_M, E_V, C$ وذلك من أجل الحالتين في الشكلين (6-30, a,b).



الشكل (6-30): تأثير عازل يملأ الفراغ جزئياً بين لبوسي مكثفة.

ب. نشحن المكثفة أولاً ثم نفصلها عن المولد ثم نضع العازل، والمطلوب حساب ما يلي: $Q_M, Q_V, D_M, D_V, U_M, U_V, E_M, E_V, C$ وذلك من أجل الحالتين في الشكلين (6-30, a,b) أيضاً.

مسألة (6):

لدينا كرة معدنية نصف قطرها $R=18cm$ شحنت بشحنة موجبة تحت فرق كمون مستمر، ثم عزلت عن المولد وتركت في الخلاء فتوزعت الشحنة على سطحها بكثافة منتظمة، والمطلوب:

١. إذا كانت شدة الحقل الكهربائي في جوارها المباشر $E=10^6V/m$ احسب شحنتها Q والكثافة الكهربائية على سطحها σ وسعتها C وكمونها V.

٢. نعيد اتصال الكرة بالمولد السابق، ونملأ الفراغ حولها بمادة عازلة، ثابتة العازلية النسبية لها $\varepsilon_r = 5$، احسب سعة الكرة الجديدة وشحنتها والحقل الكهربائي في جوارها المباشر.

٣. نفرض أن الخلاء أو الهواء يحيط بالكرة السابقة، نشحنها تحت فرق في الكمون مقداره $U=10^4V$، ثم نعزلها عن المولد ونصلها بواسطة سلك سعته مهملة إلى كرة ثانية غير مشحونة نصف قطرها $R=9cm$. احسب الكمون المشترك لهاتين الكرتين وشحنة كلٍ منهما والكثافة السطحية لهما بعد الوصل.

ملاحظة: تعطى ثابتة العزل الكهربائي للخلاء في الجملة الدولية بالعلاقة:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9}$$

مسألة (7):

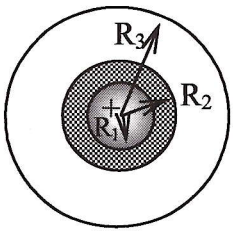
لدينا مكثفة مستوية سطح كلٍ من لبوسيها $100cm^2$، مشحونة بشحنة مقدارها $q=10^{-6}Coul$ ، نملأ الفراغ بين اللبوسين بمادة عازلة، فإذا كانت شدة الحقل الكهربائي في هذه المادة $E=3\times10^6V/m$ فاحسب:

١. ثابتة العازلية النسبية للمادة العازلة.

٢. الشحنة الظاهرية على كلٍ من وجهي العازل.

مسألة (8):

كرة معدنية نصف قطرها $R_1=2cm$ تحمل شحنة كهربائية موجبة مقدارها $q = 90\ e.s.u$ كما في الشكل (31-6)، حيث e.s.u هي رمز الوحدة الأساسية في الجملة السغثية. نحيط هذه الكرة بسطح كروي معدني موصول بالأرض، ويتحد مع الكرة السابقة بالمركز، نصف قطره $R_3 = 6cm$ ، نضع بين الكرة والسطح الكروي طبقة كروية من البورسلان العازل $\varepsilon_r = 6$ تلتصق تماماً بسطح الكرة المعدنية الداخلية التي نصف قطرها الخارجي $R_2 = 4cm$. والمطلوب:



الشكل (31-6):
تأثير عازل يملأ الفراغ جزئياً بين لبوسي مكثفة.

إذا علمت أن المرّكبة الناظمية للحقل تعاني تناقصاً بمقدار $\Delta E = \sigma'/\varepsilon_0$ من خلال طبقة البورسلان، أوجد الكثافة السطحية للشحنات الظاهرية على سطحي طبقة البورسلان، ثم أوجد كمون الكرة الداخلية.

الفصل السابع

التيار الكهربائي والدارات الكهربائية

Electric Current and Circuits

٧-١ - حاملات التيار الكهربائي *Carriers electric current:*

تعرفنا في الفصول السابقة على بعض خواص الشحنات الكهربائية الساكنة الموجودة في حالة توازن كهراكدي، وعلى الحقول الكهربائية الساكنة المتولدة عن هذه الشحنات التي تنقل التأثيرات المتبادلة بينها. ندرس في هذا الفصل والفصل العاشر ما يحدث عندما تتحرك الشحنات بحركة انسحابية أو اهتزازية. ندخل من أجل ذلك مجموعة من المفاهيم الجديدة مثل كثافة وشدة التيار الكهربائي، المقاومة الكهربائية، القوة المحركة الكهربائية، الاستطاعة وغيرها.

بنيت الكهرباء الساكنة والمتحركة بدايةً على أساس الشحنات الموجبة، فقد افترض العالم بنيامين فرانكلين، الذي كان أول من أشار إلى التيار الكهربائي وحركة الشحنات، بأن التيار الكهربائي عبارة عن حركة الشحنات الموجبة.

لقد استغرق إثبات خطأ اختيار فرانكلين قرابة قرن من الزمن، فنحن نعرف الآن أن الإلكترونات وهي شحنات سالبة هي التي تسري في الأسلاك على الرغم من صعوبة إثبات ذلك بطريقة مباشرة، وعملياً يكون سريان الشحنات السالبة في أحد الاتجاهات مكافئاً لسريان شحنات موجبة في الاتجاه المعاكس، كالثقوب الموجبة في أنصاف النواقل والعوازل، وهذا ليس بسبب مهم لإعادة النظر في الدراسات والتعريفات القائمة على أساس أن التيار هو حركة الشحنات الموجبة. فما هو التيار الكهربائي وما هو الحامل له؟

نعرف التيار الكهربائي بأنه انتقال مجموعة من الشحنات الكهربائية القابلة للحركة ضمن ناقلٍ أو مادة ما، وتتحرك الشحنات الكهربائية في ناقل تحت تأثير قوى مختلفة ذات طبيعة مختلفة مثل القوى الكهربائية الناتجة عن شحنات كهربائية أخرى،

والقوى المغناطيسية، والقوى الميكانيكية والقوى الكيماوية؟ ولكن ما هو نوع الشحنات التي تسري في المواد الناقلة والعازلة المختلفة، علماً أنه يوجد في المادة المعتدلة كهربائياً عدد متساوٍ من الشحنات السالبة والموجبة.

يتميز قسم كبير من المواد في الطبيعة باحتوائه على عدد كبير من **الإلكترونات** يتناسب مع عدد الذرات في واحدة الحجم من جهة، ومن جهة أخرى يتميز بحرية حركة الإلكترونات ضمن هذه المواد، وبالتالي بإمكانية انتقال التيار الكهربائي فيها، من هذه المواد النواقل Conductors والغازات المتشردة. إلا أن هذا التيار الكهربائي الناتج عن حركة الإلكترونات يكون ضعيفاً في قسم آخر من المواد الطبيعية أو الصنعية هو أنصاف النواقل Semiconductor الطبيعية، والمشابة (المطعمة) يترافق مع تيار ناتج عن حركة عدد قليل من **الثقوب** الذي يتمتع بحرية الحركة فيها. يمكن أن يكون التيار معدوماً تقريباً في قسم ثالث من المواد الطبيعية والصنعية أيضاً، وذلك بسبب العدد القليل جداً من الإلكترونات والثقوب التي تتمتع بحرية الحركة فيها، وهو ما ندعوه بالعوازل dielectrics.

إضافة للإلكترونات والثقوب التي تعتبر من أهم الشحنات الكهربائية الحاملة (الناقلة) للتيار يوجد أنواع أخرى أيضاً هي **الشوارد الموجبة** التي يمكن أن يساوي عددها تقريباً عدد الإلكترونات في الغازات المتشردة ومن الممكن أن نجدها أيضاً في المحاليل الكهربائية أو الإلكتروليتية Electrolyts solution، **والشوارد السالبة**، التي عددها عملياً يساوي عدد الشوارد الموجبة في المحاليل الكهربائية أو الإلكتروليتية، بينما تكون نادرة جداً في الغازات المتشردة. نشير إلى أن وجود سائل أو بخار على سطح عازل يؤدي إلى تشكل أزواج من الشوارد الموجبة والسالبة نتيجة الانشحان بالتماس وتكون قادرة على نقل التيار الكهربائي وإن كان بشكل رديء. ونشير أيضاً إلى أن شحنة الشوارد يمكن أن تساوي شحنة الإلكترون بقيمتها الجبرية، أو المطلقة، أو عدداً ما منها.

٧-٢- نشوء التيار الكهربائي

:Development of the Electric Current

تتحرك الإلكترونات ضمن ناقل غير مشحون، عند وضعه في حقل كهربائي لشحنة ما، بعكس اتجاه هذا الحقل ولفترة قصيرة جداً حوالي جزء صغير من الثانية، وذلك تحت فعل آلية الانشحان بالتأثير، لذلك نسمي التيار الناتج عن هذه الحركة بالتيار قصير الأمد Transient current، ينشأ هذا التيار فوراً عند وضع الناقل ضمن الحقل الكهربائي، ولا يتوقف إلا عندما يستقطب الناقل بالكامل، أي تتجمع الشحنات السالبة في جهة ما من الناقل و الموجبة في الجهة الأخرى منه وتصبح محصلة الحقول الكهربائية ضمن الناقل معدومة. إذا أردنا استمرار هذا التيار أي استمرار حركة الإلكترونات ضمن الناقل فإنه يلزمنا تأمين استمرارية الحقل الكهربائي بقيم غير معدومة ضمن هذا الناقل، وإذا بقي الحقل الكهربائي في نفس الاتجاه، حتى لو تغير مقداره، فإن التيار الكهربائي يبقى في اتجاه واحد ونقول أنه تيار مستمر Direct current ونرمز له اختصاراً بالرمز DC.

أما إذا كان اتجاه الحقل الكهربائي يتغير منعكساً بشكل دوري فإن اتجاه التيار المتولد عنه ينعكس بشكل دوري أيضاً، وبالتالي تتغير حركة الشحنات هي الأخرى بانعكاس دوري أيضاً، ونسمي في هذه الحالة التيار الناشئ عن هذه الحركة الدورية التيار المتناوب Alternating current ونرمز له اختصاراً بالرمز AC.

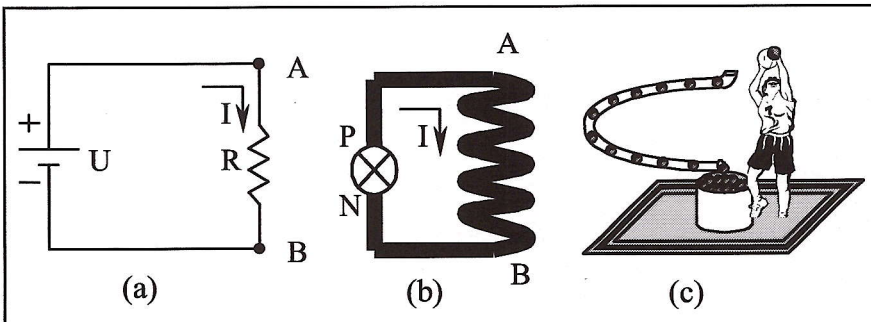
نحتاج في كلتا الحالتين السابقتين إلى دارة مغلقة لتأمين استمرار حركة التيار مع الإشارة إلى أن التيار المستمر DC لا يعبر المكثفات وإنما يشحنها وهو يمر في الدارة الكهربائية ما دام الشحن جارياً ويتوقف بعد إتمام عملية الشحن، بينما يمر التيار المتناوب في الدارة الحاوية على مكثفة بفضل عملية الانشحان المتناوبة بين اللبوسين المتقابلين وهذا التيار بالتالي لا يعمل على شحن المكثفة.

٧-٣- منابع التيار الكهربائي

Sources of the Electric Current:

يتأمن الحقل الكهربائي المستمر باستخدام منبعاً للطاقة Power supply كما في الشكل (7-1,a) له قطبين أو مأخذين سالب وموجب يملك قوة محركة كهربائية وينتج فرق في الكمون يطبق بين طرفي ناقل ما يؤدي إلى تحريك حاملات الشحنات فيه وتسمى حركة هذه الشحنات بالتيار الكهربائي.

يمكن تشبيه عمل مولد التيار بعمل مضخة مائية ضمن أنابيب مغلقة تدفع الماء من أحد طرفيه وتمتصه من الطرف الآخر كما في الشكل (7-1,b) وبحيث يكون كل من المضخة والأنابيب مملوءاً تماماً بالماء، وبناءً على ذلك، فإذا دفعت المضخة قليلاً من الماء في الأنبوبة عند النقطة P فإن كمية مساوية لها يجب أن تسري في الأنبوب لتعود إلى المضخة عند النقطة N، أي أن كميات متساوية من الماء يجب أن تسري عبر جميع المقاطع في الدارة المائية في واحدة الزمن.



الشكل (7-1):
منبع للتيار الكهربائي، يمكن تشبيهه بمضخة أو لاعب يرفع الكرات من مستوى أدنى إلى آخر أعلى.

كما يمكن تمثيل عمل المولد الكهربائي بلاعب يرفع الكرات من الوعاء الموجود عند قدميه ويسقطها في فوهة الأنبوب العلوية لتتدحرج داخله حتى تخرج من فوهته السفلية، وتعود إلى الوعاء من جديد كما هو مبين في الشكل (7-1,c). إذا كان اللاعب يسقط الكرات في الأنبوب بمعدل ثابت خلال الزمن، وكان عدد الكرات

كافياً لشغل الوعاء والأنبوب واللاعب فإن جملة الأنبوب واللاعب والوعاء تمثل دارة مغلقة تمر فيها الكرات بمعدل ثابت.

يجذب المولد الإلكترونات الحرة عبر قطبه الموجب، وينقلها داخله من قطبه الموجب إلى قطبه السالب وذلك بتطبيق قوى معاكسة في الاتجاه لقوى كولون (التي تتصف بالتجاذب بين الشحنات الموجبة والسالبة وبالتنافر بين الشحنات المتماثلة)، ثم يدفع القطب السالب الإلكترونات في سلك الدارة المغلقة. يسمى فرق الكمون الكلي المسبب لهذه الحركة، بمراحلها المختلفة، بفرق الكمون الأساسي أو التوتر الأساسي أو القوة المحركة للمولد ويرمز له بالرمز U_E، ويرمز لفرق الكمون الذي يمكن الحصول عليه من قطبي المولد لوضعه تحت تصرف الجهاز الخارجي المستهلك للطاقة (الراديو أو مقاومة ما) بالرمز U_k أو ببساطة U فقط، كما يرمز للكمون الضائع داخل المولد بسبب العمليات المعقدة على نقل الإلكترونات داخله من قطبه الموجب إلى قطبه السالب بالرمز U_i ونستطيع تلخيص ما سبق بالعلاقة:

$$U_E = U_k + U_i \qquad (7\text{-}1)$$

يصرف المولد الكهربائي طاقة على فصل الشحنات المتعاكسة داخله، أي نقل السالبة من قطبه الموجب إلى قطبه السالب ونقل الموجبة من قطبه السالب إلى قطبه الموجب يستقيها عادةً من مصادر طاقة غير كهربائية. يمكن أن تكون هذه المصادر ذات طبيعة ميكانيكية كما هو الحال في عملية التكهرب بالدلك، أو من محركات ذات احتراق داخلي، أو ذات طبيعة كيميائية كما هو الحال في المدخرات، أو مصادر طاقة حرارية أو اشعاعية كما هو الحال في الخلايا الشمسية. يتم في مولدات التيار الكهربائي بصورة عامة تحويل الطاقة بأشكالها المختلفة إلى طاقة كهربائية، ونستطيع هنا أن نعبر عن القوى غير الكهربائية أساساً والمطبقة ضد قوى كولون من خلال متجهة شدة الحقل الكهربائي والتي يرمز لها هنا بالرمز $\vec{E}_E$. حيث تؤدي هذه القوى إلى فصل الشحنات الكهربائية داخل المولد الذي يكون ضمنه اتجاه التيار من القطب السالب إلى القطب الموجب، ويعطى فرق الكمون الأساسي أو الكلي للمولد بالعلاقة التكاملية التالية:

$$U_E = \int \vec{E}_E \cdot d\vec{r} \qquad (7\text{-}2)$$

ويتجه فرق الكمون الأساسي U_E داخل المولد من القطب السالب إلى الموجب.

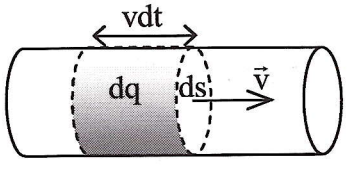
٧ – ٤ – كثافة التيار الكهربائي

:Density of the Electric Current

نتعرف بدايةً على مفهوم كثافة التيار الكهربائي من أجل الحالة البسيطة التي نفرض فيها أن لجميع الشحنات الحرة (حاملات التيار) المتحركة في وسط ما السرعة نفسها، وأنها من النوع نفسه. نعرّف كثافة التيار الكهربائي بأنها الشحنة الكهربائية الكلية التي تعبر واحدة السطح المتوضعة بشكل متعامد مع سرعة الشحنات خلال واحدة الزمن.

بفرض أن q قيمة الشحنة الكهربائية المتحركة الفردية، و N عدد الشحنات في واحدة الحجم (التركيز) في هذا الوسط، وأن $\vec{v}$ سرعة كلٍ منها. تكون الشحنات الكهربائية التي تجتاز سطحاً عنصرياً ds متعامداً مع السرعة $\vec{v}$ في الوسط المذكور بين اللحظتين t ; t + dt محتواة في الاسطوانة التي سطح مقطعها ds وطولها v dt وحجمها v ds dt كما هو مبين في الشكل (7-2)، وبالتالي يكون عددها ضمن هذه الاسطوانة N v dt ds وتكون قيمة الشحنة ضمن هذه الاسطوانة dq = N q v ds dt وحسب التعريف تعطى كثافة التيار في هذه الحالة بالعلاقة التالية:

$$\vec{j} = N \cdot q \cdot \vec{v} \qquad (7\text{-}3)$$

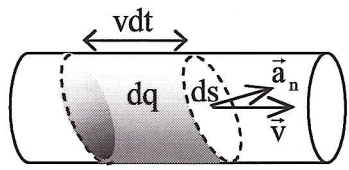


الشكل (7-2):
اسطوانة في وسط ما، سطح مقطعها ds متعامد مع السرعة وطولها v dt وحجمها v ds dt.

أما في الحالة التي تكون فيها $\vec{v}$ غير عمودية على السطح ds وإنما تصنع مع ناظمه $\vec{a}_n$ زاوية مقدارها θ، فإن قيمة الشحنة التي تجتاز السطح ds خلال الزمن dt تحسب بالطريقة السابقة نفسها، ولكن بعد الأخذ بالاعتبار أن حجم الاسطوانة هنا

هو $v.dt.ds.\cos\theta$ فتكون الشحنة الكهربائية المتوضعة ضمن الاسطوانة الموضحة في الشكل (7-3) هي:

$$dq = N\,q\,v\,dt\,ds\,.\cos\theta \qquad (7\text{-}4)$$



الشكل (7-3):
اسطوانة في وسط ما، سطح مقطعها ds غير متعامد مع السرعة وطولها $v\,dt$ وحجمها $v\,ds\,dt$.

وبتعويض الجداء $N\,q\,v$ من العلاقة (7-3) في العلاقة (7-4) ينتج:

$$dq = j\,dt\,ds\,.\cos\theta \qquad (7\text{-}5)$$

وبالاستفادة من الجداء السلمي لمتجهين بعد الأخذ بالاعتبار أن $|\vec{a}_n| = 1$:

$$\vec{j}.\vec{a}_n = j.\cos\theta$$

$$dq = \vec{j}\cdot\vec{a}_n\,dt\cdot ds \qquad (7\text{-}6)$$

نفرض الآن أن الشحنات الكهربائية من أنواعٍ مختلفة وأن لجميع الشحنات ذات النوع الواحد السرعة نفسها. بفرض أنه لدينا $q_1, q_2, \ldots, q_n$ نوع من الشحنات الكهربائية وأن عدد كلٍ منها في واحدة الحجم هو $N_1, N_2, \ldots, N_n$ على الترتيب وأن سرعة كل نوع هي $v_1, v_2, \ldots, v_n$ على الترتيب أيضاً، فإن الشحنة الكهربائية من النوع i التي تجتاز السطح العنصري ds خلال الزمن dt هي:

$$dq_i = N_i q_i \vec{v}_i\cdot\vec{a}_n\cdot dt\cdot ds \qquad (7\text{-}7)$$

وتكون الشحنة الكهربائية الكلية:

$$dq = \sum_{i=1}^{n} dq_i = \sum_{i=1}^{n} (N_i q_i \vec{v}_i).\vec{a}_n\cdot dt\cdot ds \qquad (7\text{-}8)$$

نعمم العلاقة (7-3) لكثافة التيار بحيث تصبح:

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^{n} N_i\,q_i\,\vec{v}_i \qquad (7\text{-}9)$$

نبدل هذا التعميم في العلاقة (7-8) فتصبح:

$$dq = \vec{j}\cdot\vec{a}_n\cdot dt\cdot ds \qquad (7\text{-}10)$$

في الحالة العامة حتى شحنات النوع الواحد لا تملك نفس السرعة، لذلك بفرض أن N_i عدد الشحنات الكهربائية من النوع i في واحدة الحجم بحيث أن الأعداد $N_i(k);\ k=1,2,\ldots$ منها تملك السرع $\vec{v}_i(k);k=1,2,\ldots.$ وهكذا يكون لدينا:

$$N_i(1)+N_i(2)+\ldots+N_i(k)\ldots=\sum_K N_i(k)=N_i \qquad (7\text{-}11)$$

لنعمم مرة ثانية عبارة كثافة التيار (7-9) بالشكل الآتي:

$$\vec{j}=\sum_i q_i \sum_K N_i(k)\vec{v}_i(k) \qquad (7\text{-}12)$$

نعرف السرعة الوسطى للشحنات الكهربائية من النوع i بأنها المتوسط الحسابي لسرعاتها ونكتب:

$$\langle \vec{v}_{ik} \rangle = \frac{\sum_k N_i(k)\vec{v}_i(k)}{\sum_k N_i(k)} \qquad (7\text{-}13)$$

بتعويض العلاقة (7-11) في العلاقة (7-13) نحصل على ما يلي:

$$\langle \vec{v}_{ik} \rangle = \frac{\sum_k N_i(k)\vec{v}_i(k)}{N_i} \qquad (7\text{-}14)$$

استناداً إلى هذا التعريف نستطيع كتابة العلاقة (7-12) كما يلي:

$$\vec{j}=\sum_i N_i q_i \langle \vec{v}_{ik} \rangle \qquad (7\text{-}15)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{j}=\sum_i \rho_i \langle \vec{v}_{ik} \rangle \qquad (7\text{-}16)$$

حيث كثافة الشحنات هي:

$$\rho_i = N_i . q_i \qquad (7\text{-}17)$$

٧-٥- شدة التيار الكهربائي *Electric Current Intensity:*

في الشكلين (7-2) , (7-3) تتحرك الشحنات الموجبة مع اتجاه الحقل الكهربائي والشحنات السالبة عكسه. يشير التيار الكهربائي على حركة الشحنات الكهربائية السالبة في النواقل أو حركة الشحنات الكهربائية الموجبة والسالبة في أنصاف النواقل على سبيل المثال، ومن الأهمية بمكان تعريف شدة التيار الكهربائي كمقدار فيزيائي عددي يميز حركة الشحنات ونرمز لها بالرمز I ونعرفها كما يلي:

شدة التيار الكهربائي المار في ناقل هي كمية الشحنة الكهربائية التي تَعبُر مقطع هذا الناقل خلال واحدة الزمن، ونعبر عنها رياضياً بالعلاقة التالية:

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad (7\text{-}18)$$

تمثل dQ هنا كمية الكهرباء التي تعبر الناقل خلال الزمن dt.

نحول العلاقة السابقة إلى العلاقة التكاملية التالية:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I \cdot dt \qquad (7\text{-}19)$$

وتعني العلاقة الأخيرة أن تكامل شدة التيار بالنسبة للزمن يعطي الشحنة الكهربائية الكلية التي عبرت مقطع الناقل خلال الفترة الزمنية التي تمثل الفرق بين حدي التكامل. ويسمى التكامل $\int Idt$ دفع التيار الكهربائي وهو مشابه لدفع القوة في الميكانيك والذي يعطى بالتكامل $\int F \cdot dt$.

من أجل إيجاد علاقة بين شدة التيار الكهربائي I ونوعية الشحنات الكهربائية وسرعتها، نعتبر المادة أو الوسط في الحالة العامة يحوي أنواعاً مختلفة من حاملات الشحنة فتكون الشحنة الكلية التي تعبر المقطع S خلال الزمن dt معطاة بحسب العلاقة (7-10) على النحو التالي:

$$dq = dt \int_S \vec{j} \cdot \vec{a}_n \cdot\cdot ds$$

$$I = \int_S \vec{j}_n \cdot ds = S \cdot \vec{j}_n \qquad (7\text{-}20)$$

وذلك بفرض أن $\vec{j}_n = \vec{j}.\vec{a}_n$ ثابتاً على جميع نقاط S، أما إذا كانت الكثافة متعامدة مع السطح S فإنها تساوي عددياً:

$$j = \frac{I}{S} \qquad (7\text{-}21)$$

٧-٦- القوة المحركة الكهربائية *Electromotive Force:*

نرمز للقوة المحركة الكهربائية لمولد كهربائي (الكمون الأساسي U_E) بالرمز ϵ أو e ونعرفها بأنها نسبة الطاقة التي يقدمها هذا المولد إلى الشحنة الكهربائية التي تجتازه،

أي هي الطاقة الكامنة الكهربائية التي تكتسبها واحدة الشحنات (الكولون في الجملة الدولية) الموجبة. إذا رمزنا للعمل الذي يبذله مولد لنقل شحنة مقدارها dq ضمنه بالرمز dW تكون القوة المحركة الكهربائية لهذا المولد حسب التعريف هي:

$$e = \frac{dW}{dq} \qquad (7\text{-}22)$$

تقاس e في الجملة الدولية بالفولت الذي نعرفه اعتماداً على العلاقة السابقة كما يلي:

الفولت: يكون فرق الكمون بين نقطتين من دارة كهربائية مساوياً 1V عندما يتطلب نقل شحنة مقدارها 1Coul من النقطة الأولى إلى الثانية عملاً مقداره 1J.

تعطى الاستطاعة الكهربائية لمولد ينجز عمل dW خلال زمن dt بالعلاقة:

$$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow \quad dW = Pdt \qquad (7\text{-}23)$$

نبدل هذه العلاقة في العلاقة السابقة فنجد:

$$e = \frac{Pdt}{dq} = \frac{P}{dq \ / \ dt} = \frac{P}{I} \qquad (7\text{-}24)$$

$$\Rightarrow \quad P = e \cdot I \qquad (7\text{-}25)$$

تعني العلاقة (7-24) أن القوة المحركة الكهربائية لمولد تساوي نسبة الاستطاعة الكهربائية التي يقدمها هذا المولد إلى شدة التيار المار فيه.

نستنتج واحدة الاستطاعة من العلاقة (7-23) فنجد:

$$[P] = \frac{[dW]}{[dt]} = \frac{J}{sec} = W$$

نسمي الواحدة الأخيرة J/sec بالواط. من مضاعفات الواط الكيلو واط ويساوي 1kW=1000W.

٧-٧- الاستطاعة الكهربائية المصروفة في ناقل

:Losing Electrical Power in Conductor

تصرف الطاقة التي يقدمها المولد على الشحنات في الدارة الكهربائية، فبفرض أن $\vec{E}_i$ الحقل الكهربائي الموجود في مواضع الشحنات المختلفة q_i، فإن كل من هذه

الشحنات يخضع لقوة كولون $q_i\vec{E}_i$ ويقوم خلال زمن dt بانتقال مقداره $\vec{v}dt$ ويعبر عن العمل (الطاقة) المصروف على جميع الشحنات التي تركيزها N_i بالعلاقة التالية:

$$dW = \sum_i N_i q_i \vec{E}_i \vec{v}_i \cdot dt$$

وتكون الاستطاعة المصروفة:

$$P = \frac{dW}{dt} = \sum_i N_i q_i \vec{E}_i \vec{v}_i \qquad (7\text{-}26)$$

وبإدخال مفهوم كثافة التيار تحسب الاستطاعة المصروفة من التكامل على كامل حجم الناقل:

$$P = \int_V \vec{j}.\vec{E}\,.dV \qquad (7\text{-}27)$$

٧-٨- ضم مولدات التيار الكهربائي

:Connection of Electric Power Supplies

من أجل الحصول على شدة تيار أو كمون معينان بهدف تطبيقهما على حمولة (مقاومة خارجية) ما فإنه يمكن ضم المنابع الكهربائية لتعمل كمنبع واحد لهذا الغرض. تضم المنابع الكهربائية بطرق عدة تختلف باختلاف المقاومة الخارجية والمقاومات الداخلية وسندرس منها الطرق التالية:

٧-٨-١- ضم المولدات التسلسلي:

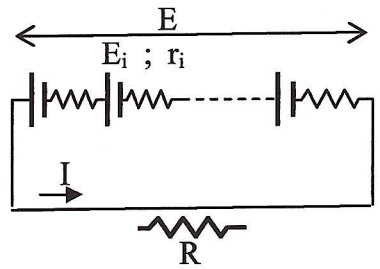
تساوي القوة المحركة المكافئة لعدة بطاريات موصولة على التسلسل مجموع فروق الكمون الأساسية لكلٍ منها، في حين يكون التيار واحداً فيها جميعاً لو قُصرت دارتها في الشكل (4-7) أي إن:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right).I = r.I \qquad (7\text{-}28)$$

حيث المقاومة المكافئة على التسلسل هي:

$$r = \sum_{i=1}^{n} r_i \qquad (7\text{-}29)$$

إذاً يمكن اعتبار جملة المولدات كمولد واحد مقاومته الداخلية r وقوته المحركة E يمكن تطبيقها على مقاومة خارجية مثل R.



الشكل (7-4): ضم المولـــدات على التسلسل.

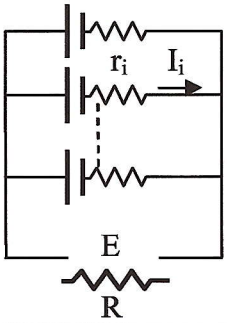
٧-٨-٢- ضم المولدات التفرعي:

يساوي التيار المكافئ لعدة بطاريات موصولة على التفرع مجموع تيارات هذه البطاريات في حين يكون الجهد الحاصل على أطرافها جميعاً واحداً لو أبقيت دارتهـــا مفتوحة كما في الشكل (7-5) أي إن:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} \right) E = \frac{E}{r} \qquad (7\text{-}30)$$

حيث المقاومة المكافئة على التفرع هي:

$$r = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} \right)^{-1} \qquad (7\text{-}31)$$

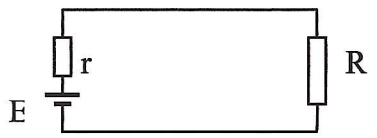


الشكل (7-5): ضم المولـــدات على التفرع.

إذاً يمكن اعتبار جملة المولدات على التفرع كمولد واحد مقاومته الداخلية r المعطـــاة بالعلاقة (7-31) وتياره المكافئ المعطى بالعلاقة (7-30) ينتج كموناً E يمكن تطبيقـــه على مقاومة خارجية مثل R.

٧-٨-٣- ضم المولدات المختلط :

يتميز المنبع الكهربائي بالقوة المحركة الكهربائية E، وبمقاومته الداخلية r، وبحسب نظرية تيفنين توضع هذه المقاومة الداخلية على التسلسل معه كما هو مبين في الشكل (6-7).



الشكل (6-7):
منبع كهربائي مع مقاومة بحسب نظرية تيفنين.

يمكن تطبيق الكمون الناتج عن منبع كهربائي على حمولة كهربائية نمثلها بالمقاومة R فيمر فيها تيار I الذي يمر أيضاً في المنبع ذاته والمقاومة الداخلية له، وتشكل المقاومتان R , r مقسم كمون يعمل على تقسيم القوة المحركة الكهربائية E إلى كمون على طرفي المقاومة R وكمون على طرفي المقاومة الداخلية r ونكتب:

$$V_R = \frac{R}{R + r}.E \qquad (7\text{-}32)$$

$$V_r = \frac{r}{R + r}.E \qquad (7\text{-}33)$$

والتيار المار في الدارة:

$$I = \frac{E}{r + R} = \frac{V_R}{R} = \frac{V_r}{r} \qquad (7\text{-}34)$$

أو:

$$E = (R+r).I \qquad (7\text{-}35)$$

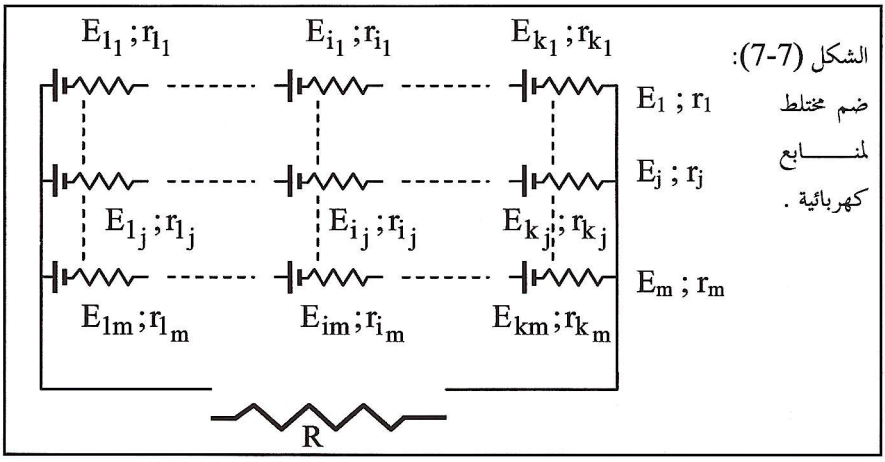
تمثل العلاقتان (7-33) ,(7-32) الكمونين الضائع في المقاومة الداخلية للمنبع، والمستفاد منه في الحمولة. وهذا يعني أنه لا يمكن الاستفادة من كامل القوة المحركة الكهربائية E. ويمكن بملاحظة هاتين العلاقتين أن نستنتج أنه بالإمكان الاستفادة من كامل القوة المحركة الكهربائية E إذا جعلنا R>>>r (يقصد بـ >> أكبر بكثير وبـ >>> أكبر بكثير جداً)، وهذا صحيح ولكن بحسب العلاقة (7-34) يضعف التيار إلى قيمة مهملة، ولا يعود هناك نفعاً من المنبع الكهربائي، لذلك يجب البحث عن الحالة

التي يكون فيها التيار المار في مقاومة الحمولة والكمون بين طرفيها مفيدين. يقودنا هذا البحث إلى معرفة الاستطاعة التي يمكن أن تحصل عليها الحمولة والاستطاعة الضائعة في المقاومة الداخلية فنجد أنها تكون عظمى عندما R = r.

نأخذ الدارة الموضحة في الشكل (7-7)، بفرض أنها تحوي n منبعاً موزعة على m فرعاً، وبفرض أن عدد المنابع في الفرع رقم j هو $k_j(j=1,2,...,m)$ والتي مقاوماتها الداخلية $r_{ij}(i=1,2,...,k_j)$ وقواها المحركة $E_{ij}(i=1,2,...,k_j)$ فالعدد الكلي يعطى بـــ:

$$n = \sum_{j=1}^{m} k_j \qquad (7\text{-}36)$$

وبما أن المنابع متسلسلة في الفرع رقم j فالقوة المحركة الناتجة عن k_j منبع والتيار المار في هذا الفرع والمقاومة الداخلية له يعبر عنها بالعلاقات التالية:



الشكل (7-7): ضم مختلط لمنـــابع كهربائية .

$$E_j = \sum_{i=1}^{k_j} E_{ij} \qquad (7\text{-}37)$$

$$I_j = I_{1_j} = I_{2_j} = ... = I_{ij} = ... = I_{k_j} \qquad (7\text{-}38)$$

$$r_j = \sum_{i=1}^{k_j} r_{ij} \qquad (7\text{-}39)$$

بإيجاد المنابع المكافئة في كل الفروع يصبح لدينا m فرعاً متوازية تحوي المنـــابع $E_j(j=1,2,...,m)$ وتياراتها $I_j(j=1,2,...,m)$ ومقاوماتها الداخلية $r_j(j=1,2,...,m)$، وبما

أنها على التفرع فيما بينها فإنها تكافئ منبعاً قوته المحركة المكافئة ناتجة عن m منبع مكافئ لـ k_j منبع على التسلسل، والتيار الناتج عنه، والمقاومة الداخلية له يعبر عنها بالعلاقات التالية:

$$E = E_1 = E_2 = ... = E_j = ... = E_m$$

$$E = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} E_j = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k_j} E_{ij} \qquad (7\text{-}40)$$

$$I = \sum_{j=1}^{m} I_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{E_j}{r_j} = E\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j} =$$

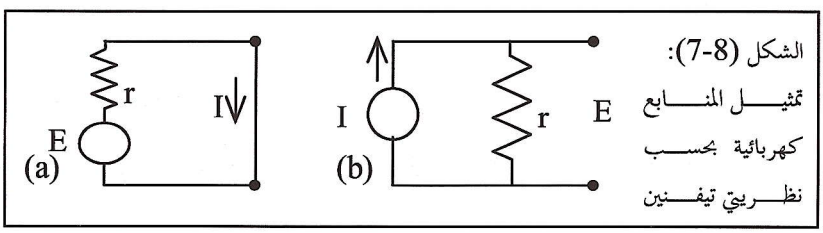
$$= \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k_j} E_{ij} \right)\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sum_{i=1}^{k_j} r_{ij}} \right) \qquad (7\text{-}41)$$

$$\frac{1}{r} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sum_{i=1}^{k_j} r_{ij}} \qquad (7\text{-}42)$$

وترتبط العلاقات (7-40) وَ (7-41) وَ (7-42) فيما بينها على النحو التالي:

$$I = \frac{E}{r} \quad \text{أو} \quad E = r \cdot I \qquad (7\text{-}43)$$

تعبر العلاقة (7-43) عن مفهوم نظريتي تيفنين ونورتن في تمثيل المنابع الكهربائية، فإما أن يعتبر المنبع الكهربائي بحسب نظرية تيفنين، الشكل (7-8,a)، منبعاً للكمون E مع مقاومة داخلية r موصولة معه على التسلسل وينتج التيار $I = \frac{E}{r}$ في حالة القصر، أو أن يعتبر بحسب نظرية نورتن، الشكل (7-8,b)، منبعاً للتيار I مع مقاومته الداخلية r الموصولة معه على التفرع وينتج الكمون $E = r \cdot I$ في حالة الفتح.



الشكل (7-8): تمثيل المنابع كهربائية بحسب نظريتي تيفنين

بفرض أن جميع المنابع المستخدمة ذات قوى محركة متساوية E_1 ومقاومات داخلية متساوية أيضاً ومساويةً لـــ r_1، وأن أعدادها متساوية في جميع الفروع $k_1 = k_2$ $= k_j =....= k_m = k$ =.....= فبحســـب العلاقـــات (7-40) وَ (7-41) وَ (7-42) نكتب:

$$E = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k_j} E_{ij} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} E_1 =$$

$$E = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} kE_1 = \frac{1}{m}(mkE_1) = kE_1 \qquad (7\text{-}44)$$

$$I = \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} E_1\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} r_1}\right) = \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} kE_1\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{kr_1}\right) =$$

$$I = \frac{1}{m}(mkE_1)\left(\frac{m}{kr_1}\right) = m\frac{E_1}{r_1} \qquad (7\text{-}45)$$

$$\frac{1}{r} = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} r_1} = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{kr_1} = \frac{m}{kr_1} \Rightarrow r = \frac{kr_1}{m} \qquad (7\text{-}46)$$

وبتطبيق هذه القوة المحركة المكافئة على مقاومة خارجية R وبحسب العلاقات (7-32) وَ (7-33) وَ (7-34) نجد التيار المار في المقاومة والكمون بين طرفيها والكمون المستهلك في جملة المنابع تعطى بالعلاقات التالية:

$$I = \frac{kE_1}{R + \frac{kr_1}{m}} = \frac{mkE_1}{mR + kr_1} = \frac{nE_1}{mR + kr_1}; n = mk \qquad (7\text{-}47)$$

$$V_R = \frac{R}{R + \frac{kr_1}{m}} kE_1 = \frac{R}{mR + kr_1} mkE_1 = \frac{R}{mR + kr_1} nE_1 \qquad (7\text{-}48)$$

$$V_r = \frac{\frac{kr_1}{m}}{R + \frac{kr_1}{m}} kE_1 = \frac{kr_1}{mR + kr_1} kE_1 \qquad (7\text{-}49)$$

لنناقش بدءاً من هذه الحالة العامة حالتي الضم التسلسلي والتفرعي:

١. يمكن الحصول على الضم التسلسلي كما في الشكل (7-4) من دارة الشكل (7-7) بعد فرض أن عدد الفروع m=1 فيكون n=k، وباستخدام العلاقات (7-44) وَ (7-46) وَ (7-47) وَ (7-48) وَ (7-49) نجد أن:

$$E = n E_1 \qquad (7\text{-}50)$$

$$r = n r_1 \qquad (7\text{-}51)$$

$$I = \frac{n . E_1}{R + n r_1} \qquad (7\text{-}52)$$

$$V_R = \frac{R}{R + n r_1} n . E_1 \qquad (7\text{-}53)$$

$$V_r = \frac{n r_1}{R + n r_1} n E_1 \qquad (7\text{-}54)$$

يلاحظ من العلاقات السابقة أنه إذا كانت r_1 مهملة بالمقارنة مع R فإن شدة التيار والكمون بين طرفي المقاومة والكمون الضائع تعطى بالعلاقات:

$$I = \frac{n . E_1}{R} \; ; \; V_R = n E_1 ; \quad V_r = 0$$

وهذا يعني أن الكمون على طرفي المقاومة الخارجية R يزداد بزيادة عدد المنابع، وكذلك التيار المار فيها والكمون الضائع ينعدم، وهو الفائدة المرجوة من هذا الضم.

وإذا كانت R مهملة بالمقارنة مع r_1 فمن هذه العلاقات نجد أن شدة التيار والكمون بين طرفي المقاومة والكمون الضائع تعطى بالعلاقات:

$$I = \frac{E_1}{r_1} \; ; \; V_R = 0 \; ; \quad V_r = n E_1$$

وهذا يعني أن الكمون على طرفي المقاومة الخارجية R ينعدم، والتيار المار فيها هو تيار أحد المنابع فقط والكمون الضائع يكون في حده الأعلى، ولا فائدة ترتجى من هذا الضم.

٢. يمكن الحصول على الضم التفرعي كما في الشكل (7-5) من دارة الشكل (7-7) بعد فرض أن عدد الفروع m = n وَ k=1، وباستخدام العلاقات وَ (7-44) وَ (7-46) وَ (7-47) وَ (7-48) وَ (7-49) نجد أن:

$$E = E_1 \qquad (7\text{-}50)$$

$$r = r_1/n \qquad (7\text{-}51)$$

$$I = \frac{n \cdot E_1}{nR + r_1} = \frac{E_1}{R + r_1/n} \qquad (7\text{-}52)$$

$$V_R = \frac{R}{nR + r_1} n \cdot E_1 = \frac{R}{R + r_1/n} E_1 \qquad (7\text{-}53)$$

$$V_r = \frac{r_1/n}{R + r_1/n} E_1 \qquad (7\text{-}54)$$

يلاحظ من العلاقات السابقة أنه إذا كانت r_1 مهملة بالمقارنة مع R فإن شدة التيار والكمون بين طرفي المقاومة والكمون الضائع تعطى بالعلاقات:

$$I = \frac{E_1}{R} \quad ; \quad V_R = E_1 \quad ; \quad V_r = 0$$

وهذا يعني أن الكمون على طرفي المقاومة الخارجية R هو نفسه كمون أحد المنابع، والتيار المار فيها هو التيار الناتج عن أحد المنابع والكمون الضائع ينعدم، ولا فائدة من هذا الضم.

وإذا كانت R مهملة بالمقارنة مع r_1 فمن هذه العلاقات نجد أن شدة التيار والكمون بين طرفي المقاومة والكمون الضائع تعطى بالعلاقات:

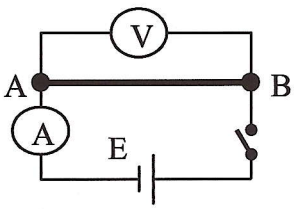
$$I = \frac{n \cdot E_1}{r_1} \quad ; \quad V_R = 0 \quad ; \quad V_r = E_1$$

وهذا يعني أن الكمون على طرفي المقاومة الخارجية R ينعدم، والتيار المار فيها هو تيار جميع المنابع والكمون الضائع يكون في حده الأعلى، والفائدة المرجوة من هذا الضم هي أنّ التيار ازداد بازدياد عدد المنابع.

٧-٩- قانون أوم *Ohm's law*:

نأخذ الدارة البسيطة الموضحة في الشكل (7-9) بحيث يكون المولد متغير فنلاحظ أن قيم فرق الكمون U بين طرفي الناقل a, b تتغير وتتغير معها قيمة شدة التيار I المار فيه ولكن بحيث تبقى النسبة بينهما ثابتة نسمي هذه النسبة الثابتة المقاومة الكهربائية للناقل a, b ونرمز للمقاومة الكهربائية بالرمز R ونعبر عن ذلك رياضياً بالعلاقة:

$$R = \frac{U}{I} \qquad (7\text{-}55)$$



الشكل (7-9):
دراسة قانون أوم
تجريبياً .

نسمي العلاقة الأخيرة قانون أوم الأول.

ترتبط مقاومة الناقل بعلاقة تناسب طردي مع طوله وبعلاقة تناسب عكسي مع سطح مقطعه فإذا رمزنا لطول الناقل بالرمز ℓ ولسطح مقطعه بالرمز S فإن:

$$R \sim \frac{\ell}{S} \Rightarrow R = \rho \frac{\ell}{S} = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S} \qquad (7\text{-}56)$$

نسمي العلاقة الأخيرة قانون أوم الثاني، حيث ρ ثابت التناسب ويأخذ قيمة ثابتة من أجل نواقل من نفس المادة ولكن تختلف قيمته من مادة لأخرى، لذلك نسمي ρ بالمقاومة النوعية ونسمي مقلوبها $\sigma = 1/\rho$ بالناقلية النوعية.

باستخدام العلاقتين السابقتين نعبر بشكل آخر عن قانوني أوم معاً:

$$U = \rho \frac{\ell}{S}.I = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S}.I \qquad (7\text{-}57)$$

تقاس R وحسب العلاقة (7-55) بواحدة V/A وتسمى أوم ويرمز لها بالرمز Ω. ونشتق واحدة ρ من العلاقة (7-56) وهي $\rho = \Omega.m$، وتقاس σ بواحدة تسمى سيمينس/متر ويرمز لها بالرمز S/m حيث $S = A/V$. نعرف الأوم بأنه مقاومة ناقل عندما يطبق بين طرفيه فولط واحد ويمر فيه تيار شدته أمبير واحد.

٧-١٠- قانون جول *Joule's law*:

بالعودة للفقرة (١٠-٥) وجدنا أن علاقة كثافة التيار بشدته تعطى بالعلاقة:

$$j = \frac{I}{S} \qquad (7\text{-}21)$$

وبالعودة للفقرة (١٠-٧) وجدنا أن الاستطاعة المصروفة في ناقل موضوع في حقل كهربائي تعطى بالعلاقة:

$$P = \int_{V_1} \vec{j}.\vec{E}\ .dV_1 \qquad (7\text{-}27)$$

وبالعودة أيضاً للفقرة (٤-٢) وجدنا أن فرق الكمون في حقل منتظم يعبر عنه بما يتفق مع الرموز في هذه الفقرة على النحو التالي:

$$U = -\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B E.dL = E.L \qquad (4\text{-}6)$$

وبفرض أن الحقل وكثافة التيار متجانسين ومتوازيين على حجم الناقل فإن الاستطاعة المصروفة في الناقل بعد المكاملة تساوي:

$$P = j.E\ .V_1 = \frac{I}{S}.\frac{U}{L}.SL \quad ; V_1 = SL$$

$$\Rightarrow \quad P = U\ .I \qquad (7\text{-}58)$$

وباستخدام العلاقة (7-56) وَ (7-57) نكتب العلاقة السابقة على الأشكال التالية:

$$P = R.I^2 = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S}.I^2 = \frac{U^2}{R} \qquad (7\text{-}59)$$

وهو ما ندعوه بقانون جول في أشكاله المختلفة.

٧-١١- تأثير درجة الحرارة على المقاومة الكهربائية

Influence of Temperature at the Resistance:

المقاومة النوعية للنواقل:

تتغير المقاومة الكهربائية للنواقل بتغير درجة حرارتها حيث تزداد مقاومة المعادن بشكل عام بارتفاع درجة حرارتها، وبالمقابل تنخفض المقاومة الكهربائية لأنصاف النواقل مثل السيليكون Silicium والفحم Carbon، بارتفاع درجة حرارتها، وكذلك فإنها تنخفض بالنسبة للعوازل بارتفاع درجة الحرارة، وترتبط مقاومة الناقل بدرجة حرارته بعلاقة خطية من الشكل:

$$R_1 = R_0\ (1+\beta t) \qquad (7\text{-}60)$$

تمثل t درجة الحرارة وتمثل R_0 مقاومة الناقل في الدرجة $0C^o$ وتمثل R_t مقاومة الناقل في الدرجة t وتمثل β معامل المقاومة الحراري الذي يعطى بالعلاقة:

$$\beta = \frac{1}{R_0} \cdot \frac{dR}{dt} \qquad (7\text{-}61)$$

ونشير هنا إلى أن قيم β متغيرة وترتبط بالمجال الحراري الذي تقاس ضمنه المقاومة، ويعطي الجدول (٣) الملحق بالكتاب المقاومة النوعية لبعض المعادن في درجة الحرارة العادية.

تؤثر التغيرات الميكانيكية التي تطرأ على ناقل ما على المقاومة الكهربائية لهذا الناقل، حيث تتناقص مثلاً مقاومة ناقل بزيادة الضغط المطبق عليه، كما وتؤثر أيضاً الحقول المغناطيسية على مقاومة الناقل وكذلك الأشعة الساقطة عليه حيث تؤدي الحقول المغناطيسية المطبقة على ناقل إلى إنقاص مقاومته وبالمقابل تؤدي الأشعة الساقطة إلى زيادة مقاومته.

ترافق تحولات المعدن من حالة لأخرى بتغير كبير في ناقليته ويحدث هذا التغير بشكل كبير ومفاجئ عند الانتقال من حالة لأخرى، من الحالة الصلبة إلى الحالة السائلة مثلاً، ونقول بشكلٍ عام أنه يوجد ترابط بين تغير المقاومة الكهربائية أو الناقلية لمعدن وتغير بنيته البلورية.

المقاومة النوعية للخلائط المعدنية:

تكون المقاومة النوعية لخليطة معدنية بشكلٍ عام أعلى من المقاومة النوعية لأيٍ من المعادن الداخلة في تركيبها، فمثلاً تبلغ المقاومة النوعية لخليطة الميشور $30\times10^{-8}\Omega.m$ حيث تتألف هذه الخليطة من النسب والمواد التالية:

15 % Ni , 25 % Zn , 60 % Cu .

أما المقاومة النوعية لكل من هذه المعادن الداخلة في تركيب هذه الخليطة فهي:

$$\rho_{Cu} = 1,6 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$$

$$\rho_{Zn} = 5,7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$$

$$\rho_{Ni} = 10 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$$

وبسبب ارتفاع المقاومة النوعية للخلائط فإنها تستخدم في صنع المقاومات الكهربائية، ويعطي الجدول (٤) الملحق بالكتاب المقاومة النوعية لبعض الخلائط في درجة الحرارة العادية.

يوجد الكثير من الخلائط التي تتميز بأن مقاومتها تتعلق بشكل طفيف بدرجة الحرارة وتمتلك هذه المواد خاصة كونها جميعاً مشابهة للفضة من حيث اللون وبعض الخصائص الأخرى. وهذا يعني أن معامل المقاومة الحراري لهذه المواد صغير جداً ومن هذه الخلائط خليطة الكونستنتان، وخليطة المنغنين.

المقاومة الكهربائية للعوازل:

عند تطبيق حقول كهربائية ضعيفة باستخدام فروق كمون صغيرة بين طرفي عازل، فبسبب روابط إلكتروناته القوية حتى تلك التي في المدارات الخارجية، فإن ذلك لا يؤدي إلا لتغير مهمل في الحالة الكهربائية لهذا العازل، لكن عند تطبيق حقول كهربائية عالية الشدة نسبياً باستخدام فروق كمون كبيرة، فإن ذلك يؤدي إلى انشحان ساكن في العازل بطريقة تحول جزيئاته إلى ثنائيات أقطاب كما شاهدنا سابقاً.

أما بتطبيق شدات أعلى من الحقول الكهربائية، فإن ذلك يؤدي إلى انهيار مقاومة العازل، إذ يؤدي ذلك إلى تحرير إلكترونات المدارات الخارجية في هذا العازل وتشكل هذه الإلكترونات حاملات شحن كهربائية تقوم بنقل التيار.

المقاومة النوعية لأنصاف النواقل:

تسمى العناصر التي تنحصر مقاومتها النوعية بين $10^{-5}\Omega.m$ وبضعة أضعاف من $\Omega.m$ بأنصاف النواقل. ويتألف قسم من أنصاف النواقل من بنية بلورية بسيطة كالسيلينيوم Selenium والسيليكون والجرمانيوم Germanium وغيرها، ويتألف بعضها من بنية معقدة مثل أكسيد النحاس وأكسيد الزنك وكبريت الرصاص وغيرها.

في أنصاف النواقل عالية التبلور المشابهة للألماس مثلاً تكون كل ذرة منها مرتبطة بأربع ذرات متجاورة، وفي هذه الحالة تساهم إلكترونات التكافؤ في هذه الروابط التي

نصفها بالتساهمية أو التشاركية، وتشكل بذلك البلورات المتينة المكونة لهذه المـــواد، وبالرغم من ذلك فإن الاهتزازات الحرارية قد تؤدي إلى انفصال عـــدد قليـــل مـــن إلكترونات التكافؤ، وتساهم هذه الإلكترونات المتحررة في نقل التيار.

تتأثر الناقلية الكهربائية لأنصاف النواقل أيضاً بعوامل كـــثيرة، حيـــث تـــزداد ناقليتها بارتفاع درجة الحرارة على عكس النواقل. كما أن هناك بعض أنصاف النواقل تتأثر ناقليتها عند تسليط أشعة عليها، فمثلاً تزداد الناقلية الكهربائية للسيلينيوم الرمادي بشكل ملحوظ عند تعريضه لحزمة مضيئة، ويفسر ذلك بأن فوتونات الضوء الساقطة تساعد على تحرير عدد إضافي من الإلكترونات. يوجد بعض أنصاف النواقل تتعلق فيه الناقلية بالاتجاه الذي يطبق فيه الحقل على بلوراتها، ويعزى ذلـــك إلى الاخـــتلاف في توجه الذرات أو الجزيئات بين اتجاه وآخر فيها، وهو ما نعبر عنه بخاصية عدم التماثل في المناحي. يعطي الجدول (٥) في نهاية الكتاب تصنيفاً للمواد بحســـب ناقليتـــها أو مقاومتها النوعية.

٧-١٢- وصل المقاومات *Connection of Resistors:*

الوصل على التسلسل:

نصل مقاومتين R_1 , R_2 على التسلسل بمولد كما يوضـــح الشـــكل (7-10). ليكن U فرق الكمون بين مأخذي المولد وليكن U_1 , U_2 فرقي الكمون بين طـــرفي المقاومتين R_1 , R_2 على الترتيب، ولتكن I شدة التيار المار في الدارة، إن فرق الكمون بين مأخذي المولد يعادل مجموع فرقي الكمون بين طرفي المقاومتين أي أن:

$$U = U_1 + U_2$$

وبالاستعانة بالعلاقة (7-55) التي تعبر عن قانون أوم تصبح العلاقة الأخيرة كما يلي:

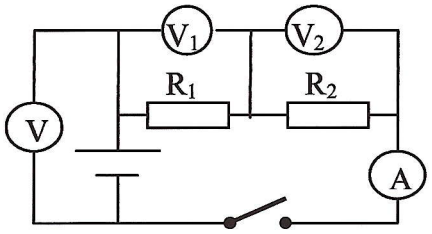
$$R.I = R_1.I + R_2 I$$

وينتج بالتالي:

$$R = R_1 + R_2 \qquad (7\text{-}62)$$

حيث تمثل R المقاومة الكلية في الدارة. وتعمم العلاقة الأخيرة بافتراض أن الدارة تحوي عدد كبير من المقاومات الموصولة على التسلسل فنحصل على العلاقة:

$$R = \sum_i R_i \qquad (7\text{-}63)$$

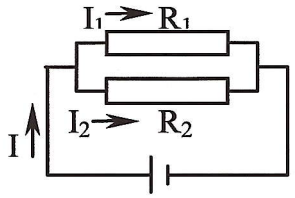


الشكل (7-10): وصل المقاومات على التسلسل.

الوصل على التوازي:

يتم وصل المقاومات على التوازي كما يوضح الشكل (7-11). ليكن R_1 , R_2 قيمتي المقاومتين، وليكن U فرق الكمون بين نقطتي اتصالهما المشتركتين فيكون U هو فرق الكمون بين طرف كلٍ منهما أي أن:

$$U = U_1 = U_2$$



الشكل (7-11): وصل المقاومات على التفرع.

تتوزع شدة التيار الكلي I إلى الشدتين الفرعيتين I_1 , I_2 في المقاومتين R_1 , R_2 على الترتيب وبالتالي:

$$I = I_1 + I_2$$

وبقسمة طرفي العلاقة الأخيرة على U وبالاستعانة بالعلاقة (7-26) ينتج:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad (7\text{-}64)$$

حيث تمثل R المقاومة المكافئة لـ R_1 , R_2، ونعمم العلاقة الأخيرة فتصبح:

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \qquad (7\text{-}65)$$

من العلاقات السابقة نستنتج بسهولة أن المقاومة المكافئة لمجموعة مقاومات موصولة على التسلسل تكون أكبر من أي منها، وبالمقابل تكون المقاومة المكافئة لمجموعة مقاومات موصولة على التفرع أصغر من أي منها.

٧-١٣ - قانونا كيرشوف *Kirchhoff 's Rules:*

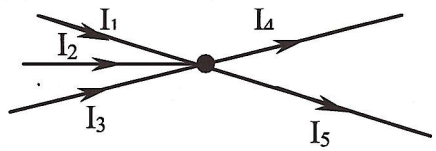
قانون كيرشوف الأول:

ينص قانون كيرشوف الأول على أن مجموع شدات التيارات الكهربائية الداخلة إلى عقدة يساوي مجموع شدات التيارات الخارجة منها، ويوضح الشكل (7-12) عقدة يدخلها ثلاث تيارات هي I_1 , I_2 , I_3 ويخرج منها تياران هما I_4 , I_5 وبتطبيق قانون كيرشوف الأول على هذه العقدة نحصل على العلاقة التالية:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5 \Rightarrow$$
$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

وبصورة عامة عند إعطاء إشارة (+) لشدات التيارات الداخلة، وإشارة (-) للخارجة، أو العكس يصبح قانون كيرشوف الأول الذي يسمى بقانون العقد أيضاً، كما يلي:

$$\sum_i I_i = 0 \qquad (7\text{-}66)$$



الشكل (7-12): قانون كيرشوف الأول.

قانون كيرشوف الثاني:

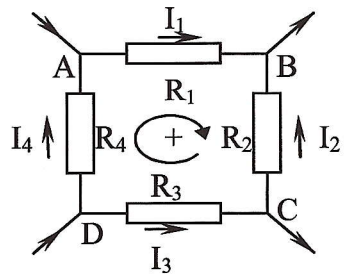
يسمى قانون كيرشوف الثاني أحيانا بقانون الشبكات أيضا لأنه يطبق على الشبكات في الدارات الكهربائية البسيطة والمعقدة. وسنحاول فيما يلي الحصول على

قانون كيرشوف الثاني بأشكاله المختلفة من خلال أمثلة على شبكات بسيطة وأخرى معقدة.

أولاً: حالة شبكة بسيطة:

نعتبر الشبكة البسيطة الموضحة في الشكل (13-7)، ونختار اتجاه كيفي للدوران في الحلقات الجزئية من أجل حساب فروق الكمون بين طرفي كل عنصر من عناصر الدارة في الفروع المختلفة للدارة الكلية، وقد اخترنا اتجاه الدوران مع عقارب الساعة، وباستخدام قانون أوم نحسب فروق الكمون على طرفي كل فرع، ذلك لأن الفرع الواحد يحتوي على عنصر واحد فقط فنجد:

$$V_A - V_B = +I_1 R_1$$
$$V_B - V_C = -I_2 R_2$$
$$V_C - V_D = -I_3 R_3$$
$$V_D - V_A = +I_4 R_4$$



الشكل (13-7): قانون كيرشوف الثاني، شبكة بسيطة.

وبجمع هذه العلاقات الأربعة طرف إلى طرف نحصل على العلاقة التالية:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4 = 0 \qquad (7\text{-}67)$$

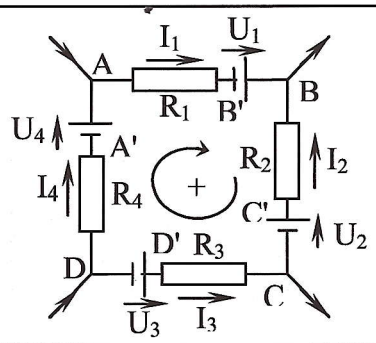
ولنحاول أن نقارن العلاقة (7-67) مع الاتجاه الذي اخترناه وهو اتجاه عقارب الساعة فنلاحظ أن الفروع التي يكون فيها اتجاه التيار موافق للاتجاه الافتراضي تقابل حدود موجبة في العلاقة، أما الفروع التي يكون فيها اتجاه التيار معاكس للاتجاه الافتراضي فتقابل حدود سالبة في هذه العلاقة، وبناءً عليه يمكن أن نكتب هذه العلاقة التي تمثل قانون كيرشوف لشبكة لا تحوي منابع كهربائية بالشكل التالي:

$$\sum_i R_i I_i = 0 \qquad (7\text{-}68)$$

يكون في شبكة بسيطة لا تحوي مولدات مجموع جداءات شدات التيار في المقاومات المارة فيها يساوي الصفر، على أن تُجرى عملية الجمع هذه وفق اتجاه اختياري بحيث نعتبر التيارات التي توافقه موجبة والتي تعاكسه سالبة.

ثانياً: حالة شبكة معقدة:

نقصد بالشبكة المعقدة، الشبكة التي تحوي في بعض أو جميع فروعها مولدات بالإضافة إلى المقاومات. ويوضح الشكل (7-14) مثالاً على الشبكات المعقدة. نختار اتجاه افتراضي كما في الحالة الأولى، وليكن مع اتجاه عقارب الساعة، وحسب العلاقة (7-68) نحسب فروق الكمون على الفروع الأربعة فنجد:



الشكل (7-14): قانون كيرشوف الثاني، شبكة معقدة.

$$V_A - V_B = V_A - V_{B'} + V_{B'} - V_B = I_1R_1 - U_1$$
$$V_B - V_C = V_B - V_{c'} + V_{C'} - V_C = -I_2R_2 + U_2$$
$$V_C - V_D = V_C - V_{D'} + V_{D'} - V_D = -I_3R_3 + U_3$$
$$V_D - V_A = V_D - V_{A'} + V_{A'} - V_A = I_4R_4 - U_4$$

وبجمع هذه العلاقات الأربعة طرفاً إلى طرف نحصل على العلاقة التالية:

$$0 = I_1R_1 - I_2R_2 - I_3R_3 + I_4R_4 - U_1 + U_2 + U_3 - U_4$$
$$\Rightarrow I_1R_1 - I_2R_2 - I_3R_3 + I_4R_4 = U_1 - U_2 - U_3 + U_4 \qquad (7\text{-}69)$$

وبمحاولة إسقاط هذه العلاقة على الشكل (7-14) نلاحظ أن الطرف الأول منها يتألف من مجموع جداءات المقاومات في شدات التيار المارة في كل منها، بحيث يكون ما وافق منها الاتجاه الافتراضي موجباً، وما خالفه يكون سالباً، أما الطرف الثاني

يتألف من مجموع القوى المحركة للمولدات وهي أيضاً موجبة إذا وافقت الاتجاه الافتراضي وسالبة إذا عاكسته، وبالتالي نكتب:

$$\sum_i R_i I_i = \sum_i U_i \qquad (7\text{-}70)$$

٧-١٤- شحن وتفريغ مكثفة

Charge and discharge of capacitor:

لنعتبر الدارة الكهربائية الموضحة في الشكل (7-15,a)، ولنعتبر في البداية أن القاطعة مفتوحة والمكثفة غير مشحونة، وعند إغلاق القاطعة سيحاول منبع التيار DC أن يدفع تياراً i وفق الاتجاه الموضح في الشكل نفسه، وبما أن المكثف لا يحمل أية شحنة في البداية فإن المقاومة R بمفردها هي التي تحدد قيمة التيار، وعلى اعتبار أن لحظة إغلاق القاطعة هي بداية الزمن $t = 0$ فإن التيار يكون في البداية $I_0 = \frac{U_0}{R}$، لكن بمرور الوقت تصبح المكثفة مشحونة ويتناقص بالتالي التيار المتجه إلى المكثفة، وحين تصبح المكثفة مشحونة تماماً فإن التيار يتناقص إلى الصفر كما يبين المنحني في الشكل (7-15,c)، ويسمى هذا المنحني بمنحني الاضمحلال الأسي، في حين تزداد شحنة المكثفة وفقاً للمنحني المبين في الشكل (7-15,d).

بفرض أنه في لحظة زمنية t كانت شحنة المكثفة q فإن شدة التيار المار في الدارة الذي يعطى بالعلاقة $i = \frac{dq}{dt}$، والكمون على طرفي المكثفة والمقاومة، يحققان بحسب قانون كيرشوف للجهود العلاقة التالية:

$$U_0 = U_R + U_C = iR + \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \qquad (7\text{-}71)$$

بإصلاح العلاقة السابقة نكتب:

$$\frac{dq}{U_0 C - q} = \frac{1}{RC}dt$$

وبالمكاملة:

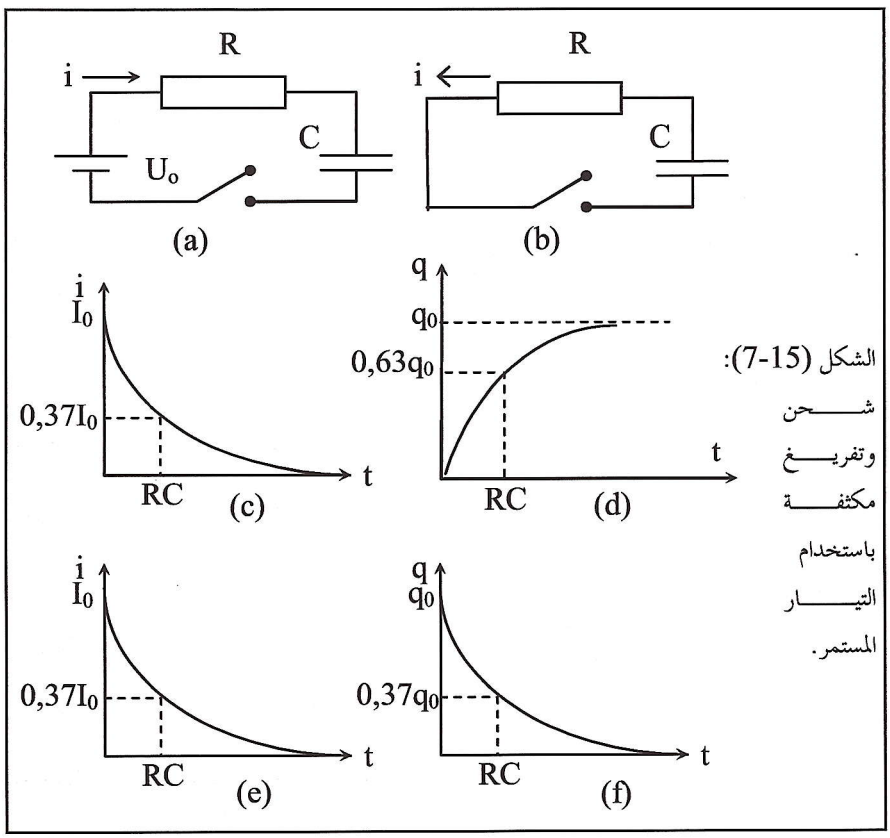
$$\int_0^q \frac{dq}{U_0 C - q} = \int_0^t \frac{1}{RC}dt$$

نجد:

$$q = U_0 C (1 - e^{-t/RC}) \qquad (7\text{-}72)$$

أما التيار فيكون:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{C}{R} e^{-t/RC} \qquad (7\text{-}73)$$



الشكل (7-15): شحن وتفريغ مكثفة باستخدام التيار المستمر.

يبين الشكلان (7-15,c,d) رسماً بيانياً للعلاقتين السابقتين، وعليهما يظهر أنه عندما يكون t=0 فالشحنة تكون في قيمتها الصغرى (معدومة) والتيار في قيمته العظمى، أي:

$$q = 0 \;;\; i = i_0 = \frac{U_0}{R}$$

وأنه عندما يكون $t = \infty$ أي عندما يكون $t = \tau >> RC$، فالشحنة تكون في قيمتها العظمى والتيار في قيمته الصغرى (معدوماً)، أي:

$$q = q_0 = U_0 . C \;;\; i = 0$$

أما في الحالة الخاصة عندما يكون $t = RC$، فيكون كل من الشحنة والتيار:

$$q = 0.63\, q_0 \; ; \; i = 0.37\, I_0$$

يعني هذا أن كلاً من الشحنة المتزايدة تبلغ 63% من قيمتها العظمى، والتيار المتناقص يبلغ 37% من قيمته العظمى عندما يمر الزمن $\tau = RC$ على بدء الشحن. يسمى الجداء $\tau = RC$ بالثابت الزمني السعوي capacitive time لهذه الدارة، ويقاس في الجملة الدولية بالثانية أي أن $\Omega.F = S$ وهكذا نستنتج تعريف الثابت الزمني لدارة شحن مكثفة كما يلي:

الثابت الزمني $\tau = RC$ لدارة شحن مكثفة هو عبارة عن الزمن مقدراً بالثواني اللازم لكي ينخفض التيار بمقدار 0.37 من قيمته الابتدائية (العظمى)، أو الزمن لكي تشحن المكثفة بمقدار 0.63 من قيمتها النهائية (العظمى).

تعرفنا آنفاً على عملية شحن المكثفة، لنتعرف الآن على عملية التفريغ. نقصر المنبع بعد إتمام عملية الشحن كما في الشكل (7-15,b) فيمر تيار موضح اتجاهه في الشكل نفسه، إن غلق الدارة يؤدي إلى تمرير المكثفة المشحونة تياراً يسبب فرقين في الكمون بين طرفي كل من المكثفة والمقاومة، يحققان بحسب قانون كيرشوف للجهود وفي لحظة t العلاقة التالية:

$$0 = U_R + U_C = iR + \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \qquad (7\text{-}74)$$

بإصلاح العلاقة السابقة نكتب:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$$

وإذا علمنا في بدء زمن التفريغ $t = 0$ أن الشحنة عظمى $q_0 = U_0 C$ فبالمكاملة:

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = \int_{0}^{t} -\frac{1}{RC}dt$$

نجد:

$$q = U_0 C \,.\, e^{-t/RC} \qquad (7\text{-}75)$$

أما التيار فيكون:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} = -\frac{U_0}{R} e^{-t/RC} \quad (7\text{-}76)$$

إن إشارة الناقص في العلاقة السابقة تشير إلى أن اتجاه التيار في حالة التفريغ يعاكس اتجاه التيار في حالة الشحن، يبين الشكلان (7-15,e,f) رسماً بيانياً للعلاقتين السابقتين، وعليهما يظهر أنه عندما يكون t=0 فالشحنة والتيار يكونان في قيمتيهما العظميين، أي:

$$q = q_0 = U_0 C \; ; \; i = i_0 = \frac{U_0}{R}$$

وأنه عندما يكون $t = \infty$ أي عندما يكون $t = \tau >> RC$ فالشحنة والتيار يكونان في قيمتيهما الصغريين (معدومان) ، أي:

$$q = 0 \; ; \; i = 0$$

أما في الحالة الخاصة التي يكون فيها $t = RC$، فيكون كل من الشحنة والتيار:

$$q = 0.37\, q_0 \; ; \; i = 0.37\, I_0$$

وهذا يعني أن كلاً من الشحنة والتيار يتناقصان بمقدار 0.37 من قيمتيهما العظميين، عندما يمر الزمن $\tau = RC$ على بدء التفريغ.

ملاحظة: بالتعرف على منحني الكمون بين طرفي المكثفة أثناء شحنها وتفريغها نجده مماثل لمنحني الشحنة ذلك لأن الكمون يزداد بزيادة الشحنة ويتناقص بنقصانها.

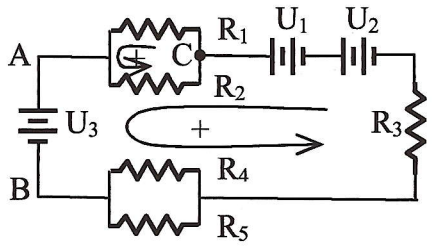
مسائل محلولة:

مسألة (1):

لتكن الدارة المعطاة في الشكل (7-15)، وبفرض المقاومات الداخلية للمولدات: الأول والثاني $r_1 = r_2 = 0.1\Omega$، والثالث مهملة، وبفرض أن كل من المقاومات في الدارة يساوي 2Ω. المطلوب:

١. احسب المقاومة المكافئة بين النقطتين A, B.

٢. احسب التيارات I_1 , I_2 , I_3 المارة في المقاومات R_1 , R_2 اللتين تشكلان الدارة الجزئية العليا، و R_3 الموجودة في الدارة الأساسية، ثم الجهود V_1 , V_2 , V_3 على طرفي كل منها.



الشكل (15-7):
إيجاد تيارات وجهود باستخدام قانوني كيرشوف.

الحل:

١. إن المقاومة المكافئة لـ R_1 , R_2 هي:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow R_{12} = 1$$

والمقاومة المكافئة لـ R_4, R_5 هي:

$$\frac{1}{R_{45}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow R_{45} = 1$$

بإضافة المقاومات الداخلية للمولدين إلى المقاومة R_3 نجد:

$$R`_3 = 2 + 0.1 + 0.1 = 2.2\Omega$$

وتصبح بالتالي المقاومة المكافئة بين النقطتين A, B من الدارة:

$$R = R_{12} + R'_3 + R_{45} = 1 + 2.2 + 1 = 4.2\ \Omega$$

٢. نطبق قانون كيرشوف الأول على العقدة C فنجد:

$$I_1 + I_2 = I_3 \qquad (a)$$

ونطبق قانون كيرشوف الثاني على الشبكة الجزئية المكونة من المقاومات R_{12} , $R`_3$, R_{45}، ومنابع الجهد، بعد اعتبار جهة الدوران الموجبة عليها بعكس عقارب الساعة، فنجد:

$$U_1 + U_2 + U_3 = (R_{12} + R'_3 + R_{45}) \cdot I_3$$
$$5 + 10 - 5 = (1 + 2.2 + 1) \cdot I_3$$
$$10 = (4.2) \cdot I_3 \qquad (b)$$

ثم نطبق قانون كيرشوف الثاني على الشبكة الجزئية المكونة من المقاومتين R_2 , R_1، ولا تحوي منابع جهد بعد اعتبار جهة الدوران الموجبة عليها بعكس عقارب الساعة أيضاً، فنجد:

$$0 = 2I_1 - 2I_2 \Leftrightarrow I_1 = I_2 \qquad (c)$$

والآن بحل المعادلات (a) و(b) و(c) حلاً مشتركاً نجد:

$$I_3 = \frac{10}{4.5} = 2.222\,A$$

$$I_1 = I_2 = 1.11\ A$$

أما الجهود فهي:

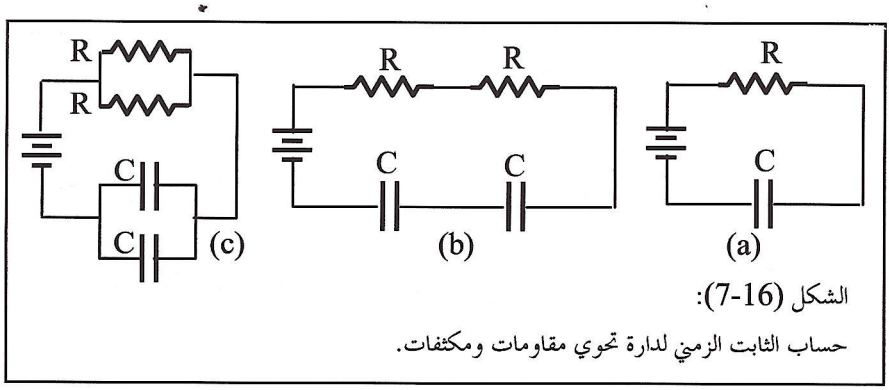
$$V_1 = R_1 . I_1 = 2 \times 1.11 = 2.22\ V$$

$$V_2 = R_2 . I_2 = 2 \times 1.11 = 2.22\ V$$

$$V_3 = R_3 . I_3 = 2 \times 2.22 = 4.44\ V$$

مسألة (2):

احسب الثابت الزمني لجملة العناصر الموجودة في كل دارة في الشكل التالي:



الشكل (16-7):

حساب الثابت الزمني لدارة تحوي مقاومات ومكثفات.

الحل:

(a). $\tau = RC$

(b). $\tau = (2R)(\frac{1}{2}C) = RC$

(c). $\tau = (\frac{1}{2}R)(2C) = RC$

أسئلة ومسائل غير محلولة

الأسئلة:

١. علل ارتفاع درجة حرارة ناقل عند مرور تيار كهربائي فيه؟

٢. هل المقاومة الكهربائية مقدار ثابت أم متغير؟ ناقش ذلك؟

٣. بأية آلية تزداد المقاومة الكهربائية عند ارتفاع درجة حرارة الناقل؟

٤. لماذا تكون المقاومة النوعية لخليطة معدنية أكبر من المقاومة النوعية لأي من المعادن الداخلة في تركيبها؟

٥. هل يمكن أن تنعدم مقاومة الناقل تماماً؟

٦. كيف يمكن أن يتحول العازل إلى ناقل؟

٧. بأية آلية ينقل العازل التيار الكهربائي عندما يكون رطب؟

٨. علل اختلاف ناقلية نصف الناقل الكريستالي بحسب الجهة التي يسير بها التيار بالنسبة لبنيته البلورية؟

٩. لماذا تكون المقاومة المكافئة لمجموعة مقاومات موصولة على التسلسل أكبر من أي منها، ولماذا تكون المقاومة المكافئة أصغر من أي منها إذا كانت موصولة على التفرع؟

١٠. عرف القوة المحركة الكهربائية.

المسائل:

مسألة (1):

لدينا 20 مولداً كهربائياً، القوة المحركة الكهربائية أي التوتر الأساسي لكل منها يساوي 2V، ومقاوماتها الداخلية متساوية وكل منها يساوي 0.2Ω، موصولة جميعاً على التسلسل مع مقاومة خارجية قدرها 9Ω والمطلوب حساب كلٍ مما يلي:

١. شدة التيار الكهربائي في كل مولد.

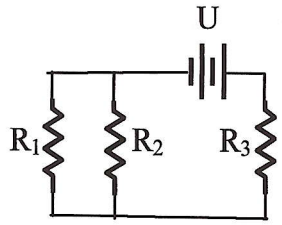
٢. فرق الكمون بين طرفي المقاومة الخارجية.

٣. الاستطاعة المستهلكة في المقاومة الخارجية.

٤. الاستطاعة المستهلكة في جميع المولدات.

مسألة (2):

لتكن الدارة الموضحة في الشكل (7-17)، فيها المولد U=7V، مقاومته الداخلية $r = 1\Omega$، والمقاومتين الشاقوليتين $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 6\Omega$، والأفقية $R_3 = 4\Omega$، المطلوب: احسب التيار الذي يعطيه المولد، ثم احسب فرق الكمون بين طرفي المقاومة R_3.



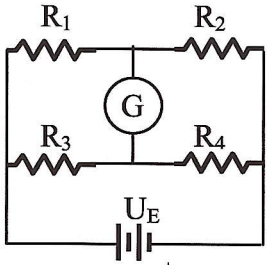
الشكل (7-17):
إيجاد تيارات وجهود باستخدام قانوني كيرشوف.

مسألة (3):

تمثل الدارة الموضحة في الشكل (7-18) جسر واطسطن، بفرض أن التوازن يحصل من أجل القيم التالية للمقاومات:

$R_2 = 15\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 60\Omega$

المطلوب: حساب قيمة المقاومة R_1، ثم شدة التيار المار في البطارية.



الشكل (7-18):
جسر واطسطن.

مسألة (4):

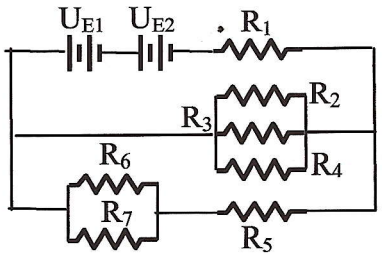
تبلغ استطاعة مقاومة 600W، فإذا كان ثمن الكيلوواط ليرة سورية واحدة فما هو مصروف هذه المقاومة عندما تعمل لمدة 30 ساعة.

مسألة (5):

لتكن لدينا الدارة الموضحة في الشكل (19-7)، فيها المقاومة الداخلية للمولدين $r_1 = r_2 = 0.15\ \Omega$، وقيمتاهما $U_{E1} = U_{E2} = 6\ V$، وقيم المقاومات على يمين الدارة هي $R_5 = 2\ \Omega$; $R_3 = R_4 = 8$; $R_2 = 4$; $R_1 = 1.2$)، وعلى يسارها $R_7 = 6\ \Omega$; $R_6 = 3$)، وذلك من الأعلى إلى الأسفل. والمطلوب:

١. احسب المقاومة المكافئة على طرفي جملة المولدين.

٢. احسب قيمة التيار المار في المقاومة R_5، والكمون بين طرفيها.



الشكل (19-7):
إيجاد تيارات وجهود باستخدام قانوني كيرشوف.

مسألة (6):

تنشر مقاومة طاقة حرارية بمعدل 40W (أي استطاعتها تساوي هذا المقدار)، وذلك عندما يكون فرق الكمون بين طرفيها 40V، المطلوب: حساب قيمة المقاومة.

مسألة (7):

لدينا سلك منتظم طوله 100m، قطره 2mm، ومقاومته النوعية $10^{-8}\Omega.m$، المطلوب حساب:

١. المقاومة الكهربائية للسلك.

٢. الاستطاعة الكهربائية المستهلكة في السلك عندما يمر فيه تيار كهربائي شدته 2A.

الفصل الثامن

الحقول المغناطيسية

Magnetic Fields

يعتقد كثير من المؤرخين العلميين أن البوصلة، التي تستخدم الإبرة المغناطيسية، قد استخدمت بصورة مبكرة قبل القرن الثالث عشر قبل الميلاد في الصين، وهي من اختراع العرب أو الهنود في الأصل.

لقد عرف الإغريق القدامى عن المغناطيسية منذ العام 800 ق.م، وقد اكتشفوا أن حجارة معينة، تدعى الآن مغنتيت (Magnetite) وهي Fe_3O_4، تجذب قطع الحديد.

وتنسب الأسطورة اسم مغنتيت إلى الكاهن مغنيز (Magnes) الذي لاحظ أن مسامير حذائه ونهاية عكازه تنجذب بسرعة عند تقريبها من بعض المواد.

نظم بيردي ماريكورت (Pierre de Maricourt) خارطة بالاتجاهات التي تأخذها الإبرة المغناطيسية عند وضعها في نقاط مختلفة من سطح مغناطيس طبيعي كروي، لقد وجد أن هذه الاتجاهات تشكل دوائر تلف حول الكرة وتتقاطع جميعها في نقطتين متقابلتين قطرياً، سميتا قطبي المغناطيس، وأظهرت التجارب التي تلت ذلك أن كل مغناطيس، بغض النظر عن شكله له قطبان يدعيان قطب شمالي وقطب جنوبي. ويؤثر كلٍ منهما في الآخر بطريقة مماثلة للشحن الكهربائية أي أن الأقطاب المغناطيسية المتماثلة تتدافع والأقطاب المتخالفة تتجاذب.

وأعطيت الأقطاب المغناطيسية هذا الأسم بسبب سلوكها عند وجود الحقل المغناطيسي الأرضي.

إذا علق قضيب مغناطيسي من منتصفه بواسطة خيط مرن قابل للفتل بحرية في المستوي الأفقي، فإنه سيدور حتى يصبح قطبه الشمالي موجه نحو شمال الأرض وقطبه الجنوبي موجه نحو جنوب الأرض وقد استخدمت هذه الفكرة في صناعة البوصلة البسيطة.

في العام 1600 وسع الفيزيائي ويليم جيلبرت (William Gilbert) التجارب السابقة على مواد مختلفة، باستخدام حقيقة أن إبرة البوصلة تتوضع باتجاهات محددة، واقترح جيلبرت أن الكرة الأرضية نفسها عبارة عن مغناطيس دائم كبير.

وفي العام 1750 استخدم جون ميشيل (John Michel) ميزان الفتل لإظهار أن الأقطاب المغناطيسية تؤثر على بعضها البعض بقوى جذب أو دفع، وتتناسب هذه القوى طرداً مع مقلوب مربع المسافة بين الأقطاب، بالرغم من أن القوى بين الأقطاب المغناطيسية مماثلة للقوى بين الشحن الكهربائية، فإنه يوجد بينهما خلاف هام، إذ يمكن عزل الشحن الكهربائية بينما لا يمكن عزل الأقطاب المغناطيسية أي أن الأقطاب المغناطيسية توجد دوماً كأزواج، ولقد باءت بالفشل جميع المحاولات لايجاد مغناطيس متماثل الأقطاب، فعند تجزئة العديد من المغانط إلى عدد كبير من الأجزاء، كان كلٍ من هذه الأجزاء يتحول إلى مغناطيس بقطبين شمالي وجنوبي.

إلا أنه بالرغم من ذلك توجد بعض الأسس النظرية للتفكير بأنه ربما يوجد في الطبيعة مغناطيس متجانس الأقطاب أي قطب شمالي بمفرده أو قطب جنوبي بمفرده، هذا وإن البحث اليوم عن مثل هذا المغناطيس يشكل مجال بحث تجريبي نشط، لكن على أية حال لم تثبت أي من المحاولات في هذا المجال أي نجاح.

اكتشفت العلاقة بين المغناطيسية والكهرباء في العام 1819 من خلال بحث نشره العالم الدانمركي كريستيان أورستد (H. Christian Oersted)، الذي وجد أن التيار الكهربائي المار في سلك يحرف الإبرة المغناطيسية لبوصلة مجاورة.

وبعد ذلك بفترة قصيرة صاغ العالم الفرنسي أمبير (Ampere) قانون كمي لحساب القوة المغناطيسية بين النواقل الحاملة للتيارات الكهربائية، واقترح أمبير أيضاً أن حلقات التيار الكهربائي التي لها أبعاد جُزيئية هي المسؤولة عن جميع الظواهر المغناطيسية.

وفي العام 1820 أُعلن من قبل كلٍ من فارادي وهنري بصورة مستقلة عن ترابطات إضافية بين الكهرباء والمغناطيسية وهي أن التيار الكهربائي يمكن أن ينتج في

دارة إما عن طريق تحريك مغناطيس بجانب هذه الدارة، أو عن طريق تغيير شدة التيار في دارة أخرى مجاورة لهذه الدارة.

إن هذه الملاحظات أثبتت أن تغير الحقل المغناطيسي ينتج حقل كهربائي. وفي الأعوام التي تلت ذلك أثبت مكسويل أن العكس صحيح أيضاً، أي أن تغير الحقل الكهربائي يؤدي إلى نشوء حقل مغناطيسي.

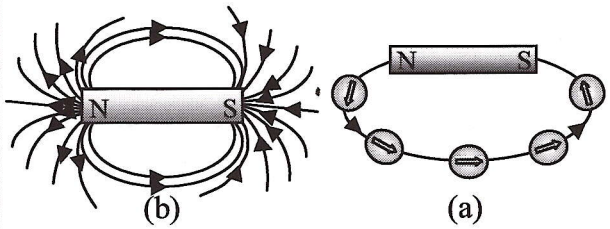
يوجد تشابه بين التأثيرات الكهربائية والتأثيرات المغناطيسية، وهذا الأمر قاد إلى طرق صنع مغانط دائمة. درسنا في الفصل الثاني أنه عند دلك المطاط والصوف أحدهما بالآخر فإن كل منهما يصبح مشحون كهربائياً أحدهما بشحنة موجبة والآخر بشحنة سالبة. وبطريقة متشابهة طرق قطعة حديدٌ غير ممغنطة بمغناطيس يؤدي إلى مغنطتها. وبالتالي المغناطيسية يمكن أيضاً أن تحرض في الحديد (وفي بعض المواد الأخرى) بطرائق مختلفة. على سبيل المثال، إذا وضعت قطعة من الحديد بجانب مغناطيس قوي فإن قطعت الحديد تصبح في النهاية ممغنطة. يمكن أن تسرع عملية مغنطة قطعة الحديد بوجود حقل مغناطيسي قوي بتسخين قطعة الحديد ومن ثم تبريدها أو القيام بعملية طرقها وهي معرضة للحقل المغناطيسي.

يبحث هذا الفصل في القوى المؤثرة على الشحن المتحركة وعلى الأسلاك التي تنقل تيار كهربائي بوجود حقل مغناطيسي. أما مصدر الحقل المغناطيسي ذاته فهو مشروح في الفصل القادم.

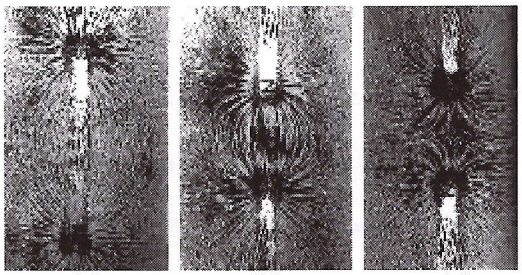
٨-١ - الحقل المغناطيسي *The Magnetic Field:*

وجدنا في الفصول السابقة أنه من المناسب وصف التأثيرات المتبادلة بين الأجسام المشحونة بدلالة الحقول الكهربائية. ولنتذكر الآن أن الحقل الكهربائي يحيط بأية شحنة كهربائية، أما المنطقة من الفضاء المحيطة بشحنة متحركة فتتضمن حقل مغناطيسي بالإضافة للحقل الكهربائي. ويحيط أيضاً حقل مغناطيسي بأية مادة ممغنطة.

من أجل وصف نوع الحقل، يجب أن نعرف شدته أو قيمته واتجاهه. إن اتجاه الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ في أي موضع هو الاتجاه الذي يشير له القطب الشمالي لإبرة البوصلة الموضوعة في ذلك الموضع. يظهر الشكل (8-1a) كيف يمكن تحديد الحقل المغناطيسي لقضيب بمساعدة البوصلة. ويظهر الشكل (8-1b) مجموعة خطوط الحقل المغناطيسي لقضيب مغناطيسي مرسومة باستخدام برادة الحديد، ويمكن لاستخدام هذه الطريقة إظهار أشكال مختلفة من خطوط الحقل المغناطيسي كما في الشكل (2-8).



الشكل (8-1):
(a) رسم خطوط الحقل المغناطيسي بالاستعانة بإبرة مغناطيسية.
(b) عدة خطوط حقل مغناطيسي لمغناطيس على شكل قضيب.



الشكل (8-2):
(a) أشكال الحقل المغناطيسي التي تحيط بقضيب مغناطيسي كما تظهر بواسطة برادة الحديد. (b) أشكال الحقل المغناطيسي بين قطبين مختلفين لقضيبين مغناطيسيين.
(c) أشكال الحقل المغناطيسي بين القطبين مماثلين لقطبين مغناطيسين.

نستطيع تعريف الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ في نقطة ما في الفضاء بتابعية القوة المغناطيسية المؤثرة على جسم اختباري مناسب. هذا الجسم الاختباري هو جسيمه مشحونة تتحرك بسرعة $\vec{v}$. ولنفترض أنه لا يوجد حقل جاذبية ولا حقل كهربائي في مجال حركة هذا الجسم المشحون في فترة الاختبار. أعطت التجارب على مختلف الجسيمات المشحونة والمتحركة في حقل مغناطيسي النتائج التالية:

– تتناسب قيمة القوة المغناطيسية والمؤثرة على هذا الجسيم المشحون مع قيمة كل من شحنته q وسرعته v.

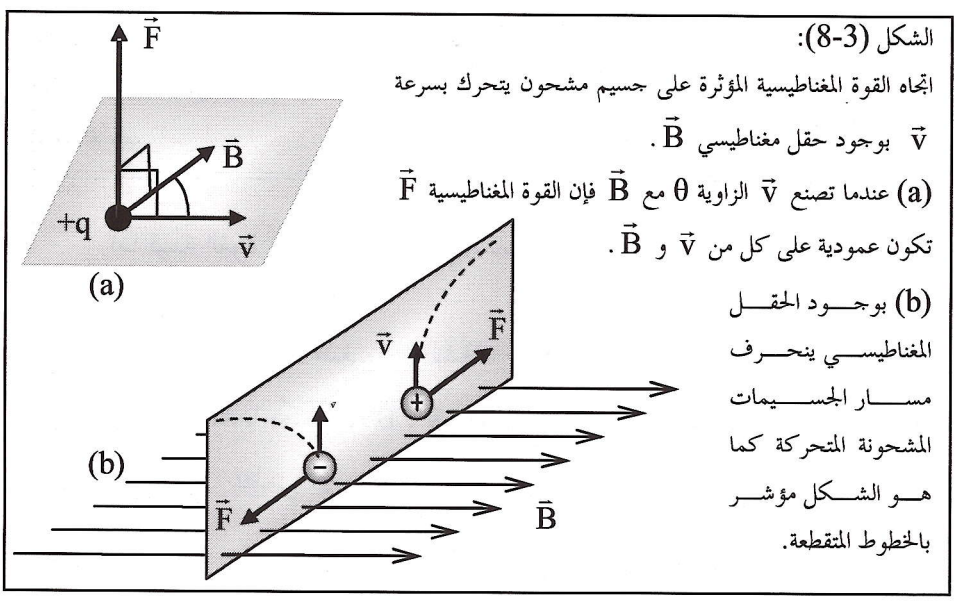
– تتعلق قيمة واتجاه القوة المغناطيسية باتجاه سرعة الجسيم وبقيمة واتجاه الحقل المغناطيسي.

– عندما يتحرك جسيم مشحون بموازاة متجهة الحقل المغناطيسي تكون القوة المغناطيسية المؤثرة على الجسيم المشحون مساوية للصفر.

– عندما يصنع شعاع سرعة الجسيم المشحون الزاوية θ مع الحقل المغناطيسي، فإن القوة المغناطيسية تؤثر وفق اتجاه عمودي على كل من $\vec{v}$ و $\vec{B}$ أي أنها عمودية على المستوي المتشكل منهما الشكل (8-3a).

– القوة المغناطيسية المؤثرة على شحنة موجبة متحركة تكون باتجاه معاكس لاتجاه القوة المغناطيسية المؤثرة على شحنة سالبة متحركة بنفس اتجاه الشحنة الموجبة. الشكل (8-3b).

– إذا كان شعاع السرعة يصنع الزاوية θ مع الحقل المغناطيسي، وتكون قيمة القوة المغناطيسية متناسبة طرداً مع $\sin\theta$.



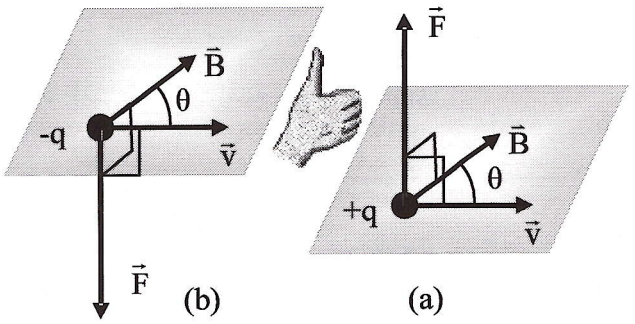
الشكل (8-3):
اتجاه القوة المغناطيسية المؤثرة على جسيم مشحون يتحرك بسرعة $\vec{v}$ بوجود حقل مغناطيسي $\vec{B}$.
(a) عندما تصنع $\vec{v}$ الزاوية θ مع $\vec{B}$ فإن القوة المغناطيسية $\vec{F}$ تكون عمودية على كل من $\vec{v}$ و $\vec{B}$.
(b) بوجود الحقل المغناطيسي ينحرف مسار الجسيمات المشحونة المتحركة كما هو الشكل مؤشر بالخطوط المتقطعة.

يمكن تلخيص الملاحظات السابقة بكتابة علاقة القوة المغناطيسية على الشكل:

$$\vec{F} = q\ \vec{v} \wedge \vec{B} \qquad (8\text{-}1)$$

حيث يكون اتجاه القوة المغناطيسية باتجاه الشعاع $\vec{v} \wedge \vec{B}$ إذا كانت الشحنة q موجبة وتكون القوة المغناطيسية عمودية على كل من $\vec{B}$, $\vec{v}$ وذلك بحسب تعريف الجداء الشعاعي (الجداء الخارجي). نستطيع اعتبار القانون السابق كتعريف عملي للحقل المغناطيسي في نقطة ما في الفراغ. أي أن الحقل المغناطيسي يعرف بتابعية القوة المغناطيسية التي نرى تأثيرها على الجسيم المشحون المتحرك.

من أجل تحديد اتجاه القوة المغناطيسية تستخدم قاعدة اليد اليمنى. توجه الأصابع الأربعة (غير الإبهام) لليد اليمنى على طول اتجاه $\vec{v}$ وبعد ذلك تُلف في اتجاه $\vec{B}$ فعندها يشير الإبهام إلى اتجاه الجداء $\vec{v} \wedge \vec{B}$ الذي يكون مطابقاً لاتجاه القوة $\vec{F}$ عندما تكون الشحنة q موجبة، ومعاكساً لاتجاهها عندما تكون الشحنة q سالبة.



الشكل (4-8):
يحدد اتجاه القوة المغناطيسية بحسب قاعدة اليد اليمنى:
(a) الشحنة موجبة فالقوة تتجه للأعلى.
(b) الشحنة سالبة فالقوة تتجه للأسفل.

أما قيمة القوة المغناطيسية فتعطى بالعلاقة :

$$F = q\ v\ B\ \sin\ \theta \qquad (8\text{-}2)$$

حيث الزاوية θ الأصغر بين الشعاعين $\vec{B}$, $\vec{v}$. من هذه العلاقة نجد أن $\vec{F}$ تكون معدومة عندما يكون $\vec{B}$, $\vec{v}$ متوازيين وتكون $\theta = 0°$ أو $\theta = 180°$ وتكون قيمة $\vec{F}$ عظمى أي $F_{max} = q\ v\ B$ عندما يكون $\vec{B}$, $\vec{v}$ متعامدين أي $\theta = 90°$.

توجد اختلافات هامة بين القوى الكهربائية والقوى المغناطيسية يمكن تلخيصها كما يلي:

- تكون القوة الكهربائية منطبقة دائماً على خطوط الحقل الكهربائي (معاكسة أو مماثلة لاتجاه الحقل الكهربائي). بينما تكون القوة المغناطيسية عمودية على الحقل المغناطيسي.

- لا تتعلق القوة الكهربائية المؤثرة على جسيم مشحون بسرعة هذا الجسيم. بينما تؤثر القوة المغناطيسية على جسيم مشحون فقط إذا كان هذا الجسيم متحرك.

- تقوم القوة الكهربائية بعمل عند إزاحتها للجسيم المشحون. بينما لا تقوم القوة المغناطيسية الموافقة لحقل مغناطيسي ثابت بأي عمل عندما ما يزاح الجسيم.

العبارة الأخيرة هي نتيجة لحقيقة أنه عندما الشحنة لا تتحرك في حقل مغناطيسي ثابت، فإن القوة المغناطيسية تكون دائماً عمودية على الانزياح. أي أن $\vec{F}\,\vec{ds} = \vec{F}\,dt = 0$ لأن القوة المغناطيسية هي شعاع عمودي على $\vec{v}$. ومن هذه الخاصية ومن نظرية العمل والطاقة نستنتج أن الطاقة الحركية لجسيم مشحون لا يمكن أن تتغير بواسطة الحقل المغناطيسي بمفرده، وبعبارة أخرى:

عندما تتحرك شحنة بسرعة $\vec{v}$ فإن يمكن لحقل مغناطيسي ساكن مطبق عليها أن يغير من اتجاه شعاع سرعتها لكن لا يغير من قيمة سرعة الجسيم الحامل للشحنة. وبالتاي لا يؤثر على الطاقة الحركية للجسيم المشحون.

واحدة الحقل المغناطيسي في الجملة الدولية SI هي الوبر لكل متر مربع Wb/m^2 وتدعى أيضاً تسلا (T) Tesla. يمكن ربط هذه الواحدة بالوحدات الأساسية باستخدام العلاقة (1-8) وعلى اعتبار أنه لدينا شحنة مقدارها 1C تتحرك خلال حقل مغناطيسي قيمته 1T بسرعة 1m/s عمودية على هذا الحقل، فإنها تخضع لقوة مغناطيسية مقدارها 1N وبالتالي يمكن أن واحدة الحقل المغناطيسي بدلالة الواحدات الأخرى:

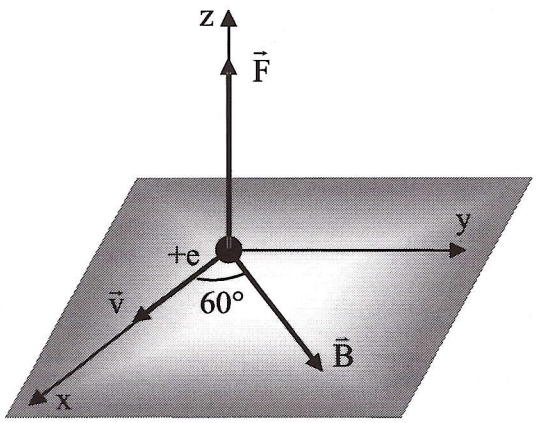
$$[B] = T = \frac{Wb}{m^2} = \frac{N}{C.\frac{m}{s}} = \frac{N}{A.m}$$

هناك واحدة شائعة الاستخدام ليست في جملة الواحدات الدولية تدعى الغوص gauss (G) ترتبط بالتسلا وفق التحويل $1T = 10^4\ G$.

يمكن للمغانط المخبرية الاعتيادية أن تولد حقول مغناطيسية حتى 2,5T. ولقد تم اختراع المغانط فائقة الناقلية التي يمكن أن تولد حقول مغناطيسية أعلى من 25T. يمكن أن تقارن هذه القيمة مع الحقل المغناطيسي الأرضي بالقرب من سطح الأرض والذي يبلغ حوالي $0,5.\ 10^{-4}$ T.

مثال (٨–١): بروتون متحرك في حقل مغناطيسي

يتحرك بروتون بسرعة قيمتها 8.10^6 m/s على طول المحور x. يدخل منطقة يوجد فيها حقل مغناطيسي قيمته 2,5T وصنع اتجاهه زاوية 60° مع المحور x ويتوضع في المستوي xy كما في الشكل (5-8) والمطلوب: احسب القوة المغناطيسية الابتدائية المطبقة على النترون ثم احسب تسارعه.



الشكل (5-8):
القوة المغناطيسية المطبقة على البروتون تكون بالاتجاه للمحور z.

الحل:

لدينا من العلاقة (2-8) أن:

$$F = q\ v\ B\ \sin\ \theta$$

$$F = 1,602\ .\ 10^{-19}\ .\ 8.10^{6}\ .\ 2,5\ .\ \sin 60^{o} = 2,8\ .\ 10^{-12}\ N$$

بما أن حاصل الجداء $\vec{v} \wedge \vec{B}$ بالاتجاه الموجب (حسب قاعدة اليد اليمنى). وشحنة البروتون موجبة فإن $\vec{F}$ تكون بالاتجاه الموجب للمحور z. تبلغ كتلة

البروتون $1,67.10^{-27}$ أما تسارع البروتون الابتدائي فيكون بالاتجاه الموجب للمحور z ويساوي:

$$g = \frac{F}{m} = \frac{2,8 \cdot 10^{-12}}{1,67.10^{-27}} = 1,7 \cdot 10^{15} \ m/s^2$$

تطبيق:

أحسب تسارع الالكترون الذي يتحرك خلال نفس الحقل المغناطيسي وبنفس السرعة التي يتحرك بها هذا البروتون.

الحل:

إن الإلكترون يتعرض لنفس القوة المغناطيسية التي يتعرض لها البروتون وهي:

$$F = q \ \vec{v} \ B \ \sin \theta$$

$$F = -1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 8.10^{6} \cdot 2,5 \cdot \sin 60^{o} = -2,8 \cdot 10^{-12} \ N$$

ولكن يختلف تسارعه قيمة واتجاهاً لاختلاف كتلته وشحنته بالإشارة فقط أي:

$$g = \frac{F}{m} = \frac{-2,8 \cdot 10^{-12}}{9,1.10^{-31}} = -3.10^{18} \ m/s^2$$

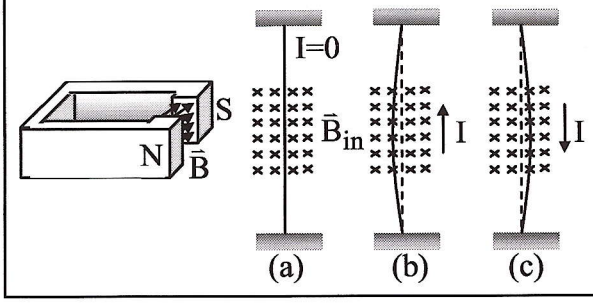
٨-٢ - القوة المغناطيسية المطبقة على تيار يسري في ناقل

Magnetic Force on a Current-Carrying Conductor:

إذا كانت القوة المغناطيسية تؤثر على جسيم مفرد مشحون يتحرك في حقل مغناطيسي، فإنه لن يكن من المستغرب أو المفاجئ أن السلك الذي ينقل تيار، سيخضع أيضاً لقوة عندما يوضع في حقل مغناطيسي. وينتج هذا من حقيقة أن التيار عبارة عن مجموعة كبيرة من الجسيمات المشحونة في حالة حركته، وبالتالي فإن محصلة القوة المؤثرة على السلك تتعلق بمجموع القوى المفردة المطبقة على الجسيمات المشحونة. إن تراكم القوى المطبقة على الجسيمات المشحونة داخل السلك يمثل مقداراً لقوة مطبقة على السلك من خلال التصادمات مع الذرات التي تشكل هذا السلك.

قبل أن نتابع مناقشتنا لا بد من تقديم إيضاح يتعلق برسم الأشكال التوضيحية، فللدلالة على اتجاه $\vec{B}$ عندما لا يكون متوضعاً في مستوي صفحة الرسم ولا نريد استخدام رسماً فراغياً نستخدم الاصطلاح التالي: إما أن يكون $\vec{B}$ موجهاً من القارئ إلى صفحة الرسم كما في الشكل (6-8) فإننا نرى ذيل السهم ونستخدم إشارة الضرب للدلالة عليه، وإما أن يكون موجهاً من صفحة الرسم باتجاهنا فإننا نرى رأس السهم ونستخدم نقطة للدلالة عليه، أما إذا كان الحقل متوضع في مستوي الصفحة، فإننا نستخدم كما هو معروف أسهماً ترسم في مستوي الصفحة.

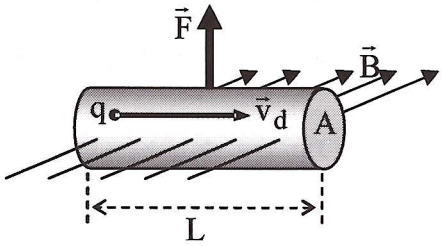
يمكن التحقق من القوة المؤثرة على سلك يسري فيه تيار عن طريق التعليق الشاقولي لسلك بين مربطين ووضعه بين قطبي مغناطيس نضوي موضوع بشكل أفقي قطبه الجنوبي قريب من القارئ وقطبه الشمالي بعيد عنه كما في الشكل (6-8)، الذي يوجه فيه الحقل المغناطيسي من القارئ إلى الصفحة.



الشكل (6-8):
القوة المغناطيسية الناتجة عن الحقل المغناطيسي وحركة الشحنات في الناقل يتراكم تأثيرها الذي يعمل على حرف السلك يميناً أو يساراً بحسب جهة التيار المار فيه.

عندما يكون التيار في السلك مساو للصفر، يبقى السلك شاقولياً كما في الشكل (8-6-a)، فعندما يسري التيار في السلك متجهاً نحو الأعلى كما في الشكل (8-6-b) ينحرف السلك في هذه الحالة نحو اليسار، وإذا عكسنا جهة التيار كما في الشكل (8-6-c) ينحرف السلك نحو اليمين.

يمكن التعبير عن المناقشة السابقة بعلاقات كمية، عن طريق اعتبار قطعة مستقيمة من سلك طولها L ومقطعها A يمر فيها تيار I موجودة ضمن حقل مغناطيسي متجانس $\vec{B}$ كما في الشكل (8-7).



الشكل (7-8):
القوة المغناطيسية الناتجة عن الحقل المغناطيسي وحركة الشحنات في الناقل يتراكم تأثيرها الذي يعمل على تحريك قطعة الناقل للأعلى.

القوة المغناطيسية المؤثرة على الشحنة q التي تتحرك بسرعة حدية $\vec{V}_d$ هي $q\vec{V}_d \wedge \vec{B}$، لإيجاد القوة الكلية المؤثرة على السلك، نضرب القوة المؤثرة على شحنة واحدة بعدد الشحن الموجودة في هذه القطعة من السلك، بما أن حجم هذه القطعة هو AL وأن عدد الشحن في واحدة الحجم منها هو n فإن عدد الشحن فيها هو nAL. وعليه فإن القوة المغناطيسية الكلية المؤثرة على السلك هي:

$$\vec{F} = q\ (\vec{v}_d \wedge \vec{B})\ nAL$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة بشكل مناسب أكثر وذلك بملاحظة أن علاقة شدة التيار في السلك مع عدد الشحنات في الحجم v_dA هي:

$$I = n\,q\,v_d\,A$$

ومنه نستنتج أن:

$$\vec{F} = I\ \vec{L} \wedge \vec{B} \qquad (8\text{-}3)$$

حيث $\vec{L}$ شعاع له اتجاه التيار I وقيمته تساوي طول القطعة L.

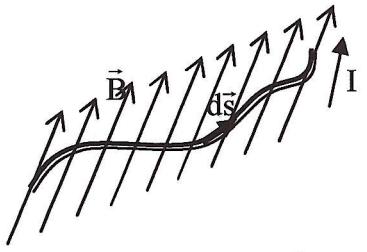
لاحظ أن هذه العبارة تطبق فقط على قطعة مستقيمة من سلك موضوع في حقل مغناطيسي متجانس.

نأخذ قطعة من سلك ذات شكل عشوائي متجانسة المقطع موضوعة في حقل مغناطيس كما في الشكل (8-8) ينتج من العلاقة (8-3) أن القوة المغناطيسية المؤثرة على كل قطعة صغيرة بوجود الحقل هي:

$$d\vec{F} = I\ \overrightarrow{ds} \wedge \vec{B} \qquad (8\text{-}4)$$

حيث تتجه $d\vec{F}$ من الصفحة إلى القارئ من أجل الاتجاهات المفروضة في الشكل (8-8). نستطيع اعتبار العلاقة (8-4) أحد تعار يف الحقل $\vec{B}$ ، أي أن

الحقل يمكن أن يعرف بدلالة القوة المطبقة على عنصر التيار، وهذه القوة قابلة للقياس وتكون القوة أعظمية عندما يكون $\vec{B}$ عمودياً على هذا العنصر ومساوية للصفر عندما يكون موازٍ له. وللحصول على القوة الكلية المطبقة على السلك نكامل العلاقة (8-4) على طول السلك:



الشكل (8-8):
قطعة من سلك يمر فيها تيار ذات شكل عشوائي معرضة لحقل مغناطيسي فتخضع لقوة مغناطيسية متجهة من الصفحة للقارئ.

$$\vec{F} = I \int_a^b d\vec{s} \wedge \vec{B} \qquad (8\text{-}5)$$

حيث a, b تمثلان نهايتي السلك. عندما إجراء هذا التكامل والمرور نقطة فنقطة على طول السلك، فإن قيمة الحقل المغناطيسي واتجاهه مع شعاع الانتقال $d\vec{s}$ يمكن أن تختلف باختلاف نقاط السلك.

لنأخذ الآن حالتين خاصتين تتضمنان تطبيقات على العلاقة (8-5) ويؤخذ الحقل المغناطيسي ثابت في القيمة والاتجاه في كلتا الحالتين.

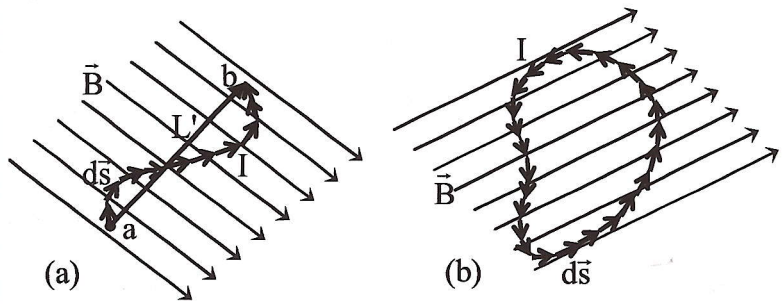
الحالة الأولى: ليكن سلك منحني ينقل التيار I موضوعاً في حقل مغناطيسي منتظم كما في الشكل (8-9a). بما أن الحقل منتظم فإنه عند استخدام العلاقة (8-5) يمكن إخراجه خارج إشارة التكامل.

من العلاقة (8-5) نحصل على ما يلي:

$$\vec{F} = I\left(\int_a^b d\vec{s} \right) \wedge \vec{B} \qquad (8\text{-}6)$$

لكن الكمية $\int_a^b d\vec{s}$ تمثل شعاع المحصلة لجميع عناصر الانزياح من a إلى b، ومن قانون جمع الأشعة فإن المحصلة $\vec{L}$ تساوي الشعاع الموجه من a إلى b وعليه نكتب:

$$\vec{F} = I\ \vec{L} \wedge \vec{B} \qquad (8\text{-}7)$$



الشكل (9-8):

(a) ناقل منحني يحمل التيار I موجود في حقل مغناطيسي منتظم. تكون القوة المغناطيسية المؤثرة على الناقل مكافئة للقوة المغناطيسية المؤثرة على قطعة مستقيم طولها L' تصل بين النقطتين a, b.

(b) حلقة مغلقة شكلها كيفي تنقل تيار وموجودة في حقل مغناطيسي متجانس (منتظم). إن القوة المغناطيسية المؤثرة على العروة مساوية الصفر.

الحالة الثانية: نأخذ الآن حالة حلقة مغلقة من سلك ناقل يسري فيها تيار ومتوضعة في حقل مغناطيسي منتظم كما في الشكل (9b-8)، مرة أخرى يمكننا هنا التعبير عن القوة بالعلاقة (6-8) وفي هذه الحالة يجب أن تؤخذ المحصلة الشعاعية لأشعة الانزياح على كامل الحلقة المغلقة أي أن:

$$\vec{F} = I\left(\oint d\vec{s}\right) \wedge \vec{B}$$

بما أن جميع أشعة الانزياح تشكل متعدد أضلاع مغلق. فإن مجموع الأشعة يجب أن تساوي الصفر. بما أن $\oint d\vec{s} = 0$ نستنتج أن $\vec{F} = 0$ أي أن:

القوة المغناطيسية الكلية المؤثرة على أي عروة تيار مغلقة موجودة في حقل مغناطيس منتظم تساوي الصفر.

مثال (٨-١): القوة المؤثرة على ناقل على شكل نصف دائرة

حُني سلك على شكل نصف دائرة الدائرة نصف قطرها R لتشكل دارة مغلقة يمر فيها التيار I. تتوضع هذه الدارة في المستوي xy الذي يحوي حقل مغناطيس منتظم

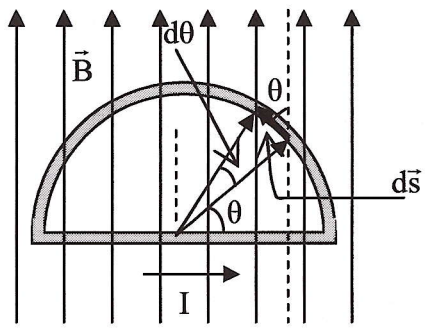
بالاتجاه الموجب للمحور y كما في الشكل (10-8) والمطلوب: أوجد القوة المغناطيسية المؤثرة على الجزء المستقيم من السلك ومن على الجزء المنحني منه.

الحل:

إن قيمة القوة المؤثرة على الجزء المستقيم من السلك هي:

$$F_1 = I\ L\ R\ B$$

وذلك لأن $L = 2\ R$ والسلك عمودي على $\vec{B}$ ، وأن اتجاه القوة وفق الاتجاه الخارج من الصفحة لأن $\vec{L} \wedge \vec{B}$ متجه نحو الخارج بحسب قاعدة الجداء الشعاعي وأن جهة $\vec{L}$ من جهة التيار.



الشكل (10-8):
إن محصلة القوة المؤثرة على عروة التيار المغلقة الموجودة في حقل مغناطيس منتظم، تساوي الصفر. في هذه الحالة تكون القوة المؤثرة على القسم المستقيم هي وتتجه نحو الخارج، بينما القوة المؤثرة على القسم المنحني هي أيضاً وتتجه نحو الداخل.

لايجاد القوة المؤثرة على الجزء المنحني، يجب أن تستخدم أولاً العلاقة (6-8) من أجل القوة المؤثرة على العنصر $d\vec{s}$ ، فإذا كانت هي الزاوية θ بين هذا العنصر والحقل كما في الشكل (10-8) فإن قيمة هذه القوة هي:

$$dF_2 = I\ |\ d\vec{s} \wedge \vec{B}\ | = I\ B\ \sin\ \theta\ \ ds$$

حيث ds هو الطول العنصري الصغير مقاساً على طول قوس الدائرة. لمكاملة العلاقة السابقة يجب أن نعبر عن ds بتابعية θ. بما أن $s = r\ \theta$ فإن $ds = r\ d\theta$ ويمكن بالتالي كتابة العلاقة السابقة كما يلي:

$$dF_2 = I\ B\ \sin\ \theta\ \ R d\ \theta$$

للحصول على القوة الكلية على الجزء المنحني يجب تحصيل مساهمات جميع العناصر، أي أنه يجب مكاملة العلاقة السابقة. لاحظ أن اتجاه القوة على كل عنصر هو نفسه (ثابت) باتجاه داخل الصفحة، وعليه فإن القوة المحصلة المؤثرة على القسم المنحني

من السلك يجب أيضاً أن تكون باتجاه داخل الصفحة، وبالمكاملة بين الحدين $\theta=0$ و $\theta=\pi$ الذين يحدان نصف الدائرة نجد ما يلي:

$$F_2 = I\,B\,R \int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta = I\,B\,R\,[-\cos]_0^{\pi}$$

$$F_2 = -I\,B\,R\,(\cos\pi - \cos 0) = -I\,B\,R(-1-1) = -2I\,R\,B$$

نلاحظ أن القوتين $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ متجهتين باتجاه داخل الصفحة وخارجها على الترتيب، لذلك فأن محصلة القوى المؤثرة على هذه الحلقة المغلقة تساوي الصفر. هذه النتيجة مضمنة في الحالة الثانية المشروحة أعلاه.

٨-٣- عزم دوران عروة تيار في حقل مغناطيسي منتظم

:The Current Loop Torque in Uniform Magnetic Field

أوضحنا في الفقرة السابقة كيف تؤثر قوة على ناقل يسري فيه تيار عندما يوضع هذا الناقل في حقل مغناطيسي، وسنوضح الآن كيف يوجد عزم دوران مطبق على عروة تيار موضوعة في حقل مغناطيسي.

إن نتائج هذه الدراسة ذات قيمة عملية عظيمة وهذا ماسنراه عند مناقشة المولدات في الفصل القادم.

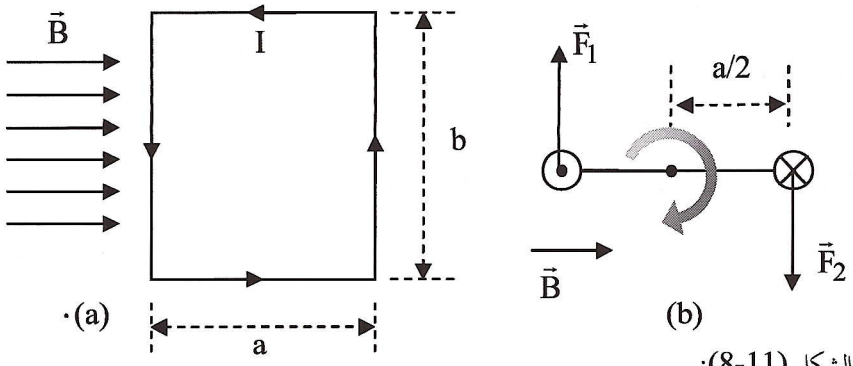
نأخذ عروة على شكل مستطيل يسري فيه تيار I بوجود حقل مغناطيسي منتظم موجه بشكل موازي لمستوي العروة كما في الشكل (8-11-a).

إن القوى المطبقة على الضلعين الذين طول كل منهما a تساوي الصفر لأن هذين الجزئين من السلك موازيين للحقل المغناطيسي وبالتالي $d\vec{s} \wedge \vec{B} = 0$ من أجل هذين الضلعين. أما قيمة كل من القوتين المطبقتين على الضلعين الذين طول كل منهما b هي:

$$F_1 = F_2 = I\ b\ B$$

إن اتجاه القوة $\vec{F}_1$ المؤثرة على الضلع الأيسر للعروة هو نحو خارج الصفحة، أما اتجاه $\vec{F}_2$ المؤثرة على الضلع الأيمن فهو داخل الصفحة. بالنظر إلى العروة من الأسفل

بالوقوف تحتها والنظر نحو الأعلى، فإننا سنرى المشهد الموضح في الشـــكل (8-11-b) الذي يبين القوتين المؤثرتين $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.



الشكل (8-11):

(a) منظر أمامي لعروة على شكل مستطيل موضوعة في حقل مغناطيس منتظم. لا توجد قوى تـــؤثر على ضلعي عرض المستطيل الموازيان لـــ $\vec{B}$ لكن توجد قوى تؤثر على ضلعي الطول.

(b) منظر رأسي من الأسفل للعروة يظهر أن القوتين المؤثرتين $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ على ضلعي طول المســـتطيل تشكلان مزدوجة، تديران الحلقة وفق عقارب الساعة.

وإذا افترضنا أن العروة متمحورة بحيث يمكنها الدوران حول النقطة o فإننا نجد بأن هاتين القوتين $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ تولدان عزم مزدوجة حول المركـــز o يـــؤدي إلى دوران العروة مع اتجاه عقارب الساعة، تعطى قيمة عزم هذه المزدوجة بالعلاقة:

$$\tau_{max} = F_1 \frac{a}{2} + F_2 \frac{a}{2} = IbB(\frac{a}{2} + \frac{a}{2})$$

$$\tau_{max} = IbBa$$

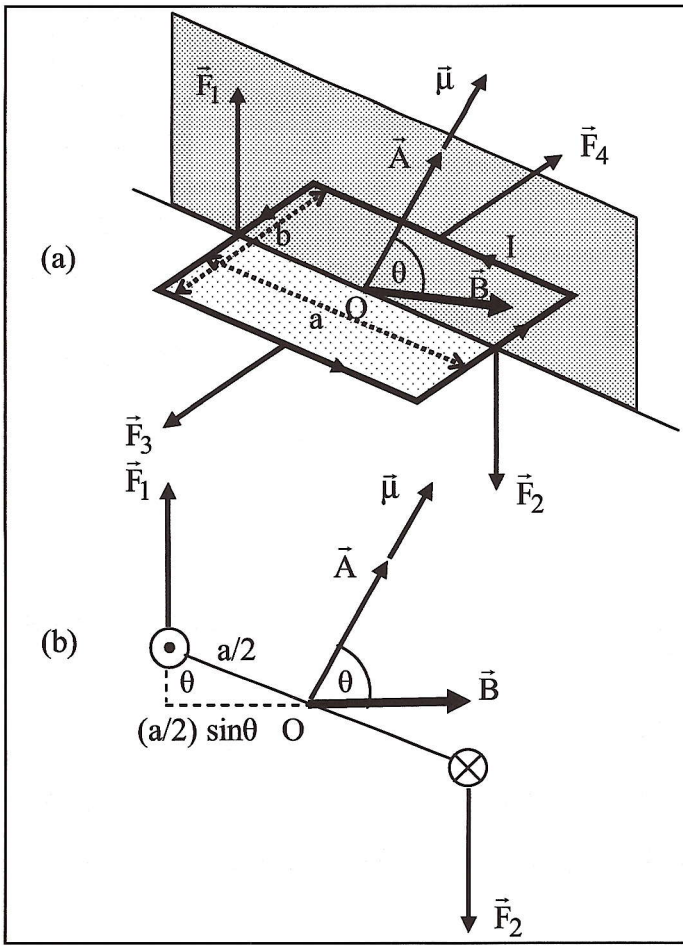
حيث أن ذراع العزم حول o لكل من القوتين هو $\frac{a}{2}$ بما أن سطح العروة هـــو ab = A فإنه يمكن كتابة العزم الأعظمي للمزدوجة كما يلي:

$$\tau_{max} = IAB \qquad (8\text{-}8)$$

من الجدير ملاحظته هنا هو أن هذه النتيجة صالحة فقـــط عنـــدما الحقـــل المغناطيسي موازٍ لمستوي العروة. وفقاً للجهة المختارة للتيار يكون اتجاه دوران العروة باتجاه دوران عقارب الساعة عندما ننظر من أسفل إلى أعلى، أما عندما يعكس اتجـــاه

التيار فإن القوى تنعكس وينعكس معها اتجاه الدوران ليصبح بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

لنفترض الآن أن حقل مغناطيسي منتظم يصنع زاوية θ مع الخط العمودي على مستوي العروة كما في الشكل (8-12-a). نفترض للسهولة أن $\vec{B}$ عمودي على الضلعين الذين طول كل منهما b كما في الشكل (8-12-b)، في هذه الحالة، تتفانى القوتان $\vec{F}_4, \vec{F}_3$ (تعدم إحداهما الأخرى) المؤثرتان على الضلعين الذين طول كل منهما a ولاتولدان مزدوجة لأنهما تمران عبر المبدأ (نقطة الدوران) وتقعان إحداهما على امتداد الأخرى. لكن القوتان المؤثرتان على الضلعين الذين طول كل منهما b وهما $\vec{F}_2, \vec{F}_1$ تشكلان مزدوجة وتولدان عزم دوران حول أية نقطة.



الشكل (8-12):
(a) منظر فراغي لعروة تيار على شكل مستطيل موضوعة في حقل مغناطيس منتظم يصنع ناظمها زاوية θ معه. القوتان المؤثرتان على ضلعي طول المستطيل تتفانيان بينما تشكل القوتان القوتان المؤثرتان على ضلعي عرض المستطيل مزدوجة. الموازيان لـ $\vec{B}$ لكن توجد قوى تؤثر على ضلعي الطول.
(b) منظر جانبي للعروة، العزم المغناطيسي يكون باتجاه ناظم العروة.

بالاستناد إلى الشكل (8-12-a) نلاحظ أن ذراعي العزم لـ $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ حول النقطة o يساويان $\frac{a}{2}\text{Sin}\theta$، وبما أن $F_1 = F_2 = I\ b\ B$ فإن محصلة عزم الدوران حول o هي:

$$\tau = F_1\frac{a}{2}\text{Sin}\theta + F_2\frac{a}{2}\text{Sin}\theta = IbB(\frac{a}{2}\text{Sin}\theta) + IbB(\frac{a}{2}\text{Sin}\theta)$$

$$\tau = I\,a\,b\,B\ \text{Sin}\theta = I\,A\,B\text{Sin}\theta$$

حيث $A = a\,b$ هي مساحة العروة.

تظهر هذه النتيجة أن عزم المزدوجة يأخذ قيمته العظمى $I\ A\ B$ عندما يكون الحقل موازٍ لمستوي العروة ($\theta = 90^\circ$ بين الحقل وناظم العروة)، كما رأينا عند مناقشة الشكل (8-11)، ويأخذ القيمة صفر عندما يكون الحقل عمودي على مستوي العروة ($\theta = 0$ بين الحقل وناظم العروة)، وكما نرى في الشكل (8-12) تسعى العروة للدوران في اتجاه تناقص قيمة الزاوية θ (أي تدور بحيث ناظم مستوي العروة يدور باتجاه الحقل المغناطيسي).

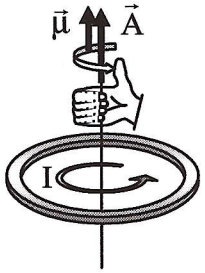
إن العبارة الشعاعية المناسبة لعزم الدوران تكون على النحو التالي:

$$\vec{\tau} = I\vec{A} \wedge \vec{B} \qquad (8\text{-}9)$$

حيث $\vec{A}$ شعاع عمودي على مستوي العروة قيمته تساوي سطح العروة ويحدد اتجاهه بقاعدة اليد اليمنى كما هو موضح في الشكل (8-13)، بتدوير أصابع اليد اليمنى مع اتجاه التيار في العروة، فإن الإبهام يشير إلى اتجاه $\vec{A}$.

يعرف الجداء $I\vec{A}$ بأنه العزم المغناطيسي للعروة ورمزه $\vec{\mu}$ أي أن:

$$\vec{\mu} = I\ \vec{A} \qquad (8\text{-}10)$$



الشكل (8-13):
قاعدة اليد اليمنى في تحديد اتجاه الشعاع $\vec{A}$، العزم المغناطيسي $\vec{\mu}$ له نفس اتجاه $\vec{A}$.

إن واحدة العزم المغناطيسي في الجملة الدولية هي $A.m^2$ (أمبير متر مربع)، وباستخدام هذا التعريف، يمكن كتابة عزم المزدوجة كما يلي:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} \qquad (8\text{-}11)$$

لاحظ أن هذه النتيجة مطابقة للعزم المطبق على ثنائي الأقطاب الكهربائي بوجود حقل كهربائي $\vec{E}$ حيث كان لدينا $\vec{\tau} = \vec{P} \wedge \vec{E}$، و P عزم الثنائي.

بالرغم من أننا حصلنا على العزم من أجل توجيهات خاصة لـ $\vec{B}$ بالنسبة للعروة، فإن العلاقة $\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ صالحة من أجل أي توجيه. إضافةً لذلك، بالرغم من أننا اشتقينا علاقة عزم المزدوجة من أجل عروة على شكل مستطيل فإن النتيجة صالحة من أجل أي عروة بأيّ شكل كان.

إذا احتوت وشيعة على N لفة من سلك، يسري في كلٍ منها نفس التيار، ولكل منها السطح نفسه، فإن العزم المغناطيسي الكلي للوشيعة هو جداء عدد اللفات في العزم المغناطيسي للفة الواحدة، بمعنى أن عزم المزدوجة المؤثرة على وشيعة مؤلفة من N لفة أكبر بـ N مرة من ذاك الحاصل على لفة واحدة أي أن:

$$\vec{\tau} = N\vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

مثال (٨-٣): العزم المغناطيسي للوشيعة:

وشيعة على شكل مستطيل بعداه 5.4cm , 8.5cm تحوي 25 لفة من سلك، يسري في الوشيعة تيار قيمته 15mA. المطلوب:

a. احسب قيمة عزمها المغناطيسي.

b. افترض أن قيمة الحقل المغناطيسي هي 0.35T ومطبق بشكل موازي للعروة، ما هي قيمة عزم المزدوجة المطبق على العروة.

الحل:

a. تعطى قيمة العزم المغناطيسي على عروة تيار بالعلاقة:

$$\mu = I\,A$$

نحسب قيمة A:

$$A = 0.054 \times 0.058 = 4.59 \times 10^{-3}\ m^2$$

بما أن للوشيعة 25 لفة وعلى فرض أن جميع اللفات متساوية السطوح، أي سطح كل منها A فإن:

$$\mu_{coil} = N\ I\ A = 25\ .\ (15.10^{-3})\ .\ (4{,}95.10^{-3}) = 1{,}72.10^{-3}\ Am^2$$

b. يعطى عزم المزدوجة بالعلاقة (8-11) $\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ في هذه الحالة يكون $\vec{B}$ عمودي على $\vec{\mu}_{coil}$ وعليه فإن:

$$\tau = \mu_{coil}\ .\ B = (1{,}72.10^{-3})\ .\ (O{,}35) = 6{,}02.10^{-4}\ Nm$$

لاحظ أن ذلك يمثل المبدأ الأساسي لعمل وشيعة الفلغانومتر.

تمرين: أثبت أن الواحدة Am^2T تعادل Nm.

تطبيق:

احسب قيمة عزم المزدوجة على الوشيعة عندما يصنع ذلك الحقل المغناطيسي مع $\vec{\mu}_{coil}$ زاوية مقدارها: اولاً: 60°. ثانياً: 0°.

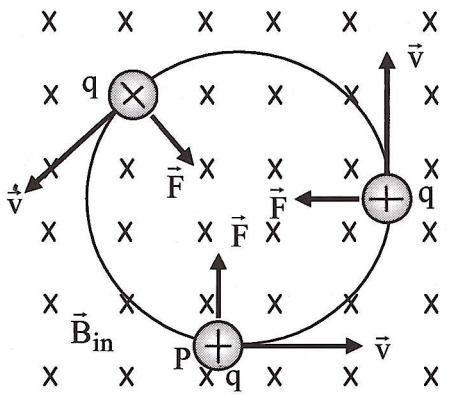
٨-٤- حركة جسيم مشحون موضوع في حقل مغناطيسي منتظم

Motion of Charged Particle in a Uniform Magnetic Field:

وجدنا في الفقرة (1-8) أن القوة المغناطيسية تؤثر على الجسيم المشحون الذي يتحرك في حقل مغناطيسي عمودي على سرعة هذا الجسيم وأن العمل الذي يقوم به الجسيم والناتج عن القوى المغناطيسية يساوي الصفر. لنأخذ الآن حالة خاصة: جسيم مشحون إيجابياً يتحرك في حقل مغناطيسي منتظم بسرعة إبتدائية عمودية على هذا الحقل. ولنفترض أن الحقل المغناطيسي يتجه باتجاه الصفحة. يظهر الشكل (14-8) أن: الجسيم المشحون يتحرك في دائرة مستويها عمودي على الحقل المغناطيسي.

يتحرك الجسيم وفق هذا المسار لأن القوة المغناطيسية $\vec{F}$ ناتجة عن $\vec{B}$, $\vec{v}$ المتعامدين ولها قيمة ثابتة تساوي qvB. عندما تحرف هذه القوة الجسيم يتبع ذلك تغير اتجاه السرعة $\vec{v}$ والقوة المغناطيسية $\vec{F}$ كما في الشكل (14-8). وينتج عن ذلك أن القوة $\vec{F}$ تؤثر كقوة مركزية (تتجه نحو مركز الدائرة)، وهي تغير فقط اتجاه $\vec{v}$ ولا تغير من قيمتها. يكون اتجاه الدوران، كما هو موضح في الشكل (14-8) بعكس

اتجاه دوران عقارب الساعة من أجل الشحنة الموجبة. أما لو كانت سالبة، لكان اتجاه الدوران وفق عقارب الساعة. بما أن للقوة $\vec{F}$ اتجاه مركزي فإنه يمكننا وضع قيمتها qvB مساوية لقوة الطرد المركزي (القوة النابذة) المساوية للكتلة الجسيم مضروبة بالتسارع المركزي ومن قانون نيوتن الثاني نجد:



الشكل (14-8):
عندما تكون سرعة الجسيم المشحون عمودية على الحقل المغناطيسي المنتظم يتحرك الجسيم على مسار دائري يكون مستويه عمودي على الحقل الذي يتجه في هذه الحالة إلى داخل الصفحة، والشحنة افترضت موجبة، تتجه القوة المغناطيسية في هذه الحالة دائماً باتجاه مركز الدائرة.

$$F = qvB = m\frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{m\ v}{q\ B} \qquad (8\text{-}12)$$

أي أن نصف قطر المسار يرتبط خطياً بكمية الحركة للجسيم ويتناسب عكساً مع قيمة الحقل المغناطيسي B. إن التردد الزاوي الجسيم المشحون هو:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \qquad (8\text{-}13)$$

ودور حركة الجسيم المشحون (زمن الدورة الواحدة) الذي يساوي محيط دائرة المسار مقسوم على قيمة سرعة الجسيم أي:

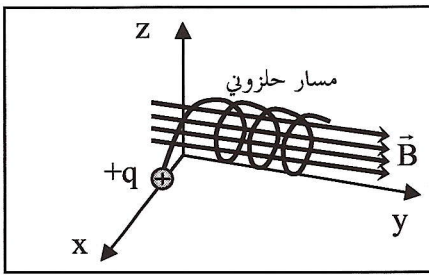
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \qquad (8\text{-}14)$$

تظهر هذه النتائج أن التردد الزاوي ودور الحركة الدائرية لا يرتبطان بقيمة سرعة الجسيم ولا بنصف قطر المدار، يسمى التردد $\upsilon = \frac{\omega}{2\pi}$ في معظم الأحيان

التردد الدوراني لأن الجسيمات المشحونة تدور في المسرعات التي تدعى سيكلوترون (مسرع دوراني cyclotron)، ستناقش ذلك لاحقاً.

إذا تحرك الجسيم المشحون في حقل مغناطيسي منتظم وكانت سرعته تصنع زاوية ما اتجاه هذا الحقل مع فإن مساره سيكون بشكل لولبي فعلى سبيل المثال إذا كان الحقل في الاتجاه الموجب للمحور x كما في الشكل (15-8) فإنه لا توجد مركبة للقوة وفقاً لهذا الاتجاه ولذلك فإن $a_x=0$ وبالتالي فإن مركبة سرعة الجسيم وفق للمحور x تبقى ثابتة. تسبب القوة المغناطيسية $q\ \vec{v} \wedge \vec{B}$ من ناحية أخرى تغير المركبتين v_y, v_z مع الزمن، والحركة الناتجة تكون لولبية لها محور موازٍ للحقل أي للمحور x وأن مسقط هذا المسار على المستوي yz هو دائرة ومسقط هذا المسار على كل من المستويين zx xy يكون جيبي، وتطبق جميع العلاقات (8-14), (8-13), (8-12) هنا أيضاً ويعطي تطبيقها أن قيمة السرعة v تستبدل بالعلاقة:

$$v = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$$



الشكل (15-8):
الجسيم المشحون الذي لشعاع سرعته مركبة موازية للحقل المغناطيسي المنتظم يتحرك وفق مسار لولبي.

مثال (٨-٤): بروتون يتحرك عمودياً على حقل مغناطيسي منتظم

يتحرك بروتون على مسار دائري نصف قطره 14 cm في حقل مغناطيسي منتظم قيمته 0,35 T موجه بشكل عمودي على سرعة هذا البروتون، والمطلوب أوجد قيمة سرعة دوران هذا البروتون.

الحل:

من العلاقة (12-8) نحصل على ما يلي:

$$v = \frac{qBr}{m} = \frac{(1,602\ .10^{-19})\,(o,35)\,(124\ .10^{-2})}{1,67\ .10^{-27}} = 4,7.10^{6}\ m/s$$

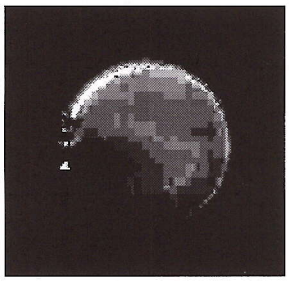
تطبيق: إذا تحرك الكترون عمودي على نفس الحقل المغناطيسي بهذه السرعة، فما هو نصف قطر مساره الدائري. الجواب: 7.6×10^{-5}

مثال (٨–٥): انحناء حزمة الكترونات associated

في تجربة مصممة لقياس الحقل المغناطيسي المتجانس المتولد عن مجموعة من الوشائع، تسرع الكترونات اعتباراً من السكون عبر فرق كمون 350 V. تعاير القيم المطبقة على الحزمة ليكون نصف حزمة الالكترونات الحاصلة 7,5 cm كما هو موضح في الشكل (16-8). بافتراض أن الحقل المغناطيسي عمودي على الحزمة، المطلوب:

(a) ما هي قيمة الحقل المغناطيسي.

(b) ما التردد الزاوي للالكترونات.



الشكل (16-8):
انحناء حزمة الكترونات في حقل مغناطيسي. يتضمن الأنبوب غاز بضغط منخفض جداً، تصبح حزمة الالكترونات مرئية عند تصادم الالكترونات مع ذرات الغاز التي تولد بدورها ضوء مرئي.

الحل:

يجب أن نحسب أولاً سرعة الالكترونات بالاعتماد على حقيقة أن الزيادة في طاقتها الحركية يجب أن تساوي التغير في طاقتها الكامنة (اعتماداً مبدأ انحفاظ الطاقة). نستخدم بعد ذلك العلاقة (12-8) لايجاد شدة الحقل المغناطيسي.

(a) بما أن الطاقة الحركية الابتدائية والنهائية هما: $K_i=0\ ;\ K_f=mv^2/2$ فإن:

$$\frac{mv^2}{2} = |e|\,V \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2\,|e|\,V}{m}} = \sqrt{\frac{2\,(1{,}602.10^{-19})\,(350)}{(9{,}11.10^{-31})}} = 1{,}11.10^{7}\ m/s$$

ونستخدم الآن العلاقة (12-8) لإيجاد B:

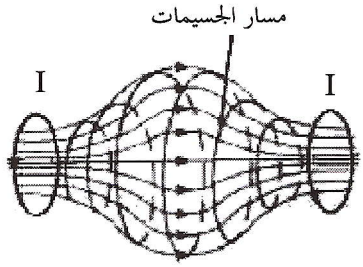
$$B = \frac{mv}{|e|\,r} = \frac{(9{,}11.10^{-31})\,(1{,}11.10^{7})}{(1{,}602.10^{-19})(0{,}075)} = 8{,}4.10^{-4}\ T$$

(b) باستخدام العلاقة (13-8) نجد أن:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{(1{,}11.10^{7})}{(0{,}075)} = 1{,}5.10^{8}\ rad/s$$

تطبيق: ما هو دور الحركة الدورانية للالكترون.

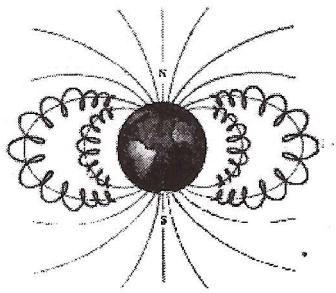
عندما تتحرك الجسيمات المشحونة في حقل مغناطيسي غير منتظم، فإن حركتها تكون معقدة على سبيل المثال، إذا كان الحقل المغناطيسي شديد في الطرفين وضعيف في الوسط كما في الشكل (17-8).



الشكل (17-8):
جسيم مشحون يتحرك ضمن حقل مغناطيسي غير منتظم. مسار الجسيم لولبي حول الحقل يتأرجح بين نقطتيه الطرفيتين.

يمكن لجسيم مشحون أن يتحرك جيئة وذهاباً بين نقطتين طرفيتين. يمكن توليد هذا الحقل المغناطيسي باستخدام عروتي تيار كما في الشكل (17-8). يبدأ الجسيم في هذه الحالة من إحدى نهايتي الحقل ويتحرك على طول خطوط الحقل بحركة لولبية حتى تصل النهاية الأخرى للحقل. وهناك ينعكس مساره ويعود راجعاً بحركة لولبية أيضاً. يعرف هذا التشكيل بالزجاجة المغناطيسية، لأن الجسيمات المشحونة يمكن أن تؤسر (تحتجز) ضمنها. يستخدم هذا التركيب في حصر البلازما. إن مثل هذه الطريقة لحصر البلازما يمكن أن تلعب دوراً حاسماً في السيطرة على الالتحام النووي، الذي يمكن أن يزودنا بمنبع طاقة لانهائي. لكن لسوء الحظ فإن الزجاجة المغناطيسية لها مشاكلها فعندما يحتجز عدد كبير من الجسيمات فإن التصادمات فيما بينها يمكن أن تؤدي إلى تسربها خارج المنظومة.

تم اكتشاف حزم أشعة تتألف من جسيمات مشحونة معظمها الكترونات وبروتونات تحيط بالأرض على شكل كعكة دعيت باسم حزم أشعة فان ألين Jamse Van Allen الذي بقيادته اكتشفها فريق من الباحثين الفيزيائيين في العام 1958. يبين الشكل (18-8) هذه الحزم في هيئة تخطيطية.



الشكل (18-8):
أحزمة أشعة فان ألين تتألف من جسيمات مشحونة (الكترونات وبروتونات). تؤسر من قبل الحقل المغناطيسي الأرضي غير المنتظم ويمثل الخط اللولبي مسار الجسيمات.

إن الجسيمات التي تؤسر من قبل الحقل المغناطيسي الأرضي غير المنتظم تتحرك بحركة لولبية من قطب لآخر. تنشأ هذه الجسيمات بشكل رئيسي من الشمس، وبعضها يأتي من النجوم والأجسام السماوية، لذلك تدعى هذه الجسيمات بالأشعة الكونية، ويجب أن نعلم أن معظم الأشعة الكونية تغير مسارها بسبب الحقل المغناطيسي الأرضي ولا تصل الأرض. وعلى أية حال يتم أسر بعض هذه الجسيمات وهذا القسم هو الذي يشكل زجاجة فان ألين، عندما تكون هذه الجسيمات في الغلاف الجوي فوق القطبين فإنها تتصادم على الأغلب مع ذرات الغلاف الجوي مسببة إصدار ضوء مرئي، وهذا هو مصدر أضواء الشمال الجميلة التي تدعى الشفق القطبي، ويمكن رؤية هذه الظاهرة في القطبين الشمالي والجنوبي.

٨-٥- تطبيقات على حركة الشحنات في حقل مغناطيسي:

Applications of Chargs Motion in Magnetic Field:

سنشرح في هذه الفقرة بعض الأجهزة الهامة التي تتضمن حركة الجسيمات المشحونة في حقل مغناطيسي منتظم. من أجل حالات كثيرة، تتحرك الشحنة بسرعة v بوجود كل من الحقل الكهربائي $\vec{E}$ والحقل المغناطيسي $\vec{B}$ وعليه تخضع هذه

الشحنة لكلٍ من القوة الكهربائية $q\vec{E}$ والمغناطيسية $q\vec{V}\wedge\vec{B}$ وهكذا تكون القوة الكلية التي تدعى قوة لورانتز هي:

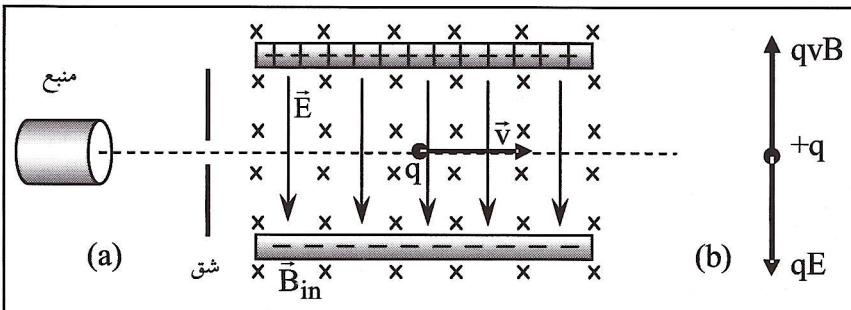
$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\wedge\vec{B} \qquad (8\text{-}15)$$

٨-٥-١- منتقي السرع Vilocity Selector:

من المهم في كثير من التجارب التي تتضمن حركة جسيمات مشحونة. الحصول على جسيمات تتحرك بسرع متماثلة. ويمكن تحقيق ذلك بتطبيق حقل كهربائي وحقل مغناطيسي موجهان كما هو موضح في الشكل (8-19).

يمكن الحصول على حقل كهربائي منتظم موجه نحو الأسفل بواسطة زوج من صفيحتين متوازيتين ومشحونتين بشحنتين متعاكستين. بينما يطبق الحقل المغناطيسي المنتظم بشكل عمودي داخل على الصفحة. ومن أجل q موجبة تكون القوة المغناطيسية $q\vec{v}\wedge\vec{B}$ موجهة نحو الأعلى بحسب قاعدة اليد اليمنى. وتكون القوة الكهربائية $q\vec{E}$ موجهة نحو الأسفل فإذا تم اختيار هذين الحقلين بحيث تتوازن القوة الكهربائية مع القوة المغناطيسية، فإن الجسم يتحرك وفق خط مستقيم أفقي عبر منطقة الحقلين، إذا عايرنا قيمة الحقلين بحيث:

$$q\,v\,B=q\,E$$



الشكل (8-19):

(a) منتقي السرع، عندما يكون الجسيم المشحون ايجابياً في منطقة فيها حقل كهربائي يتجه نحو الأسفل، وفيها أيضاً حقل مغناطيسي يتجه نحو داخل الصفحة. أي أن هذا الجسيم سيعاني من قوتين كهربائية تتجه نحو الأسفل ومغناطيسية تتجه نحو الأعلى.

(a) عند توازن هاتين القوتين إحداهما مع الأخرى، يتحرك هذا الجسيم وفق خط مستقيم أفقي عبر هذين الحلقتين.

فإننا نحصل على قيمة السرعة بالعلاقة التالية:

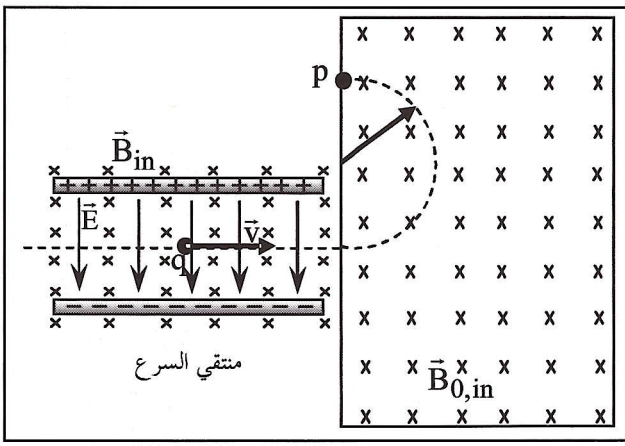
$$v = \frac{E}{B} \qquad (8\text{-}16)$$

إن الجسيمات التي لها هذه السرعة فقط هي التي تتمكن من عبور الحقلين الكهربائي والمغناطيسي المتعامدين دون أن تنحرف.

تؤثر القوة المغناطيسية على الجسيمات التي سرعتها أكبر من القيمة السابقة بقوة أكبر من القوة الكهربائية لذلك تنحرف هذه الجسيمات نحو الأعلى. أما تلك التي لها سرع أدنى من هذه القيمة فإنها تخضع لقوة كهربائية أشد من المغناطيسية لذلك تنحرف نحو الأسفل. وهكذا تكون الجسيمات التي حصلنا عليها ذات السرع الثابتة والمسار الأفقي المستقيم قد صُفِّيت (رُشِّحت) من بين جسيمات ذات السرع المختلفة.

٨-٥-٢- المطياف الكتلي The Mass Spectrometer:

يفصل المطياف الكتلي الأيونات (الشوارد) بحسب نسبة كتلتها إلى شحنتها. في عملية التحول الأولى التي تعرف بمطياف جسر الانحناء الكلي، تعبر حزمة من الأيونات عبر منتقي السرع وتدخل بعد ذلك حقل مغناطيسي منتظم $\vec{B}_0$، موجه باتجاه الصفحة كما في الشكل (8-20).



الشكل (8-20):
مطياف كتلي، ترسل الجسيمات المشحونة أولاً خلال منتقي سرع، ثم تدخل قطاع الحقل المغناطيسي $\vec{B}_0$ المتجه نحو داخل الصفحة والذي يسبب حركة الأيونات الموجبة بمسار نصف دائري، ثم تصدم حزمة الأيونات فيلم تصوير في النقطة p.

عند دخول الحزمة الحقل المغناطيسي الثاني تتحرك الأيونات وفق مسار نصف دائري نصف قطره r قبل أن تصدم لوح التصوير في p، من العلاقة (8-12) نجد:

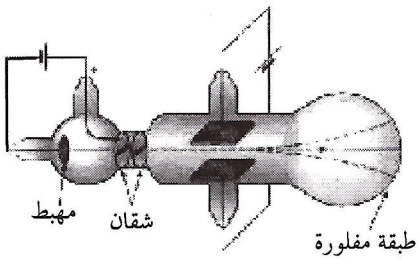
$$\frac{m}{q} = \frac{r B_0}{v}$$

وباستخدام العلاقة (8-16) نجد ما يلي:

$$\frac{m}{q} = \frac{r B_0 B}{E} \qquad (8\text{-}17)$$

مما سبق يمكن تعيين النسبة m/q عن طريق قياس نصف قطر الانحناء ومعرفة الحقول B , B_0 , E. يقيس الإنسان في الواقع كتل النظائر المختلفة لأيون ما، ويكون لهذه النظائر بالطبع الشحنة q نفسها، لذلك يمكن تحديد نسب الكتل في هذه الحالة حتى عندما تكون q غير معروفة.

لقد استخدم فيما بعد نوع مطور عن التقنية المذكورة أعلاه من قبل ثومسون (J.J. Thomson)، لقياس النسبة e/m للالكترون. يظهر الشكل (8-21) الجهاز الأساسي الذي استخدمه ثومسون.



الشكل (8-21):
جهاز ثومسون لقياس e/m، تسرع الكترونات من المهبط ثم تعبر من خلال شقين، وتحرف من قبل حقلين كهربائي ومغناطيسي (لا يظهر الحقل المغناطيسي في الشكل لكنه عمودي على الحقل الكهربائي)، تصدم الحزمة المحروفة بعد ذلك شاشة متألقة.

تسرع الكترونات من المهبط إلى المصعد، وتوجه بعد ذلك بواسطة شقوق موجودة في المصعد ويسمح لها بعد ذلك بالانتقال إلى المنطقة التي يتقاطع فيها بشكل متعامد حقلين كهربائي ومغناطيسي.

تتم في البداية معايرة التطبيق المتزامن للحقلين $\vec{B},\vec{E}$ بحيث يتم إنتاج حزمة غير منحرفة، إذا أغلق الحقل $\vec{B}$ فإن الحقل $\vec{E}$ بمفرده يسبب انحراف قابل للقياس على شاشة متألقة. من خلال معرفة مقدار الانزياح ومن القيمتين المقاسين لكل من $\vec{B},\vec{E}$، فإنه يمكن تحديد نسبة الشحنة إلى الكتلة. تمثل نتائج هذه التجربة الحاسمة اكتشافاً مفاده أن الإلكترون هو جسيم أساسي في الطبيعة.

٨-٥-٣- المسرع الدوراني The Cyclotron:

اخترع المسرع الدوراني في العام 1934 من قبل الفيزيائيين لورانس وليفينغستون E. O. Lawrence and M. S. Livingston، ويمكن بواسطة هذا المسرع تسريع الجسيمات المشحونة إلى سرع عالية جداً.

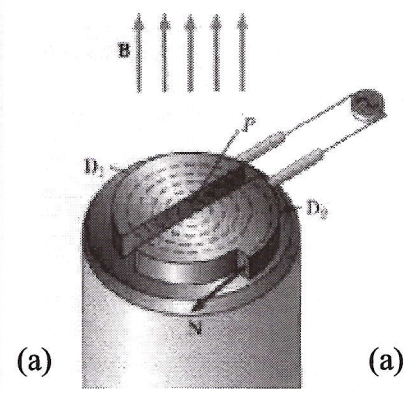
تلعب في هذا المسرع، كلٌ من القوى الكهربائية والقوى المغناطيسية دوراً أساسياً، وتستخدم الجسيمات عالية الطاقة الناتجة في قصف نوى أخرى وعن طريق ذلك إحداث تفاعلات نووية من أجل الأبحاث في مجال الفيزياء النووية وفي مجال إنتاج نوى نظائر صنعية، وكذلك من أجل إنتاج رقائق الكترونية عالية الجودة، وتستخدم العديد من المشافي أنواع المسرعات الدورانية لتسهيل إنتاج المواد المشعة المستخدمة في التشخيص والعلاج.

يظهر الشكل (22-8) شكلاً تخطيطاً للمسرع الدوراني، تتحرك الشحن ضمن وعاءين على شكل نصفي دائرة D_1 , D_2 ، اللتين تدعيان ديز (dees) بينهما فجوة.

يفرغ هذين الوعاءين لتقليل الطاقة الضائعة التي تنتج من التصادمات بين الأيونات وجزئيات الهواء، يطبق فرق كمون متناوب عالي التردد على الوعاءين، ويطبق حقل مغناطيسي منتظم، مولد من قبل مغناطيس كهربائي، بصورة عمودية على الوعاءين، تتحرك الأيونات الموجبة التي تحرر عند النقطة p، قرب مركز المغناطيس على مسار نصف دائري، وتصل عائدة إلى الفجوة في زمن مقداره $\frac{T}{2}$ حيث T هو الدور لفة كاملة، ويعطى T بالعلاقة (14-8).

يعاير تردد الكمون المطبق بحيث ينعكس استقطاب الوعاءين في زمن مساوٍ للزمن الذي يستغرقه الأيون ليكمل نصف دورة. إذا كان طور الكمون المطبق معاير بحيث يكون D_2 في كمون أدنى من D_1 بالمقدار V فإن الأيون سيسرع عبر الفجوة إلى D_2 وتزداد طاقته الحركية بالمقدار qV، ويتابع الأيون بعد ذلك حركته بمسار نصف دائري ذي نصف قطر أكبر (لأن سرعته قد ازدادت الأمر الذي يؤدي إلى زيادة نصف قطر مساره) وبعد زمن مقداره $\frac{T}{2}$ يصل ثانيةً إلى الفجوة، وفي هذا الوقت

ينعكس الكمون عبر الوعاءين بحيث يكون عند هذا الوقت D_1 سالب ويعطى الأيون بذلك دفعة أخرى عبر الفجوة.



(a)



(a)

الشكل (22-8):

(a) يتألف السيكلترون من منبع أيوني ومن وعاءين على شكل نصفي دائرة، يطبق عليهما كمون متناوب، ويستخدم حقل مغناطيسي يولده مغناطيس كهربائي.

(a) يمثل الشكل السيكلترون الأول الذي اخترع من قبل لوراتس وليغنستون عام 1934.

تستمر هذه الحركة بحيث يحصل الأيون من أجل كل نصف دورة على طاقة حركية إضافية مساوية لـ qV، وعندما يصبح نصف قطر مسار الإلكترون مساوياً تقريباً لنصف قطر الوعاءين، يتحرر الأيون ذو الطاقة العالية من هذه المنظومة من خلال فتحة خروج مبينة في الشكل (22-8).

من المهم هنا ملاحظة أن عمل السيكلترون يرتكز على حقيقة أن زمن الدورة الواحدة لا ترتبط بسرعة الأيون ولا بنصف قطر المدار. نستطيع الحصول على علاقة للطاقة الحركية للأيون عندما يخرج من السيكلترون بتابعية نصف القطر R للوعاءين، من العلاقة (12-8) نعلم أن:

$$v = \frac{q\,B\,R}{m}$$

ولذلك فإن الطاقة الحركية هي:

$$K = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{q^2\, B^2\, R^2}{2\,m} \qquad (8\text{-}18)$$

عندما تتجاوز طاقة الأيونات القيمة حوالي (20MeV) يتدخل المفعول النسبي ولا تبقى الكتل الأيونية ثابتة. ولهذا السبب يزداد دور المسار الدائري، ولا تبقى الأيونات الدائرة في نفس الطور مع الكمون المطبق.

تحل بعض المسرعات هذه المشكلة عن طريق تعديل دور الكمون المطبق بحيث يبقى في نفس الطور مع الأيون الدائر. في العام 1977 سرعت البروتونات حتى الطاقة 400GeV (حيث $1GeV = 10^9$ eV) في مسرع في مركز باتافيا (Batavia)، وتستخدم هذه المنظومة 954 مغناطيس ومحيط هذا المسرع 6.3km , (4.1 miles).

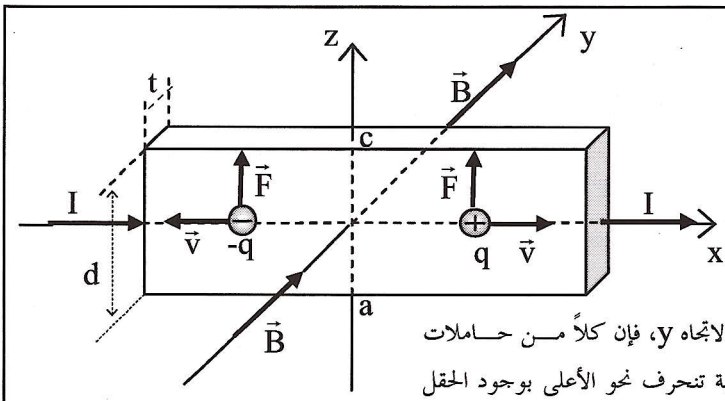
٨-٦- مفعول هول *The hall Effect:*

اكتشف الفيزيائي هول Edwin Hall في العام 1879 أنه عندما يسري تيار في ناقل موضوع في حقل مغناطيسي، يتولد كمون في الاتجاه العمودي على كلٍ من التيار والحقل المغناطيسي، تعرف هذه الظاهرة بمفعول هول، وتنتج من انحراف حاملات الشحنة إلى أحد جوانب الناقل بسبب القوة المغناطيسية التي تتعرض لها. إنها تعطي معلومات تتعلق بإشارة حاملات الشحنة وكثافتها، كما تقدم أيضاً تقنية مناسبة لقياس الحقول المغناطيسية.

تتألف المنظومة المخصصة للتحقق من مفعول هول من ناقل على شكل رقاقة مسطحة تنقل تيار I في الاتجاه x كما في الشكل (23-8). يطبق حقل مغناطيسي وفق الاتجاه y إذا كانت حاملات الشحنة هي الكترونات تتحرك وفق الاتجاه السالب لـ x بسرعة v_d، فإنها تخضع لقوة مغناطيسية $\vec{F}$ تتجه نحو الأعلى تؤدي إلى انحراف الالكترونات نحو الأعلى وتراكمها على الحافة العليا تاركةً زيادة في الشحن الموجبة على الحافة السفلى الشكل (a-24-8).

يستمر تراكم الشحن هذا بالتزايد حتى يتوازن الحقل الكهربائي الساكن مع القوى المغناطيسية المؤثرة على حاملات الشحنة. عندما يتم التوصل إلى شرط التوازن هذا فإن الالكترونات لا تستمر في الانحراف نحو الأعلى، يمكن استخدام مقياس فولت

أو مقياس كمون حساس موصول عبر العينة كما في الشكل (24-8)، لقياس فرق الكمون المتولد عبر الناقل، والذي يعرف بكمون هول V_H (Hall Voltage)، إذا كانت حاملات الشحنة موجبة، وتتحرك بالتالي وفق الاتجاه الموجب لـ x كما في الشكل (24-8-b)، تخضع أيضاً لقوة مغناطيسية $q\vec{v}_d \wedge \vec{B}$ تتجه نحو الأعلى، ويؤدي هذا إلى تجمع شحن موجبة على الحافة العليا ويبقى بالتالي زيادة في الشحن السالبة على الحافة السفلى، لذلك تكون إشارة كمون هول المتولد في العينة في هذه الحالة معاكسة بالإشارة لكمون هول الناتج عن انحراف الالكترونات. وبالتالي يمكن تحديد إشارة حاملات الشحنة من خلال قياس الاستقطاب لكمون هول.



الشكل (23-8):
لمشاهدة مفعول هول، يطبق حقل مغناطيسي على تيار يسري في ناقل. عندما يكون I وفق الاتجاه x، و $\vec{B}$ وفق الاتجاه y، فإن كلاً من حاملات الشحنة الموجبة والسالبة تنحرف نحو الأعلى بوجود الحقل المغناطيسي. يقاس كمون هول بين النقطتين a , c.

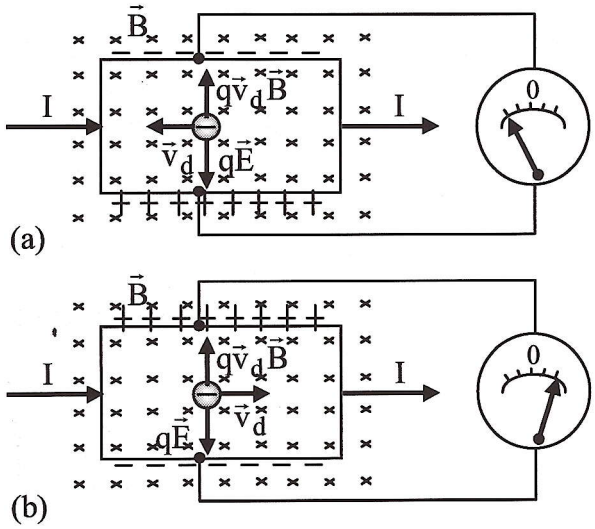
لايجاد علاقة رياضية لحساب كمون هول. لاحظ أولاً أن القوة المغناطيسية على حاملات الشحنة لها القيمة $q\ v_d\ B$. فعند وضع التوازن تتوازن هذه القوة مع القوة الكهربائية الساكنة qE_H، حيث E_H هو الحقل الكهربائي المتعلق بفصل الشحن (يدعى أحياناً بحقل هول (Hall Field) وعليه نجد أن:

$$q\ v_d\ B = q\ E_H \ ; \quad E_H = v_d\ B$$

إذا كان d هو عرض الناقل. فإن كمون هول يساوي $E_H\ d$ أو:

$$V_H = E_H.d = v_d\ B.\ d$$

وعليه نرى أنه من قياس كمون هول يمكن حساب قيمة السرعة الجريـــة لحـــاملات الشحنة إذا كان B , d معروفان.



الشكل (8-24):
في مفعول هول:
(a) تصبح الحافة العليا للرقاقـــة مشحونة سلباً والحافة الدنيا إيجاباً.
(b) تصبح الحافة العليا للرقاقـــة مشحونة إيجاباً والحافة الدنيا سلباً.
في الحالتين لا تســـتمر الشـــحن بالانحراف عند الوصول للإشباع، أي عند التـــوازن بـــين القـــوى الكهربائية والمغناطيسية.

يمكن الحصول على n عدد حاملات الشحنة في واحدة الحجـــم (أو كثافـــة الشحن). عن طريق قياس شدة التيار في العينة. ويمكن كتابة العلاقة التي تعطي السرعة الجرية كما يلي:

$$v_d = \frac{I}{n\,q\,A} \qquad (8\text{-}20)$$

حيث A سطح المقطع العرضي للناقل.

بتبديل العلاقة (8-20) في العلاقة (8-19) نحصل على ما يلي:

$$V_H = \frac{I\,B\,d}{n\,q\,A} \qquad (8\text{-}21)$$

بما أن A = td حيث t ثخانة الناقل فإنه يمكن كتابة العلاقة (8-21) على الشكل التالي:

$$V_H = \frac{I\,B}{n\,q\,t} \qquad (8\text{-}22)$$

يسمى المقدار $\frac{1}{nq}$ معامل هول (Hall Coefficient) ويرمز له بالرمز R_H. تظهر العلاقة (22-8) أنه يمكن استخدام ناقل معاير بشكل مناسب لقياس شدة حقل مغناطيسي غير معروف.

بما أن جميع المقادير التي تظهر في العلاقة (22-8) يمكن قياسها ما عدا nq، فإنه باستخدام هذه العلاقة يمكن الحصول بسهولة على قيمة معامل هول R_H.

إن إشارة وقيمة R_H يعطيان إشارة حاملات الشحنة وكثافتها، إن حاملات الشحنة في المعادن هي الالكترونات، وإن قيمة كثافة الشحن المحددة من مفعول هول تتطابق بشكل جيد مع القيمة المحسوبة للمعادن أحادية التكافؤ مثل Li, Na, Cu, Ag حيث n تساوي عدد الكترونات التكافؤ في واحدة الحجم تقريباً. لكن هذا النموذج الكلاسيكي لا يصلح من أجل المعادن مثل Cd, Bi, Fe، ولا يصلح من أجل أنصاف النواقل أيضاً. يمكن تفسير هذا التناقض فقط باستخدام نموذج آخر وهو الذي يعتمد على الطبيعة الكوانتية للأجسام الصلبة.

مثال (٨-٦): مفعول هول للنحاس:

شريحة من النحاس على شكل مستطيل عرضها 1.5cm وسماكتها 0.1cm، يسري فيها تيار شدته 5A، يطبق حقل مغناطيسي قيمته 1.2T عمودياً على هذه الشريحة، كما في الشكل (24-8)، أوجد كمون هول الناتج.

الحل:

إذا افترضنا أنه يوجد الكترون واحد لنقل التيار في كل ذرة، فإنه يمكننا أخذ كثافة الشحن مساوية $n = 8{,}48.10^{28}\ e/m^3$. يعطي تبديل هذه القيمة في العلاقة (22-8) ما يلي:

$$V_H = \frac{IB}{n\,q\,t} = \frac{(5)\,(1{,}2)}{(8{,}48\,.10^{28})\,(1{,}602\,.10^{-19})\,(0{,}1.10^{-2})}$$

$$V_H = 0{,}44\ \mu V$$

وعليه فإن كمون هول صغير جداً في النواقل الجيدة. لاحظ أن عرض هذه العينة لا يلزم في حساب V_H.

في أنصاف النواقل حيث أصغر بكثير من المعادن أحادية التكافؤ نجد كمون هول أكبر لأنه يتغير عكسياً مع n. تستخدم بصورة عامة شدات تيار من مرتبة الـ mA في مثل هذه المواد. لنأخذ قطعة من السيليكون لها نفس أبعاد شريحة النحاس المذكورة أعلاه فيها $n = 1.10^{20}\ e/m^3$، بأخذ نفس قيمة الحقل في هذا المثال وقيمة التيار $I = 0,1\ mA$ نجد أن $V_H = 0,44\ \mu V$، ومثل هذا الكمون يقاس بسهولة بمقياس كمون.

٨-٦-١ مفعول هول الكوانتي *The Quantum hall Effect:*

بالرغم من أن مفعول هول اكتشف منذ أكثر من مائة سنة فإنه ما يزال التقنية الأكثر استخداماً لمساعدة العلماء في فهم الخصائص الالكترونية للمعادن وأنصاف النواقل. على سبيل المثال أعلن العلماء في العام 1980 أنه في درجات الحرارة المنخفضة وبوجود حقول مغناطيسية فإن جملة ذات بعدين للالكترونات في نصف ناقل يكون لها معامل الناقلية $\sigma = ie^2/h$ حيث i عدد صغير تام (صحيح) و e شحنة الإلكترون و h ثابتة بلانك.

يبدو هذا السلوك بذاته كسلسلة من السويات في كمون هول عند تغيير الحقل المغناطيسي المطبق. إن الطبيعة الكوانتية (المكممة) للناقلية ثنائية البعدين لم تكن معروفة سابقاً على الإطلاق، وكان مكتشفها الألماني كلتزينغ Klaus von Klitzing الذي قال "إنه من المستغرب أن يكون هناك ناقلية مجهرية بشكل مطلق لجهاز هول والتي تكون مكممة أكثر من الناقلية المجهرية المثالية". أحد النتائج الهامة لمفعول هول الكمي هو إمكانية قياس النسبة $\frac{e^2}{h}$ بدقة أقل من $\frac{1}{10^{-5}}$، ويعطي هذا قياسات دقيقة لثابت البنية الناعمة عديم الأبعاد والذي يعطي القيمة $\alpha = \frac{e^2}{hC} = \frac{1}{137}$، حيث أن C سرعة الضوء وهو مقدار معروف بدقة. بالإضافة لذلك زود مفعول هول الكمي العلماء بمعيار مناسب وجديد للمقاومة. وقد حصل كلتزينغ على جائزة نوبل في العام

1985 من أجل اكتشافه الأساسي هذا. حصلت المفاجأة الكبيرة الأخـــرى في العـــام 1982 عندما أعلن العلماء أن بعض العينات المثالية تقريباً يمكن أن تأخذ فيها ناقليـــة هول عند درجات الحرارة المنخفضة جداً، عدد صحيح أو كسري من القيمـــة $\frac{e^2}{hC}$ بدون شك. إن الاكتشافات المستقبلية في هذا المجال وفي المجالات الأخرى ذات العلاقة سترفع سوية المعرفة وستحسن من فهمنا ومعرفتنا لطبيعة المادة.

أسئلة ومسائل غير محلولة

الأسئلة:

١. يتحرك بروتون في لحظة معينة بالاتجاه الموجب للمحور x في منطقة يوجد فيها حقل مغناطيسي موجه بالاتجاه السالب للمحور z. ما هو اتجاه القوة المغناطيسية المؤثرة على هذا البروتون؟ هل يتابع هذا البروتون حركته بالاتجاه الموجب؟ اشرح ذلك.

٢. يقذف جسيمين مشحونين في منطقة يوجد فيها حقل مغناطيسي عمودي على سرعتيهما فينحرف مسار هذين الجسمين بالاتجاه المعاكس، ماذا يمكن القول عن هاتين الشحنتين؟

٣. إذا تحرك جسيم وفق خط مستقيم خلال منطقة ما في الفراغ فهل يمكن القول أن الحقل المغناطيسي يساوي الصفر في تلك المنطقة؟

٤. إذا كان هناك إلكترون يتعقب بروتون نحو أعلى هذه الصفحة، فماذا يحصل لكل من الإلكترون والبروتون عندما يطبق فجأة حقل مغناطيسي عمودي على هذه الصفحة؟

٥. لماذا تصبح الصورة على شاشة التلفزيون مشوشة عندما نقرب منها مغناطيس؟

٦. كيف يمكن استخدام الجسيمات المشحونة المتحركة للتمييز بين الحقل الكهربائي والحقل المغناطيسي؟ أعطِ المثال المناسب لتوضيح إجابتك.

٧. اكتب بعض التشابهات والفروق بين القوة الكهربائية والقوة المغناطيسية.

٨. علل العبارة التالية: لا يمكن للحقل المغناطيسي الثابت (أي الذي لا يتعلق بالزمن) أن يغير من قيمة سرعة الجسيم المشحون.

٩. بالاعتماد على العبارة في السؤال السابق. اشرح دور الحقل المغناطيسي في السيكلترون (المسرع الدوراني).

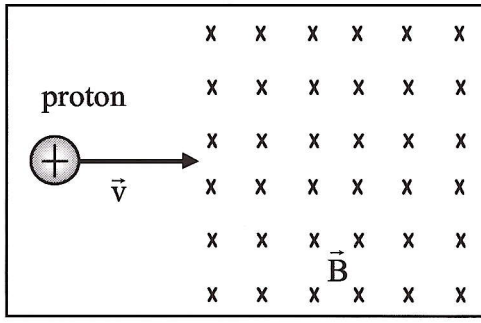
١٠. ناقل يمر فيه تيار لا يخضع هذا الناقل لقوة مغناطيسية عندما يوضع بطريقة معينة في حقل مغناطيسي منتظم. كيف يجب أن يوضع؟ علل ذلك.

١١. هل من الممكن وضع حلقة تيار كهربائي (عروة تيار) ضمن حقل مغناطيسي منتظم بحيث لا تسعى هذه الحلقة إلى الدوران؟ أوضح ذلك.

١٢. كيف يمكن استخدام عروة تيار كهربائي في تحديد وجود حقل مغناطيسي في منطقة معينة من الفضاء؟

١٣. ما هي محصلة القوة المؤثرة على إبرة بوصلة موضوعة في حقل مغناطيسي منتظم؟

١٤. يدخل بروتون متحرك أفقياً إلى منطقة فيها حقل مغناطيسي منتظم عمودي على سرعته كما في الشكل (24-8). كيف تتم الحركة التي تلي ذلك لهذا البروتون؟ كيف سيتصرف إلكترون تحت نفس الشروط؟



الشكل (25-8): بروتون يدخل عمودياً في حقل مغناطيسي.

١٥. ما الذي يعكس اتجاه سرعة الجسيمات المشحونة ضمن الزجاجة المغناطيسية؟ (مساعدة أوجد اتجاه القوة المغناطيسية على هذه الجسيمات في المنطقة التي يصبح فيها الحقل أشد وتتقارب فيها خطوط الحقل).

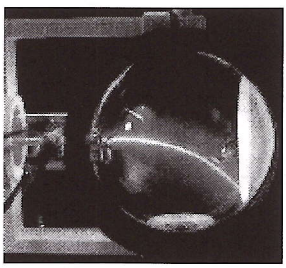
١٦. لماذا تستغرق الجسيمات ذات السرع المختلفة نفس الزمن لإتمام نصف دورة في المسرع الدوراني؟

١٧. هل يمكن للحقل المغناطيسي أن ينقل الكترون من حالة السكون إلى حالة الحركة؟ وإذا كان ذلك، فكيف؟

١٨. الحجيرة الزجاجية هي جهاز يستخدم لمراقبة مسارات الجسيمات التي تعبر خلالها وتكون مغمورة بالحقل المغناطيسي. إذا كانت مسارات بعض الجسيمات حلزوني وبعضها الآخر خطوط مستقيمة ماذا يكنك القول عن هذه الجسيمات؟

١٩. لنفترض أن شخص ما يصمم مسبر مغناطيسي ليقيس به الحقول المغناطيسية باستخدام مفعول هول. ولنفترض أن هذا الشخص اقتصر على استخدام مواد أرق ما يمكن في صنع المسبر هل يمكن فعل أي شيء لزيادة كمون هول المتولد من شدة حقل مغناطيسي معينة؟

٢٠. تقذف حزمة الالكترونات الموضحة في الشكل (26-8) نحو اليمين. تنحرف هذه الحزمة نحو الأسفل بوجود حقل مغناطيسي متولد من ملفين كهربائيين. فما هو اتجاه الحقل المغناطيسي؟ وماذا سيحصل إذا عكس اتجاه التيار في الملفين؟



الشكل (26-8):
تنحرف حزمة إلكترونات نحو الأسفل عند مرورها في حقل مغناطيسي

٢١. تبين التجربة أن حزمة كثيفة من الإلكترونات تسير جميعها بسرعة معينة وبنفس الاتجاه تسعى دائماً إلى التباعد عن بعضها، كما تبين أن حزمة من البروتونات وحزمة من الإلكترونات تسيران في جهتين متعاكستين تسعيان دائماً إلى الاقتراب من بعضهما وإلى التباعد عن بعضهما في حال كان لهما الاتجاه نفسه. فسر الظواهر السابقة.

٢٢. يوجد تشابه كبير بين قانون نيوتن في التجاذب العام بين الكتل المادية $F=G.M_1M_2/R^2$ وقانون كولون في التجاذب أو التنافر بين الشحنات الكهربائية الساكنة $F=q_1q_2 / 4\pi \varepsilon_0 r^2$ ومن ناحية أخرى رأينا أن الشحنات المتحركة يؤثر بعضها

في بعض بقوى مغناطيسية فهل تؤثر الكتل المادية المتحركة في بعضها البعض بقوى تشبه القوى المغناطيسية؟

٢٣. في أي الحالات التالية لا توجد قوة مغناطيسية بين إلكترونين:

أ- عندما يتحرك إلكترونان أحدهما نحو الآخر على استقامة واحدة.

ب- عندما يتحرك الإلكترونان أحدهما مبتعداً عن الآخر وعلى استقامة واحدة.

ج- عندما يكون لهما نفس السرعة باتجاه عمودي على الخط الواصل بينهما.

د- عندما يكون لهما سرعتان متعاكستان وعموديتان على الخط الواصل بينهما.

٢٤. نفترض وجود آلة تستطيع أن تولد حزمة من الإلكترونات تسير بسرعة معينة وفي اتجاه معين، وأنه يمكن بواسطة هذه الآلة قياس القوى التي تؤثر على هذه الحزمة بدقة. بيِّن كيف يمكن استخدام هذه الآلة في قياس الحقول الكهربائية والمغناطيسية التي يمكن أن توجد في الفضاء.

٢٥. إذا كان هناك حقل مغناطيسي أفقي منتظم يتجه نحو الشمال وإذا تركنا قضيباً من النحاس موضوعاً بشكل أفقي وعمودي على الحقل المغناطيسي يسقط إلى أسفل. فأي طرف من طرفي القضيب يكون موجب الشحنة الشرقي أم الغربي؟

٢٦. يتحرك بروتون على منحني شاقولي نحو الأعلى، وتبلغ طاقته الحركية 2Mev وتساوي 3.204×10^{-13} جول في الجملة الدولية،ما هي شدة وجهة الحقل المغناطيسي الذي يولده هذا البروتون في نقطة تبعد عنه مسافة m 3×10^{-9} وفي الاتجاه الجنوبي الغربي بالنسبة له؟ يفترض أن سرعة البروتون ثابتة أثناء حركته وكتلته $m_e = 1.67\times10^{-27}Kg$ وشحنته هي $1.6022\times10^{-19}C$.

٢٧. يتألف جسيم نواة الهيليوم α من بروتونين ونترونين وتبلغ كتلته $6.64\times10^{-27}Kg$، يسرع هذا الجسم بين نقطتين فرق الكمون بينهما $2\times10^{3}V$، بعد ذلك يسير هذا الجسيم في مكان تكون فيه سرعته عمودية على حقل تحريض مغناطيسي منتظم شدته (غوص G) 200 فيؤدي ذلك إلى سير هذا الجسيم بمسار دائري، المطلوب حساب نصف قطر هذا المسار.

٢٨. يتحرك إلكترون e حركة دائرية منتظمة بسرعة خطية v نصف قطر مساره r، والمطلوب:

آ- ما هي شدة واتجاه الحقل الذي يولده هذا الإلكترون في نقطة p تقع على محور دورانه وتبعد عن مساره مسافة 0.1 m؟

ب- ما هي الشدة المتوسطة للحقول الآنية التي يولدها في النقطة p بعد أن يُتم دورة كاملة؟

٢٩. إذا تحرك جسيم مشحون بسرعة $\vec{v}$ ، كيف يمكن أن نطبق عليه حقلاً مغناطيسياً $\vec{B}$ وآخر كهربائياً $\vec{E}$ بحيث تكون القوة المغناطيسية المؤثرة فيه تساوي وتعاكس القوة الكهربائية؟

المسائل:

المسألة (1):

بأي اتجاه ينحرف الكترون موجود قرب خط الاستواء في الحالات التالية:

١. إذا كانت سرعته موجهة نحو الأسفل، ٢. إذا كانت سرعته موجهة الشمال.

٣. إذا كانت سرعته موجهة نحو الغرب، ٤. إذا كانت سرعته موجهة نحو الغرب.

المسألة (2):

يتحرك إلكترون في حقل كهربائي منتظم وحقل مغناطيسي منتظم بسرعة $1.2\times10^{4}m/s$ وفق ox+، وبتسارع $2.10^{12}m/s^2$ وفق oz+. إذا كانت شدة الحقل الكهربائي 20N/C وفقاً oz+ فما هي قيمة واتجاه الحقل المغناطيسي في هذه المنطقة؟

المسألة (3):

أثبت أن العمل المنجز من قبل قوة مغناطيسية مطبقة على جسيمة مشحونة تتحرك في حقل مغناطيسي يساوي الصفر من أجل أي انزياح لهذه الجسيمة.

المسألة (4):

يتحرك بروتون بسرعة $\vec{v} = (2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k})\ m/s$ في منطقة فيها شدة الحقل المغناطيسي $\vec{B} = (\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k})\ T$ ، ما قيمة القوة المغناطيسية التي يخضع لها البروتون؟

المسألة (5):

تملك بطة شحنة 0,04μC، تطير شمالاً بسرعة 15 m/s فوق أطلنطا حيث شدة الحقل المغناطيس الأرضي هي 5.10^{-5}T وبزاوية مقدارها 60° تحت خط الأفق (شمال-جنوب). احسب القوة المغناطيسية التي تؤثر على هذه البطة.

المسألة (6):

جزء مستقيم من سلك طوله 0,75m ينطبق على ox ويوجد ضمن حقل مغناطيسي شدته B=(1,6k)T، احسب القوة المغناطيسية المطبقة عليه عندما يسري فيه تيار 2,4A باتجاه ox+.

المسألة (7):

يتحرك بروتون بسرعة مقدارها 4.10^{4} m/s خلال حقل مغناطيس شدته 1,7T فيخضع لقوة مقدارها $8,2.10^{-13}$N ما هي الزاوية بين سرعة البروتون والحقل؟

المسألة (8):

سلك، كتلة واحدة الطول منه 0,5g/cm، يسري فيه تيار أفقي 2A جنوباً. ما هو اتجاه وقيمة الحقل المغناطيسي الدنيا اللازم لرفع هذا السلك شاقولياً نحو الأعلى؟

المسألة (9):

يلف سلك طويل جداً كتلة واحدة الطول منه هي 1g/cm حول الأرض عند خط الاستواء المغناطيسي، ما هي قيمة واتجاه التيار الذي يجب تمريره في السلك ليبقى معلقاً في الهواء فوق الأرض مباشرة؟

المسألة (10):

تستخدم قطعة طويلة من سلك كتلتها 0.1kg، وطولها 4m لصنع وشيعة على شكل مربع ضلعه 0.1m، تعلق هذه الوشيعة بحيث يكون أحد أضلاعها أفقياً، ويمرر فيها تيار 3.4A، ثم يسلط عليها حقل مغناطيسي شاقولي قيمته 0.01T، المطلوب:

a. عين الزاوية التي يصنعها مستوي الملف مع الشاقول عندما يكون في حالة توازن.

b. أوجد العزم المطبق على هذا الملف من قبل القوة المغناطيسية في حالة التوازن.

المسألة (11):

يستغرق بروتون على مسار دائري عمودي على حقل مغناطيسي ثابت 1μs لإكمال دورة كاملة. المطلوب: عين قيمة هذا الحقل المغناطيسي.

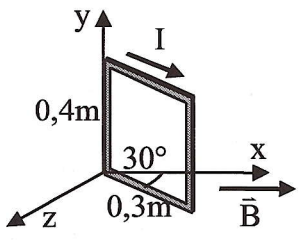
المسألة (12):

توضع وشيعة حلقية تحوي 225 لفة وسطحها $0.45m^2$ في حقل مغناطيسي منتظم 0.21T، تبلغ قيمة عزم الدوران المطبق عليها $8\times10^{-3}N.m$، والمطلوب:

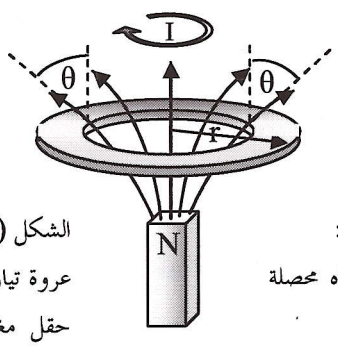
a. احسب التيار المار في الوشيعة. b. هل تختلف قيمة التيار إذا استخدمت الـ 225 لفة لصنع وشيعة من لفة واحدة بنفس الشكل ولكن بسطح أكبر بكثير. اشرح ذلك.

المسألة (13):

تعلق عروة تيار شكلها مستطيل تحوي N=100 turns وأبعادها a=0.4m، b=0.3m على طول oy، ويصنع مستويها زاوية θ=30° مع ox، الشكل (27-8). ما هي قيمة عزم الدوران الحاصل على العروة واتجاهه، نتيجة تطبيق حقل مغناطيسي قيمته 0.8T موجه باتجاه ox+، وعندما يمر فيها تيار I=1.2A بالاتجاه على الشكل؟



الشكل (27-8):
عروة تيار على شكل مستطيل موضوعة في حقل مغناطيسي موجه على طول المحور ox.



الشكل (28-8):
ما هي قيمة واتجاه محصلة القوة على الحلقة.

المسألة (14):

يوضح مغناطيس قوي تحت حلقة معدنية أفقية نصف قطرها r يسري فيها تيار I كما في الشكل (28-8). إذا كانت القوة المغناطيسية تصنع زاوية θ مع خط الشاقول موضع الحلقة فما هي قيمة واتجاه محصلة القوة على الحلقة؟

المسألة (15):

أيون مفرد موجب الشحنة كتلته $3.2\times10^{-26}kg$، بعد أن يسرع هـذا الأيـون ضمن فرق كمون مقداره 833V، يدخل حقل مغناطيسي قيمتـه 0.92T، واتجاهـه عمودي على سرعة الأيون، احسب نصف قطر مسار هذا الأيون في هـذا الحقـل المغناطيسي.

المسألة (16):

سلك ناقل طوله 2,8m ينقل تيار شدته 5A يوضع في منطقـة يوجـد فيهـا مغناطيسي منتظم شدته o,39T والمطلوب: احسب قيمة القوة المغناطيسية المؤثرة على هذا السلك وذلك من أجل القيم التالية للزاوية بين التيار والحقل:

(a) 60° , (b) 90° , (c) 120°

المسألة (17):

بروتون شحنته e وكتلته m_p، ودويترون شحنته e وكتلته $2m_p$، وجسيمة ألفا شحنتها 2e وكتلتها $4m_p$، تسرع هذه الجسيمات باستخدام فرق كمون اعتيادي V، ثم تدخل حقل مغناطيسي منتظم $\vec{B}$ عمودي على مسارها، فيتحرك البروتون بمسـار دائري نصف قطره r_p، عين قيمة أنصاف أقطار المسـارين الـدائريين للجسـيمتين الأخريين، r_d للدويترون، r_α لجسيمة ألفا بتابعية r_p.

المسألة (18):

بروتون أشعة كونية في الفضاء بين النجوم، يملك طاقـة مقـدارها 10Mev، وينجز مسار دائري له نصف قطر يساوي نصف قطر مدار المريخ حـول الشـمس $5.8\times10^{10}m$، ما قيمة الحقل المغناطيسي في تلك المنطقة من الفضاء؟

المسألة (19):

أيون مفرد الشحنة يتحرك بسرعة $4.6\times10^{5}m/s$، على مسار دائـري نصـف قطره 7.94mm على طول الاتجاه العمودي على حقل مغناطيسـي قيمتـه 1.8T، في الحجرة الفقاعية. المطلوب: احسب كتلة هذا الأيون (بواحدات الكتلة الذرية)، وحدد هويته من خلال هذه القيمة.

المسألة (20):

منتقي سرع ذو حقل تقاطعي قيمة الحقل المغناطيسي فيه $1\times10^{-2}T$، المطلوب: ما هي شدة الحقل الكهربائي اللازم تطبيقه على الكترونات طاقة كل منها 10kev حتى تعبر من خلال المسرع دون أن ينحرف مسارها؟

المسألة (21):

يبلغ الحقل المغناطيسي عند خط الاستواء قرب سطح الأرض $50\mu T$ تقريباً ويتجه باتجاه الشمال، ويبلغ الحقل الكهربائي حوالي 100N/C، ويتجه نحو الأسفل (نحو مركز الأرض). المطلوب: أوجد قوة الجاذبية والقوة الكهربائية والقوة المغناطيسية المؤثرة على الكترون متحرك بطاقة مقدارها 100ev وفق خط مستقيم باتجاه الشرق في هذا الوسط.

المسألة (22):

نأخذ مطياف كتلي موضح شكله التخطيطي في الشكل (20-8)، يبلغ الحقل الكهربائي بين صفيحتي منتقي السرع 2500V/m، ويبلغ الحقل المغناطيسي في كل من منتقي السرع وحجرة الانحراف 0.035T. المطلوب: أوجد نصف قطر المسار لأيون مفرد الشحنة (شحنته تساوي شحنة الكترون واحد)، كتلته $m=2.18\times10^{-26}kg$.

المسألة (23):

ما هو الحجم الأصغر لمسرع دوراني مصمم لتسريع البروتونات حتى طاقة 18Mev، مع تردد مقداره 30MHz لهذا المسرع الدوراني؟

المسألة (24):

مسرع دوراني مصمم لتسريع البروتونات، تبلغ قيمة حقله المغناطيسي 0.45T فوق منطقة نصف قطرها 1.2m. المطلوب:

a. ما هو تردد هذا المسرع الدوراني؟

b. ما هي القيمة العظمى للسرعة التي يمكن أن تصلها البروتونات؟

المسألة (25):

يستخدم في أنبوب الصورة في التلفزيون ملفات انحراف مغناطيسي بالإضافة لصفائح انحراف كهربائي. لنفترض أن حزمة الكترونات سرعت خلال فرق كمون مقداره 50kV، وسارت بعد ذلك مسافة 1cm خلال حقل مغناطيسي منتظم متولد من الملفات، وبفرض أن الشاشة تتوضع على بعد 10cm من مركز الملفات، وأن عرضها 50cm، وأنه عندما يوقف الحقل فإن الحزمة الالكترونية تصدم مركز الشاشة. المطلوب: ما هي شدة الحقل اللازمة لجعل الحزمة الالكترونية تنحرف إلى طرف الشاشة؟

المسألة (26):

يستخدم جزء من ناقل سماكته 0.4cm لقياس مفعول هول، إذا كان قياس كمون هول هو 35μV من أجل تيار شدته 21A في حقل مغناطيسي شدته 1.8T، المطلوب: احسب قيمة معامل هول لهذا الناقل.

المسألة (27):

في تجربة مصممة لقياس الحقل المغناطيسي الأرضي باستخدام مفعول هول، يتوضع قضيب من النحاس على طول الاتجاه شرق- غرب، إن تياراً شدته 8A في الناقل ينتج كمون هول قيمته $5.1\times10^{-12}V$، المطلوب: ما هي قيمة الحقل المغناطيسي الأرضي؟افترض أن $n=8.48\times10^{28}\ e/m^3$، وأن مستوي القضيب دار حتى أصبح عمودياً على اتجاه $\vec{B}$.

المسألة (28):

يمكن استخدام مفعول هول لقياس n عدد الكترونات الناقلية في واحدة الحجم لعينة مجهولة. نأخذ عينة سماكتها 15mm، إنها تولد كمون هول مقداره 0.122μV عندما توضع في حقل مغناطيسي قيمته 1.8T بينما يمر فيها تيار شدته 12A. المطلوب: ما هي قيمة n؟

الفصل التاسع

منابع الحقل المغناطيسي

Sources of the magnetic field

عالج الفصل السابق سلسلة من المسائل، تتضمن القوة المغناطيسية المطبقة على جسيم مشحون متحرك في حقل مغناطيسي، ومن أجل إكمال وصف التأثيرات المغناطيسية المتبادلة يناقش هذا الفصل أصل الحقل المغناطيسي والذي هو الشحن المتحركة أو التيارات الكهربائية.

سنبدأ بإظهار كيف يجب استخدام قانون بيو سافار (Biot-Savart) لحساب الحقل المغناطيسي المتولد في نقطة من قبل عنصر تيار.

باستخدام هذا القانون ومبدأ المطابقة، يمكن عندها حساب الحقل المغناطيسي المتعلق في توزع تيار ما من أجل أشكال هندسية مختلفة، سنوضح بعد ذلك كيف يمكن تعيين القوة بين ناقلين يسري فيهما تيار كهرباء، ويقود حساب هذه القوة إلى تعريف واحدة الأمبير.

سنعرض أيضاً قانون أمبير، المفيد جداً في حساب الحقل المغناطيسي للتيارات المستقرة التي تسري في نواقل ذات أشكال عالية التناظر. سنطبق قانون أمبير لتعيين الحقل المغناطيسي من أجل أشكال مختلفة لنواقل يسري فيها تيار.

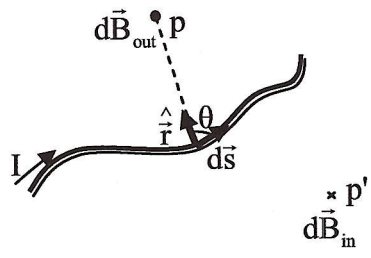
يهتم هذا الفصل أيضاً بالعمليات المعقدة التي تحصل في المواد الصناعية، حيث يمكن تفسير كل التأثيرات المغناطيسية في المادة على أساس عزوم ثنائيات الأقطاب المغناطيسية بشكل مشابه لتلك المرافقة لعروة تيار كهربائي (ناقل على شكل حلقة يسري فيه تيار). تنتج هذه العزوم المغناطيسية الذرية من كل من الحركة الدورانية للالكترونات ومن خاصية جوهرية للالكترونات تعرف بالسبين، يرتكز وصفنا للمغناطيسية في المادة في قسم منه على الحقيقة التجريبية بأن وجود مقدار من المادة يغير بصورة عامة الحقل المغناطيسي المتولد من قبل تيارات كهربائية، على سبيل المثال،

عندما توضع مادة داخل وشيعة يسري فيها تيار، فإنه يتولد حقل مغناطيسي خاص بهذه المادة، يضاف شعاعياً إلى الحقل المغناطيسي المتولد عن الو شيعة والموجود بشكل مسبق.

٩ – ١ – قانون بيو سافار *The Biot-Savart Law:*

بعد فترة قصيرة من اكتشاف أوريستد (Oersted) بأن إبرة البوصلة تنحرف عند وضعها قرب ناقل يسري فيه تيار، أعلن الفيزيائيان بيو وَ سافار (F. Savart & J.B. Biot) أن أي ناقل يسري فيه تيار متواصل يؤثر بقوة على مغناطيس موضوع قربه.

ومن خلال نتائجهما التجريبية، توصل بيو وسافار إلى أن الحقل في نقطة ما في الفضاء يعطى بتابعية التيار المولد لهذا الحقل، وينص قانون بيوسافار على أنه، إذا كانت شدة التيار المستمر في ناقل قيمتها I فإن للحقل المغناطيسي $d\vec{B}$ في نقطة P، المرافق لعنصر السلك $d\vec{s}$، الشكل (1-9)، الخصائص التالية:



الشكل (1-9):
يعطى الحقل المغناطيسي المتولد عن عنصر التيار بقانون بيووسافار ويكون متجهاً من الصفحة للقارئ في النقطة P، ومتجهاً من القارئ إلى الصفحة في النقطة P'.

١. يكون الشعاع $d\vec{B}$ عمودي على كل من $d\vec{s}$ (الذي يمثل شعاع له واحدة الطول واتجاه التيار)، وشعاع الواحدة $\hat{r}$ الموجه من العنصر $d\vec{s}$ إلى p.

٢. ترتبط قيمة $d\vec{B}$ عكسياً r^2، حيث r هي المسافة من بداية $d\vec{s}$ إلى p.

٣. تتناسب قيمة $d\vec{B}$ مع قيمة التيار I ومع طول العنصر ds.

٤. تتناسب قيمة $d\vec{B}$ مع Sinθ حيث θ هي الزاوية بين $d\vec{s}$ و $\hat{r}$.

وبناءً على ما سبق يمكن تلخيص قانون بيو سافار بالعلاقة الرياضية التالية:

$$d\vec{B}=k_m \frac{I d\vec{s} \times \hat{\vec{r}}}{r^2} \qquad (9\text{-}1)$$

حيث k_m ثابت قيمته في الجملة الدولية هي (10^{-7}T.m/A) تماماً، ويكتب هذا الثابت عادةً على الشكل $\frac{\mu_0}{4\pi}$ حيث μ_0 ثابت آخر يدعى النفوذية المغناطيسية للخلاء.

$$\frac{\mu_0}{4\pi}=k_m=10^{-7}\ \text{T.m/A} \qquad (9\text{-}2)$$

$$\mu_0=4\pi.k_m=4\pi.10^{-7}\ \text{T.m/A} \qquad (9\text{-}3)$$

وعليه يمكن كتابة العلاقة (9-1) كما يلي:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{I d\vec{s} \times \hat{\vec{r}}}{r^2} \qquad (9\text{-}4)$$

من الجدير ملاحظته هنا هو أن قانون بيو سافار يعطي الحقل المغناطيسي، في نقطة من أجل طول عنصر صغير من الناقل فقط.

لإيجاد الحقل المغناطيسي الكلي المتولد في نقطة ما من قبل ناقل محدود الطول، يجب أن نجمع مساهمات جميع عناصر التيار التي تشكل الناقل، أي أن علينا تعيين $\vec{B}$ عن طريق مكاملة العلاقة (9-4) كما يلي:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0.I}{4\pi}.\int\frac{d\vec{s} \times \hat{\vec{r}}}{r^2} \qquad (9\text{-}5)$$

حيث يتم حساب هذا التكامل على طول الناقل، ويجب التعامل بانتباه مع هذه العلاقة لأن التكامل يجرى هنا على مقدار شعاعي.

توجد تشابهات هامة بين قانون بيو سافار في المغناطيسية وقانون كولون في الكهرباء الساكنة. يولد عنصر التيار حقل مغناطيسي، وبالمقابل تولد الشحنة النقطية حقل كهربائي، بالإضافة لذلك تتغير قيمة الحقل المغناطيسي عكساً مع مربع البعد عن عنصر التيار، وكذلك هو في الحال بالنسبة للحقل الكهربائي المتولد عن شحنة نقطية، لكن يختلف اتجاه الحقلين تماماً. يكون الحقل الكهربائي المتولد عن شحنة نقطية قطرياً،

وفي حال كانت الشحنة النقطية موجبة فإن جهة $\vec{E}$ تكون من الشحنة باتجاه أية نقطة، أما الحقل المغناطيسي المتولد عن عنصر فيكون عمودي على كلٍ من عنصر التيار وشعاع الموضع القطري. وعليه إذا توضع الناقل في مستوي الصفحة كما في الشكل (1-9) فإن $d\vec{B}$ يكون خارجاً من الصفحة من النقطة p وداخلاً إليها في النقطة p`.

يوضح المثال التالي كيف يمكن استخدام قانون بيو سافار لحساب الحقل المغناطيسي لعدة أشكال هندسية هامة، ومن المهم التمييز أن الحقل المغناطيسي الموصوف في هذا المثال هو الحقل الناشئ عن ناقل يسري فيه تيار، ولا يجوز الخلط بينه وبين أي حقل خارجي مطبق على ناقل.

مثال (٩-١): الحقل المغناطيسي المحيط بناقل رفيع ومستقيم.

لنأخذ سلك رفيع مستقيم يسري فيه تيار I ثابت متوضع على طول المحور ox كما في الشكل (2-9)، احسب الحقل المغناطيسي الكلي في النقطة p.

الحل:

لنأخذ عنصر الطول (عنصر التيار) $d\vec{s}$ الذي يبعد بمقدار r عن p، يكون اتجاه الحقل المغناطيسي المتولد عن $d\vec{s}$ في p نحو خارج الصفحة لأن $d\vec{s}\wedge\hat{\vec{r}}$ يتجه خارجاً من الصفحة.

في الحقيقة إن كل عناصر التيار تولد حقلاً مغناطيسياً يتجه نحو خارج الصفحة في النقطة p، وعليه فإنه علينا فقط تحديد قيمة الحقل في p. بأخذ مبدأ الجملة الإحداثية في o وترك p واقعة على القسم الموجب من المحور oy وبفرض $\vec{k}$ شعاع واحدة يتجه خارجاً من الصفحة للقارئ، نجد أن:

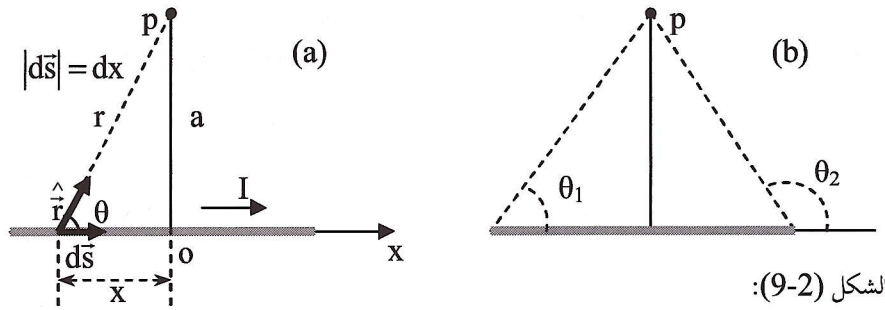
$$d\vec{s}\wedge\hat{\vec{r}}=\vec{k}\left|d\vec{s}\wedge\hat{\vec{r}}\right|=\vec{k}\,dx\,Sin\theta$$

بالتبديل في العلاقة (4-9) ينتج:

$$d\vec{B}=\vec{k}\,dB$$

وأن:

$$dB=\frac{\mu_0.I}{4\pi}\cdot\frac{dx\sin\theta}{r^2} \qquad (1)$$



الشكل (9-2):

a. جزء من ناقل مستقيم يسري فيه تيار I، الحقل المغناطيسي في النقطة p لكل عنصر $\vec{ds}$ يكون باتجاه الخارج للصفحة وهكذا فإن محصلة الحقل أيضاً تكون نحو الخارج الصفحة.

b. زاويتي طرفي الناقل المستقيم مع النقطة P.

لحساب تكامل هذه العلاقة، فإنه يجب ربط المتحولات r , x , θ بعضها ببعض، من الممكن كتابة كل من r , x بتابعية θ، حيث نلاحظ من هندسة الشكل (9-2a)، وباستخدام بعض التفاضلات البسيطة فإننا نحصل على العلاقة التالية:

$$r=\frac{a}{\sin\theta}=a\csc\theta \qquad (2)$$

بما أن $\tan\theta=-a/x$ من المثلث القائم في الشكل (9-2a) فإننا نجد أن مايلي:

$$x=-a\ \cot\theta$$
$$dx=a\csc^2\theta\,.\,d\theta \qquad (3)$$

وبتبديل (2) , (3) في (1) نجد ما يلي:

$$dB=\frac{\mu_0.I}{4\pi}\cdot\frac{a\csc^2\theta.\sin\theta.d\theta}{a^2.\csc^2\theta}$$

$$dB=\frac{\mu_0.I}{4\pi.a}\cdot\sin\theta.d\theta \qquad (4)$$

وعليه نكون قد اختصرنا العلاقة إلى علاقة تتضمن متحول وحيد هو θ، نستطيع الآن الحصول على الحقل الكلي في p بمكاملة العلاقة (4) على جميع عناصر الزوايا المقابلة، والتي تمتد من θ_1 حتى θ_2 كما هي معرفة في الشكل (9-2b) فنجد:

$$B=\frac{\mu_0.I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta.d\theta=\frac{\mu_0.I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2) \qquad (9\text{-}6)$$

عندما يكون التياران باتجاهين متعاكسين ينعكس اتجاهي القوتين، ويدفع كل من السلكين الآخر. بناءً على ما سبق يمكن كتابة النتيجة التالية:

الناقلان المتوازيان اللذان يسري فيهما تياران بنفس الاتجاه يتجاذبان، وبالمقابل يتدافع الناقلان المتوازيان عندما يسري فيهما تياران باتجاهين متعاكسين.

تستخدم القوة المتبادلة بين سلكين متوازيين ينقلان تيارين لتعريف الأمبير وذلك كما يلي:

إذا كان سلكين متوازيين طويلين يفصل بينهما المسافة 1m، ويسري فيهما نفس قيمة التيار، وكانت قيمة القوة المغناطيسية المؤثرة على واحدة الطول من السلكين هي $2\times10^{-7}N/m$، عندها تحدد قيمة التيار في كل من السلكين على أنها تساوي 1A.

يمكن الحصول على القيمة العددية $2\times10^{-7}N/m$ من العلاقة (9-13)، عند وضع $I_1=I_2=1A$، وعليه يمكن استخدام القياسات الميكانيكية لمعايرة الأمبير. على سبيل المثال، يستخدم في معهد المعايير والتقنيات ميزان تيار من أجل القياسات الأولية للتيار، ومن أجل معايرة أجهزة أخرى أكثر انتشاراً مثل مقاييس الأمبير.

إن وحدة قياس الشحنة في SI هي الكولون وهو يعرف بتابعية الأمبير كما يلي:

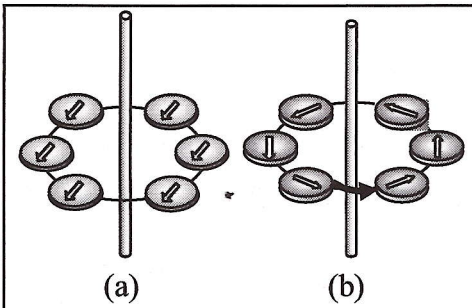
إذا حمل ناقل تيار مستمر قيمته 1A فإن مقدار الشحنة التي تعبر مقطع هذا الناقل في 1s يساوي 1C.

٩-٣- قانون أمبير Amber's Law:

أظهر أورستد (Oersted) في التجربة التي أجراها في العام 1820، أن التيار الذي يسري في ناقل يولد حقل مغناطيسي. وضعت عدة بوصلات في مستوٍ أفقي بجانب سلك شاقولي، كما في الشكل (9-8a)، عندما لا يسري تيار في السلك فإن الإبر المغناطيسية في جميع البوصلات تأخذ نفس الاتجاه حيث أنها تأخذ اتجاه الحقل المغناطيسي الأرضي، كما يتوقع الإنسان. أما عندما ينقل السلك تيار شديد ومستمر

تنحرف جميع الإبر المغناطيسية باتجاه مماس لدائرة كما في الشكل (9-8b)، إذ تظهر هذه الأشكال بأن اتجاهات $\vec{B}$ المختلفة حول السلك تخضع لقاعدة اليد اليمنى الموضحة في الشكل (9-3) التي تنص على أنه:

إذا مُسك السلك باليد اليمنى مع وضع الإبهام باتجاه التيار تكون الأصابع الباقية الملتفة باتجاه الحقل $\vec{B}$.



الشكل (9-8):
a) عندما لا يكون هناك تيار في السلك الشاقولي تأخذ جميع الإبر المغناطيسية البوصلات نفس الاتجاه.
b) عندما ينقل هذا السلك تيار شديد، تنحرف اتجاهات الإبر المغناطيسية بشكل تصبح معه مماسة للدائرة التي تمثل اتجاه $\vec{B}$ الناتج عن التيار.

وعندما يعكس اتجاه التيار تنعكس اتجاهات الإبر المغناطيسية في الشكل (9-8b)، ويمكن إظهار خطوط الحقل المغناطيسي المحيطة بالسلك الذي ينقل تيار باستخدام برادة الحديد ووضعها على ورقة وتمرير سلك معزول من خلالها يحمل تياراً فترسم البرادة دوائر حول السلك.

بما أن البوصلات تشير إلى اتجاه $\vec{B}$، فإننا نستنتج أن خطوط $\vec{B}$ تشكل دوائر تحيط بالسلك، كما تحدثنا في الفقرة السابقة. من خلال التناظر نستنتج أن قيم $\vec{B}$ هي نفسها في أي موضع من أحد المسارات الدائرية المتمركزة مع السلك والمتوضعة في مستوٍ عمودي على السلك. بتغيير المسافة r عن السلك، وتغير قيمة التيار I نجد أن قيمة $\vec{B}$ تتناسب طرداً مع التيار وعكساً مع المسافة عن السلك.

لنعيين الآن الجداء $\vec{B}\cdot d\vec{s}$ ولنجمع هذه الجداءات على مسار دائري مغلق متمركز مع السلك. يكون الشعاعان $\vec{B}$ ، $d\vec{s}$ متوازيان في أية نقطة على طول هذا المسار، وعليه فإن $\vec{B}\cdot d\vec{s} = B\cdot ds$، ويكون $\vec{B}$ ثابت القيمة على هذه الدائرة،

وتعطى قيمته بالعلاقة (7-9)، وبالتالي فإن مجموع الجداءات B.ds على مسار مغلق يكافئ التكامل الخطي لـ $\vec{B}\cdot d\vec{s}$ على هذا المسار أي أن:

$$\oint \vec{B}.d\vec{s} = B\oint ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.2\pi r = \mu_0 I \qquad (9\text{-}14)$$

حيث $\oint ds = 2\pi r$ هو محيط الدائرة المعتبرة. وقد حسبت هذه النتيجة من أجل حالة خاصة لمسار دائري يحيط بالسلك. ومع ذلك تبقى هذه العلاقة صحيحة من أجل أي مسار دائري مغلق مهما كان شكله بشرط أن يكون هذا المسار ناتج عن تيار مستمر. تعرف هذه الحالة العامة بقانون أمبير ويمكن التعبير عنها كما يلي:

التكامل الخطي لـ $\vec{B}\cdot d\vec{s}$ على أي مسار مغلق يساوي $\mu_0 I$، حيث I القيمة الكلية للتيار المستمر الذي يسري خلال أي سطح محاط بهذا المسار المغلق.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (9\text{-}15)$$

يصلح قانون أمبير من أجل التيارات المستمرة، وينفع فقط في حساب الحقل المغناطيسي لأشكال التيارات التي لها درجة عالية من التناظر.

مثال (٩-٤): الحقل المغناطيسي المتولد عن سلك طويل ينقل تيار.

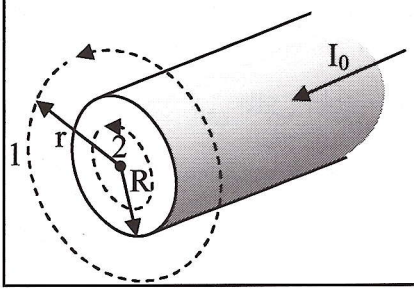
سلك مستقيم وطويل نصف قطره R، ينقل تيار ثابت مستمر I_0، موزع بانتظام على المقطع العرضي للسلك، الشكل (9-9). احسب الحقل المغناطيسي على بعد r من مركز هذا السلك في المنطقتين $r\geq R$, $r<R$.

الحل:

في المنطقة 1 حيث $r\geq R$، نختار المسار المغلق الذي نكامل عليه دائرة نصف قطرها r متمركزة مع السلك. من خلال التناظر نجد أنه يجب أن يكون لـ $\vec{B}$ القيمة نفسها، وأن يكون موازٍ لـ $d\vec{s}$ في أية نقطة على هذه الدائرة. بما أن التيار الكلي الذي يعبر من خلال مستوي الدائرة في هذه الحالة هو I_0، فتطبيق قانون أمبير على دائرة من أجل $r\geq R$ يعطي نتيجة تطابق من حيث المعنى القانون (7-9) وهي:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_0 \Rightarrow B\oint d\vec{s} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I_0$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \qquad (9\text{-}16)$$



الشكل (9-9):
سلك مستقيم طويل نصف قطره R ينقل تيار مستمر I_0، موزع بانتظام على مقطع السلك. يمكن حساب الحقل المغناطيسي في أية نقطة من خلال قانون أمبير، باستخدام المسار الدائري الذي نصف قطره r والمتمركز مع السلك.

لنأخذ الآن المنطقة 2 داخل السلك حيث r<R، وبفرض التيار I هو الذي يعبر خلال مستوي الدائرة التي نصف قطرها r حيث r<R أصغر من التيار الكلي I_0. بما أن التيار موزع بشكل منتظم على مقطع السلك فإن جزء من التيار المحاط بالدائرة التي نصف قطرها r، يجب أن يساوي نسبة السطح πr^2 المحاط بالدائرة 2 على سطح مقطع السلك πR^2 أي أن:

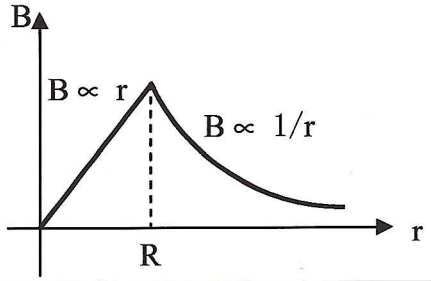
$$\frac{I}{I_0}=\frac{\pi r^2}{\pi R^2}\Rightarrow I=\frac{r^2}{R^2}I_0$$

وبنفس الطريقة نطبق قانون أمبير على الدائرة 2 من أجل r<R:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}=B(2\pi r)=\mu_0 I=\mu_0\frac{r^2}{R^2}I_0$$

$$\Rightarrow B=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2}r \qquad (9\text{-}17)$$

يمثل الشكل (9-10) شدة الحقل المغناطيسي بتابعية r، لاحظ أن الحقل المغناطيسي داخل السلك ينعدم B→0 عندما r→0. وتماثل هذه النتيجة من حيث الشكل النتيجة التي تم التوصل إليها من أجل الحقل الكهربائي داخل قضيب مشحون بشحنة منتظمة.



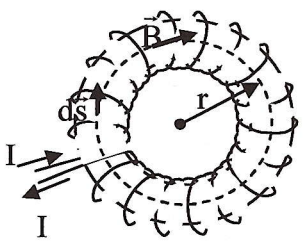
الشكل (9-10):
الخط البياني للحقل المغناطيسي بتابعية r من أجل سلك مستقيم طويل يسري فيه تيار مستمر، يكون B~r داخل السلك، أما خارجه فإن B~1/r.

مثال (٩-٥): الحقل المغناطيسي الناشئ عن ملف حلقي:

يتألف ملف (وشيعة) من N لفة ملفوف على شكل حلقة كما في الشكل (9-11)، يمكنك تخيل الملف الحلقي كأنه ملف لولبي مستقيم حُني حتى أخذ شكل كعكة. بفرض أن اللفات قريبة من بعضها، احسب الحقل المغناطيسي داخل الملف الحلقي على بعد r من مركزه.

الحل:

لحساب الحقل المغناطيسي داخل الملف الحلقي، نعين التكامل الخطي لـ $\vec{B}\cdot d\vec{s}$ فوق الدائرة التي نصف قطرها r. من خلال التناظر نرى أن الحقل المغناطيسي يكون ثابت بالقيمة على هذه الدائرة ومماس لها، وعليه فإن $\vec{B}\cdot d\vec{s} = B\cdot ds$، بالإضافة إلى ذلك لاحظ أن هذا المسار المغلق يتألف من N لفة من السلك يسري في كل منها تيار I، وعليه فإن الطرف الأيمن من العلاقة (9-15) يساوي $\mu_0 NI$ في هذه الحالة.



الشكل (9-11):
ملف حلقي يتألف من عدد كبير من اللفات، إذا كانت لفات الوشيعة قريبة من بعضها فإن الحقل المغناطيسي يكون مماس للدائرة المنقطة المرسومة داخل الملف الحلقي في الشكل ويتغير بتابعية 1/r ويكون الحقل الخارجي مساوٍ للصفر.

يعطي تطبيق قانون أمبير على هذه الحلقة ما يلي:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\oint ds = B\cdot(2\pi r) = \mu_0 NI$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \qquad (9\text{-}18)$$

تظهر هذه النتيجة أن قيمة $\vec{B}$ تتغير تبعاً لـ $\frac{1}{r}$، لذلك فهو غير متجانس (متماثل القيمة) داخل الو شيعة. ومع ذلك فإنه إذا كان r كبير جداً مقارنة مع نصف قطر مقطع الوشيعة الحلقية فإن الحقل يكون متجانس تقريباً داخل الحلقة.

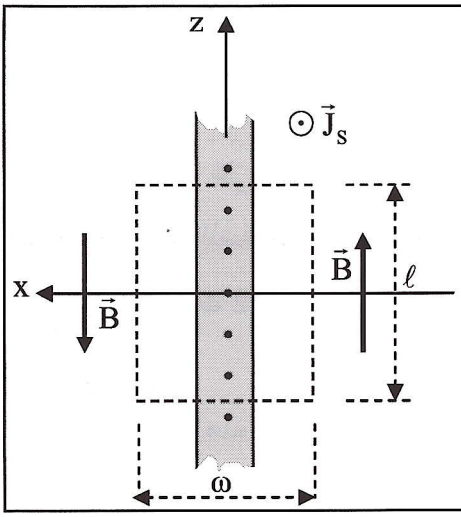
بالإضافة إلى ذلك، فإنه من أجل وشيعة حلقية مثالية حيث اللفات قريبة جداً بعضها من بعض، تكون قيمة الحقل المغناطيسي الخارجي مساوية للصفر. ويمكن فهم

ذلك بملاحظة أن التيار داخل أي مسار دائري متوضع خارج الوشيعة الحلقية يساوي الصفر (بما في ذلك المنطقة الفارغة داخل الكعكة).

وعليه وبالاستناد إلى قانون أمبير نجد أن B=0 في المناطق الواقعة خارج الوشيعة، وفي الحقيقة تشكل لفات الملف الحلقي لولب بالإضافة لحلقات دائرية، وكنتيجة لذلك، يوجد دائماً حقل خارجي صغير للحلقة.

مثال (٩-٦): الحقل المغناطيسي المتولد عن تيار مستوي لانهائي.

صفيحة رقيقة مستوية لانهائية متوضعة في المستوي yz العمودي على مستوي الشكل (12-9)، حيث يسري فيها تيار سطحي كثافته $\vec{J}_s$. هذا التيار له اتجاه y، وتمثل J_s قيمة التيار في واحدة الطول مقاسة على طول المحور z، أوجد الحقل المغناطيسي بالقرب من هذه الصفيحة.



الشكل (12-9):
منظر رأسي لصفيحة رقيقة لانهائية يسري فيها تيار، وتتوضع في المستوي yz، حيث التيار يخرج من الصفحة باتجاه y، واتجاه شعاع كثافة التيار يكون أيضاً باتجاه y وهو ممثل في الشكل بالنقاط في مقطع الصفيحة. ويظهر هذا الشكل اتجاه $\vec{B}$ على جانبي الصفيحة الرقيقة.

الحل:

لتعيين التكامل الخطي في قانون أمبير نأخذ المسار المغلق على شكل مستطيل يقع في المستوي xz خلال الصفيحة الرقيقة كما في الشكل (12-9)، لهذا المستطيل الأبعاد w,ℓ حيث الحرفان اللذين طول كل منهما ℓ يوازيان سطح الصفيحة.

التيار الصافي الذي يعبر مستوي المستطيل هو $J_s \cdot \ell$، وعليه فإن تطبيق قانون أمبير على هذا المستطيل، مع ملاحظة أن حرفي هذا المستطيل اللذين طول كل منهما ω لا يساهمان في التكامل الخطي لأن مركبة $\vec{B}$ على طول هذين المسارين تساوي الصفر، يعطي:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 J_s \ell \Rightarrow 2B\ell = \mu_0 J_s \ell$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 J_s}{2} \qquad (9\text{-}19)$$

تظهر هذه النتيجة أن الحقل المغناطيسي المتولد عن التيار الذي يسري في صفيحة رقيقة لا يتعلق بالبعد عن الصفيحة.

يكون الحقل المغناطيسي في هذه الحالة منتظم ويكون موازٍ لمستوي الصفيحة في أي مكان وهذا منطقي لأننا نعالج حالة صفيحة رقيقة لانهائية يسري فيها تيار. تتطابق هذه النتيجة مع الحقل الكهربائي المرافق لصفيحة رقيقة لانهائية ومشحونة.

مثال ٩–٧– القوة المغناطيسية على جزء من تيار كهربائي.

السلك 1 في الشكل (9-13) موجه على طول المحور y، وينقل تيار مستمر I_1، وهناك دارة كهربائية على شكل مستطيل متوضعة على يمين السلك 1، يسري فيها تيار I_2، أوجد القوة المغناطيسية المؤثرة على جزء الدارة المستطيلة المتمثل بالسلك الأفقي العلوي (السلك 2).

الحل:

ربما تحاول في هذه المسألة استخدام العلاقة (9-13) لحساب القوة المؤثرة على جزء صغير من السلك الأفقي العلوي، إن تلك العلاقة تطبق فقط على سلكين متوازيين، ولا يمكن أن تستخدم هنا. وتكون الطريقة الصحيحة بأن تؤخذ بالاعتبار القوة المؤثرة على الجزء الصغير ds من هذا الناقل التي تعطى بالعلاقة:

$$d\vec{F} = I_2 \cdot d\vec{s} \times \vec{B}_1$$

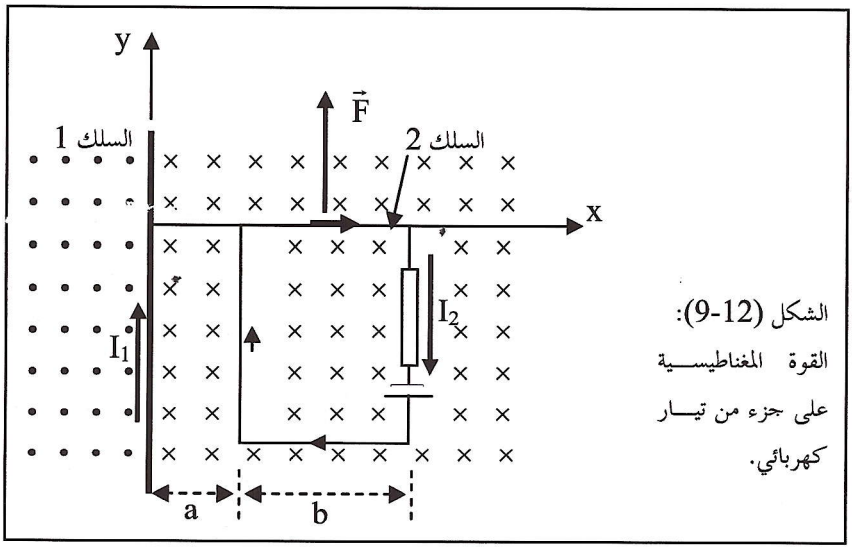
حيث $\vec{B}_1$ الحقل المغناطيسي الناتج عن التيار في السلك 1 في موضع ds.

من قانون أمبير يعطى الحقل المغناطيسي على بعد x من السلك 1 بالعلاقة:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(-\vec{k})$$

حيث يتجه الحقل نحو داخل الصفحة حيث أشير في هذه العلاقة لاتجاهه بشعاع الواحدة $(-\vec{k})$، وبما أن السلك 2 يقع على طول المحور x فإن:

$$d\vec{s} = dx\vec{i}$$



الشكل (12-9): القوة المغناطيسية على جزء من تيار كهربائي.

ونجد أن:

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}\left[\vec{i} \wedge (-\vec{k})\right] dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \cdot \frac{dx}{x}\vec{j}$$

تعطي مكاملة هذه العلاقة بين الحدين x=a ، و x=a+b ما يلي:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln x \Big|_a^{a+b} \vec{j} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln(1 + \frac{b}{a})\vec{j}$$

وتتجه القوة $\vec{F}$ نحو الأعلى حيث أشير في هذه العلاقة لاتجاهها بالشعاع $\vec{j}$، وكما هو مبين في الشكل (13-9).

تطبيق:

أوجد القوة المغناطيسية المؤثرة على جزء الدارة المستطيلة المتمثل بالسلك الأفقي السفلي. الجواب: لهذه القوة المؤثرة على السلك نفس قيمة القوة المؤثرة على السلك 2، ولكن اتجاهها معاكس أي نحو الأسفل.

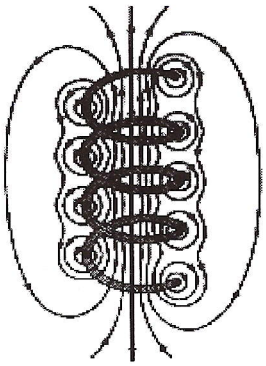
٩ – ٤ – الحقل المغناطيسي لوشيعة

:The Magnetic Field of a Solenoid

الوشيعة هي سلك طويل لف على شكل لولبي، ويمكن بواسطة الوشيعة توليد حقل مغناطيسي منتظم نوعاً ما في الفراغ المحاط بلفات الوشيعة. عندما تكون لفات السلك قريبة من بعضها فإنه يمكن اعتبار كل منها عبارة عن حلقة، والحقل الكلي الناتج يكون في هذه الحالة عبارة عن المجموع الشعاعي للحقول الناتجة عن جميع اللفات.

يظهر الشكل (14-9) خطوط الحقل المغناطيسي لوشيعة لفاتها متباعدة. لاحظ أن خطوط الحقل في الفراغ المحاط بلفات الوشيعة تكونُ متوازية تقريباً، وموزعة بصورة منتظمة وقريبة بعضها من بعض، ويدل هذا على الحقل المغناطيسي يكون منتظماً تقريباً داخل الوشيعة.

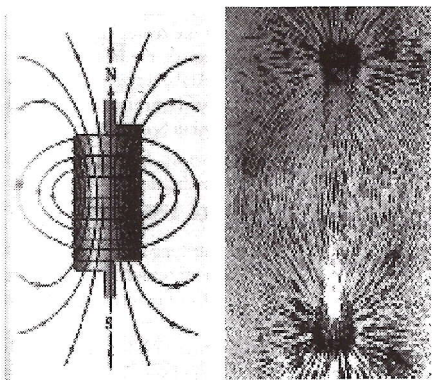
تميل خطوط الحقل بين اللفات لإلغاء بعضها (لأن اتجاهاتها تكون متعاكسة في نقاط تقاطعها، وهذا ما يمكن رؤيته بوضوح في الشكل (14-9). ويكون الحقل المغناطيسي في النقاط الخارجية ضعيف لأن الحقل الناتج عن عناصر تيار القسم الأعلى يميل لإلغاء الحقل الناتج عن عناصر تيار القسم الأسفل.



الشكل (14-9):
خطوط الحقل المغناطيسي لوشيعة ملفوفة بشكل غير محكم (أي غير مضغوط ولفاتها متباعدة).

إذا كانت لفات الوشيعة قريبة من بعضها وكان طول الوشيعة محدود، تكون خطوط الحقل المغناطيسي الناتجة عنها المبينة الشكل (15-9)، تنتشر خطوط الحقل في هذه الحالة من إحدى نهايتي الوشيعة لتتجمع في النهاية المقابلة، وتظهر معاينة هذا

الحقل تشابه بينه وبين الحقل الناتج عن قضيب مغناطيسي، وعليه تتصرف إحدى نهايتي الوشيعة مثل قطب شمالي لمغناطيس، بينما تتصرف النهاية المقابلة مثل قطب جنوبي، ومع تزايد طول الوشيعة يصبح الحقل المغناطيسي داخلها أكثر انتظاما.



(a) (b)

الشكل (15-9):

a) خطوط الحقل المغناطيسي لوشيعة ملفوفة بشدة، ذات طول محدود وتنقل تيار مستمر، يكون الحقل المغناطيسي في الفراغ داخل اللفات منتظم ومتجانس تقريباً وشديد. لاحظ أن خطوط الحقل تشابه خطوط حقل القضيب المغناطيسي، وبذلك فإن لهذه الوشيعة قطب مغناطيسي شمالي وآخر جنوبي.

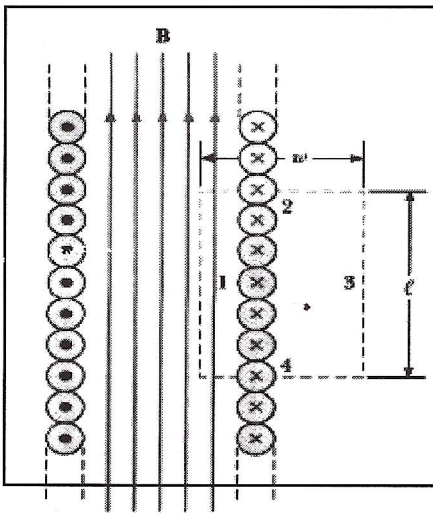
b) شكل الحقل المغناطيسي لمغناطيس على شكل قضيب وقد تم إظهاره بواسطة برادة الحديد على طبق من الورق.

يمكن الاقتراب من حالة الوشيعة المثالية عندما تكون اللفات قريبة من بعضها، ويكون طول الوشيعة كبير مقارنة مع أنصاف أقطار لفاتها، ويكون الحقل خارج الوشيعة في هذه الحالة ضعيف مقارنة مع الحقل في المنطقة الواقعة داخل لفاتها، ويكون الحقل داخل لفاتها منتظم على معظم الحجم داخلها. نستطيع استخدام قانون أمبير للحصول على علاقة من أجل المغناطيس داخل الوشيعة المثالية.

يظهر الشكل (16-9) مقطع طولي لجزء من وشيعة مثالية، يسري في سلكها تيار شدته I، يكون الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ داخل الوشيعة المثالية منتظماً وموازياً لمحورها. ويكون $\vec{B}$ في الفراغ المحيط باللفات مباشرة (المساحة داخل الدوائر) معدوماً.

لنأخذ الآن مسار على شكل مستطيل طوله ℓ، وعرضه ω، كما هو موضح في الشكل (16-9)، نستطيع تطبيق قانون أمبير على هذا المسار عن طريق تعيين قيمة التكامل $\vec{B}\cdot d\vec{s}$ على كل من الحروف الأربعة لهذا المستطيل. من الواضح أن القيمة على طول الحرف 3 تساوي الصفر لأن $\vec{B}=0$ في هذا القطاع، والقيمة على طول

كل من الحرفين 4,2 أيضاً تساوي الصفر لأن $\vec{B}$ عمودي على $d\vec{s}$ على طول كل منهما، أما قيمة هذا التكامل على طول الحرف 1 فهي $B\ell$ لأن $\vec{B}$ منتظم في منطقة هذا الضلع وموازٍ لـ ds على طول هذا الضلع.



الشكل (9-16):
منظر لمقطع طولي في وشيعة ملفوفة بإحكام (مضغوطة). إذا كانت الوشيعة طويلة بالنسبة لنصف القطر، فإننا نستطيع أن نفترض أن الحقل داخل الوشيعة منتظم، والحقل خارجها يساوي الصفر. يطبق قانون أمبير على المستطيل المرسوم بخط متقطع ومن ثم يمكن استخدامه في حساب الحقل داخل الوشيعة.

بناءً على ذلك فإن قيمة هذا التكامل فوق هذا المسار المستطيل المغلق هي:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_{(1)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \int_{(1)} ds = B\ell$$

يتضمن الطرف الأيمن من قانون أمبير التيار الكلي الذي يعبر من خلال السطح المحاط بالمسار الذي يتم عليه التكامل. في حالتنا هذه، التيار الكلي الذي يعبر السطح المحاط بالمسار المستطيل يساوي التيار الذي يعبر كل لفة مضروب بعدد اللفات، إذا كان N هو عدد اللفات في الطول ℓ، وبالتالي فإن التيار الكلي الذي يعبر سطح هذا المستطيل يساوي NI، وعليه يعطي تطبيق قانون أمبير على هذا المسار ما يلي:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B\ell = \mu_0 NI$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 nI \qquad (9\text{-}20)$$

حيث: $n = \frac{N}{\ell}$ يمثل عدد اللفات في واحدة الطول.

نستطيع أيضاً الحصول على هذه النتيجة بطريقة أبسط عن طريق أخذ الحقل المغناطيسي لوشيعة حلقية (مثال ٩-٥).

إذا كان نصف قطر الوشيعة الحلقية التي تحتوي N لفة، وكان r كبيراً مقارنة مع a نصف قطر المقطع العرضي لهذا الوشيعة، وإذا أخذ بالاعتبار جزء قصير فقط من الوشيعة الحلقية فإنه يمكن عدُّه عبارة عن وشيعة مستقيمة عدد لفاتها $n = \frac{N}{2\pi r}$ (عدد اللفات في واحدة الطول). تحت هذه الشروط نجد أن العلاقة (18-9) التي تم اشتقاقها من أجل الوشيعة الحلقية تتطابق مع العلاقة (20-9).

تصلح العلاقة (20-9) فقط من أجل النقاط القريبة من مركز الوشيعة (أي تلك البعيدة عن طرفي الوشيعة) لوشيعة طويلة جداً، وكما يستطيع الإنسان أن يتوقع، تكون قيمة الحقل المغناطيسي قرب كل من نهايتي الوشيعة أصغر من القيمة المسحوبة بالعلاقة (20-9)، وتكون قيمة الحقل المغناطيسي عند كل من نهايتي الوشيعة الطويلة جداً مساوية لنصف قيمته عند مركز الوشيعة، سيتم في الفقرة التالية اشتقاق الحقل المغناطيسي في نقاط محورية كيفية داخل الوشيعة.

٩-٥- الحقل المغناطيسي على طول محور الوشيعة:

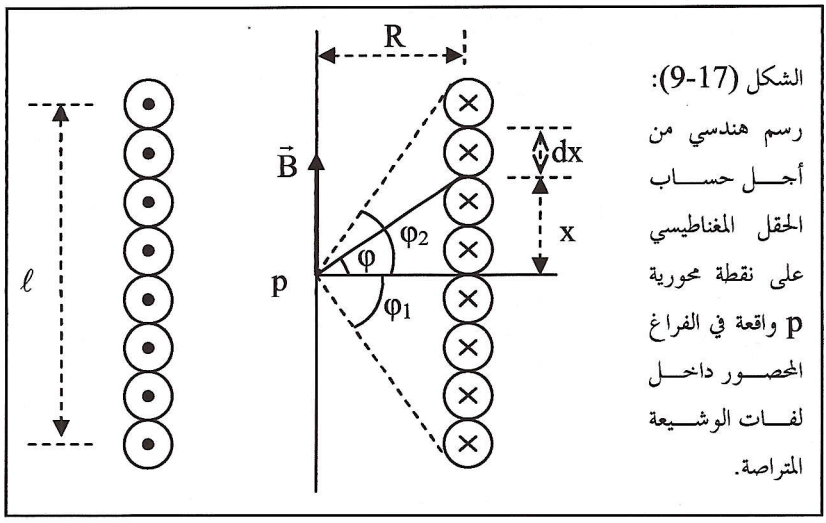
The Magnetic Field along The Axis of Solenoid:

نأخذ وشيعة طولها ℓ، ونصف قطرها R، تتضمن N لفة متراصة، وتنقل تيار مستمر وثابت قيمته I. لنوجد علاقة الحقل المغناطيسي في نقطة محورية p متوضعة في الفراغ المحصور داخل هذه الوشيعة، كما هو موضح في الشكل (17-9).

ربما تكون الطريقة الأبسط للحصول على النتيجة المطلوبة هي اعتبار الوشيعة مجموعة من حلقات التيار. يعطى الحقل المغناطيسي في حلقة على طول هذا المحور بالعلاقة (9-9)، لذلك فإن محصلة الحقل المغناطيسي داخل الوشيعة هي اتحاد الحقول المغناطيسية لكل الحلقات.

إن عدد اللفات (الحلقات) في الطول dx من الوشيعة هو $(\frac{N}{\ell}dx)$، وعليه فإن التيار الكلي ضمن الطول dx يعطى بالعلاقة:

$$I\left(\frac{N}{\ell}\right)dx$$



الشكل (9-17): رسم هندسي من أجل حساب الحقل المغناطيسي على نقطة محورية p واقعة في الفراغ المحصور داخل لفات الوشيعة المتراصة.

ونجد بالتالي عن طريق استخدام العلاقة (9-9) أن الحقل في النقطة p، الناتج عن جزء الطول dx هو:

$$dB = \frac{\mu_0 R^2}{2(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot I(\frac{N}{\ell})dx \qquad (9\text{-}21)$$

تتضمن هذه العلاقة المتحول x الذي يمكن التعبير عن بدلالة المتحول φ المعرف في الشكل (9-17) كما يلي:

$$x = R \cdot \tan\varphi$$

وعليه فإن:

$$dx = R \cdot \sec^2 \varphi \cdot d\varphi$$

بتبديل هذه العلاقة في العلاقة (9-21)، والمكاملة من φ_1 إلى φ_2 نجد ما يلي:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\ell} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos\varphi \cdot d\varphi = \frac{\mu_0 NI}{2\ell}(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) \qquad (9\text{-}22)$$

إذا كانت p واقعة في منتصف الوشيعة، وإذا افترضنا أن طول الوشيعة أكبر بكثير من نضف قطرها R، فإن $\Phi_2 \approx 90^\circ$، و $\Phi_1 \approx -90^\circ$، وعليه فإن قيمة B في المركز:

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{2\ell}(1+1) = \frac{\mu_0 NI}{\ell} = \mu_0 nI$$

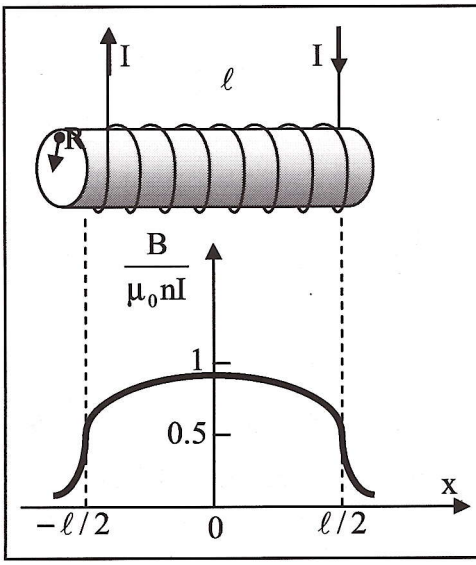
ونلاحظ تتطابق هذه العلاقة مع العلاقة السابقة (9-20).

إذا كانت p على أحد طرفي هذه الوشيعة الطويلة فـــإن ($\varphi_1=0°$; $\varphi_2=90°$) أو ($\varphi_1=90°$; $\varphi_2=0°$) وبالتالي فإن قيمة B في كلٍ من طرفي الوشيعة:

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{2\ell}(1+0) = \frac{1}{2}\mu_0 nI$$

تظهر هذه العلاقة أن قيمة الحقل عند كل من طرفي الوشيعة تساوي نصف قيمتـــه في مركز الوشيعة عندما يقترب طول الوشيعة من اللانهاية.

يظهر الشكل (18-9): مخطط بياني للحقل المغناطيسي في نقاط محورية بتابعية x (البعد عن مركز الوشيعة) لوشيعة متراصة. إذا كان ℓ كبير مقارنة مع R يكون الحقل المحوري منتظماً على معظم الوشيعة، والمنحني يكون منبسط ما عدا النقاط القريبة من طرفي الوشيعة. أما إذا كانت قيمة ℓ قريبة من قيمة R، فإن الحقل يأخذ قيمة أقـــل بقليل من $\mu_0 nI$ في الوسط ويكون منتظم على قطاع صغير فقط.

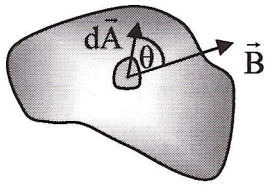


الشكل (18-9):
مخطط بياني للحقـــل المغناطيسي في نقـــاط محوريـــة بتابعيـــة x (البعد عـــن مركـــز الوشـــيعة) لوشـــيعة متراصة. قيمة الحقـــل عند الطرفين تســـاوي نصف القيمة في مركز الوشيعة.

٩ – ٦ – التدفق المغناطيسي *Magnetic Flux*:

يعرف التدفق المرافق للحقل المغناطيسي بطريقة مشابهة لتلك المستخدمة في تعريف تدفق الحقل الكهربائي. لنأخذ عنصر سطح مساحته dA على سطح ذو شكل عشوائي كالموضح في الشكل (9-19). إذا كان الحقل المغناطيسي عند عنصر السطح هذا هو $\vec{B}$ فإن التدفق المغناطيسي خلال عنصر السطح dA هو $\vec{B}\cdot d\vec{A}$، حيث $d\vec{A}$ شعاع عمودي على السطح dA طويلته تساوي عددياً فقط قيمة السطح dA. لذلك فإن التدفق المغناطيسي الكلي φ_B خلال السطح هو:

$$\varphi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} \qquad (9\text{-}23)$$



الشكل (9-19):
التدفق المغناطيسي خلال عنصر السطح dA
هو $\vec{B}\cdot d\vec{A} = B\cdot dA\cdot\cos\theta$،
لاحظ أن $d\vec{A}$ عمودي على السطح.

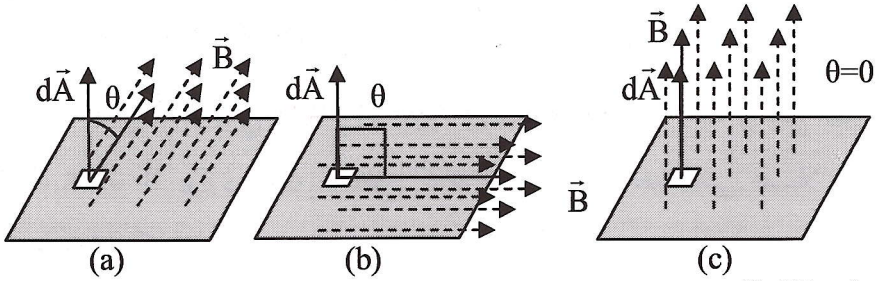
لنأخذ حالة خاصة هي الحالة التي يكون فيها السطح A مستوي، والحقل $\vec{B}$ منتظم، ويصنع زاوية θ مع الشعاع $d\vec{A}$، كما في الشكل (9-20a)، عندئذٍ يكون التدفق المغناطيسي من خلال السطح A هو:

$$\varphi_B = B\cdot A\cdot\cos\theta \qquad (9\text{-}24)$$

إذا كان الحقل المغناطيسي يقع في المستوي كما في الشكل (9-20b)، فإن $\theta=90^\circ$ في هذه الحالة، وبالتالي فإن التدفق من خلال هذا المستوي معدوماً.

وإذا كان الحقل المغناطيسي عمودي على المستوي كما في الشكل (9-20c) فإن $\theta=0^\circ$، ويكون عندئذٍ التدفق لهذا الحقل من خلال هذا المستوي مساوياً BA (أي يكون أعظمياً). إن واحدة التدفق في الجملة الدولية هي الويبر Wb حيث:

$$1\ Wb = 1\ T.m^2$$



الشكل (9-20):

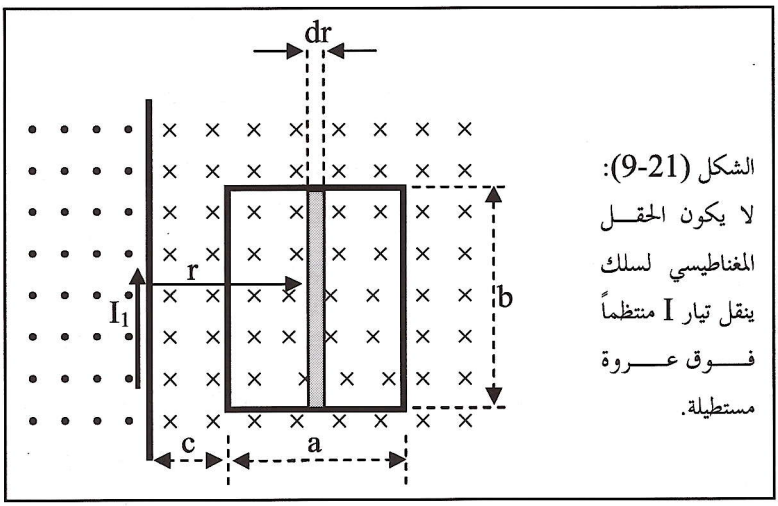
a) يكون تدفق الحقل المغناطيسي من خلال هذا المستوي مساوٍ لـ $\varphi_B = B \cdot A \cdot \cos\theta$ إذا كان الحقل المغناطيسي يميل بزاوية θ عن الشاقول.

b) يكون تدفق الحقل المغناطيسي من خلال هذا المستوي معدوم إذا كان الحقل المغناطيسي موازٍ لسطحه.

c) يكون تدفق الحقل المغناطيسي من خلال المستوي أعظمياً إذا كان الحقل المغناطيسي عمودياً عليه.

مثال (٩-٨): التدفق المغناطيسي خلال عروة مستطيلة.

حلقة مستطيلة عرضها a، وطولها b، متوضعة على بعد c من سلك طويل ينقل تيار I، كما في الشكل (9-21). يوازي هذا السلك الضلع الذي يمثل طول هذه العروة. أوجد تدفق الحقل المغناطيسي خلال هذه العروة.



الشكل (9-21): لا يكون الحقل المغناطيسي لسلك ينقل تيار I منتظماً فوق عروة مستطيلة.

الحل:

نعلم من قانون أمبير أن شدة الحقل المغناطيسي الناتج عن سلك طويل ينقل تيار، تعطى على بعد r من هذا السلك بالعلاقة التالية:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

أي أن الحقل المغناطيسي يتغير فوق العروة ويتجه نحو الصفحة كما يوضح الشكل (9-21)، بما أن $\vec{B}$ يوازي $d\vec{A}$ نستطيع كتابة تدفق الحقل المغناطيسي خلال عنصر السطح dA كما يلي:

$$\varphi_B = \int B \cdot dA = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dA$$

لاحظ أن B غير منتظم حيث تتعلق قيمته بـ r بذلك لا يمكن إخراجه خارج إشارة التكامل.

لحساب التكامل السابق نعبر أولاً عن السطح العنصري بالعلاقة:

$$dA = b\, dr$$

بما أن r هو المتحول الوحيد ضمن التكامل، تصبح علاقة φ_B كما يلي:

$$\varphi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \int_c^{a+c} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln r \Big|_c^{a+c}$$

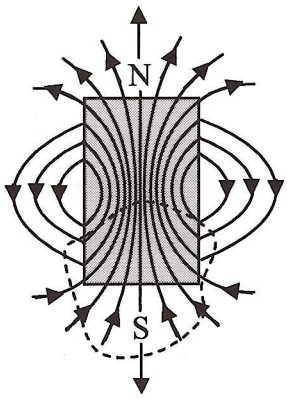
$$\Rightarrow \varphi_B = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+c}{c}\right)$$

٩-٧- قانون غوص في المغناطيسية

Gauss's Law in Magnetism:

وجدنا سابقاً أن تدفق الحقل الكهربائي من خلال سطح مغلق يحيط بشحنة، يتناسب طرداً مع قيمة هذه الشحنة. بعبارة أخرى، يتعلق عدد خطوط الحقل الكهربائي التي تغادر السطح المغلق فقط بمقدار الشحنة الواقعة داخل هذا السطح المغلق، ترتكز هذه الخاصة جزئياً على حقيقة أن خطوط الحقل الكهربائي تنشأ من الشحن الكهربائية.

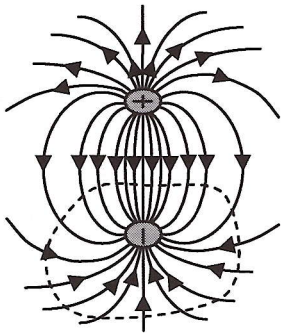
يختلف الوضع تماماً بالنسبة للحقول المغناطيسية، التي تكون مستمرة وتشكل دوامات (حلقات مغلقة). خطوط الحقل المغناطيسي التي تتولد من قبل تيارات كهربائية لا تبدأ ولا تنتهي في أية نقطة كما في الشكل (9-22).



الشكل (22-9): تشكل خطوط الحقل المغناطيسي لقضيب مغناطيسي حلقات مغلقة، لاحظ أن مقدار التدفق خلال سطح مغلق يحيط بأحد الأقطاب (أو أي سطح آخر مغلق) يكون مساوياً للصفر.

يوضح الشكل (22-9) خطوط الحقل المغناطيسي لقضيب مغناطيسي، الذي يظهر فيه عدم ابتداء أو انتهاء هذه الخطوط عند أية نقطة. لاحظ أنه من أجل أي سطح مغلق فإن عدد الخطوط التي تدخله يساوي عدد الخطوط التي تخرج منه، وعليه وعند اعتبار الداخلة موجبة والخارجة سالبة فإن محصلة التدفق معدومة.

تختلف الحالة السابقة عن حالة سطح مغلق يحيط بإحدى سحنتي ثنائي أقطاب كهربائي كما في الشكل (23-9)، حيث لا تكون محصلة التدفق مساوية للصفر.



الشكل (23-9):
a) خطوط الحقل الكهربائي لثنائي أقطاب كهربائي تبدأ من الشحنة الموجبة، وتنتهي على الشحنة السالبة، فيكون التدفق الكهربائي خلال أي سطح مغلق يحيط بإحدى الشحنتين غير معدوم.

ينص قانون غوص من أجل المغناطيسية على: *إن التدفق المغناطيسي خلال أي سطح مغلق يكون دوماً مساوياً للصفر:*

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad (9\text{-}25)$$

ترتكز هذه النتيجة على الحقيقة التجريبية بأن الأقطاب المغناطيسية المعزولة أو المغانط الأحادية القطب لم تكتشف أبداً، أو ربما لا يمكن أن توجد أبداً.

٩-٨- تيار الإزاحة وتعميم قانون أمبير

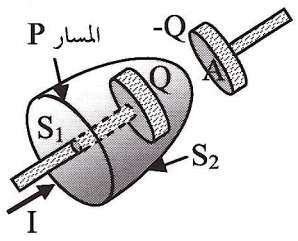
Displacement Current and the Generalized Ampere's Law:

رأينا أن الشحنات في حالة الحركة أو التيارات، تولد حقول مغناطيسية. عندما يكون الناقل الحامل للتيار عالي التناظر، نستطيع حساب الحقل المغناطيسي باستخدام قانون أمبير المعطى بالعلاقة (15-9). حيث يجري التكامل الخطي على أي مسار مغلق يمر خلاله تيار الناقلية، الذي يعرف بالعلاقة:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

نستخدم في هذه الفقرة عبارة تيار الناقلية للدلالة على التيار الذي ينقله السلك. وسنثبت أن قانون أمبير يكون صالحاً بهذا الشكل فقط إذا تحقق شرط ثبات التيار خلال الزمن.

إن ماكسويل هو من وضع هذا الشرط وعدل قانون أمبير لاستنتاج كل الحالات الممكنة. نستطيع فهم هذه المشكلة بأخذ مكثفة تكون مشحونة كما في الشكل (24-9)، عندما يتغير تيار الناقلية مع الزمن تتغير الشحنة على الصفيحة، لكن تيار الناقلية لا يعبر بين الصفيحتين. لنأخذ الآن السطحين S_1 , S_2 كما في الشكل (24-9)، والمحددان بنفس المسار P. بحسب قانون أمبير يكون التكامل الخطي لـ $\vec{B}\cdot d\vec{s}$ على طول هذا المسار مساوياً $\mu_0 I$، حيث I هو التيار الكلي الذي يعبر خلال أي سطح محدد بالمسار P.



الشكل (24-9):
يحاط السطحان S_1 , S_2 بالمسار P نفسه، ويعبر تيار الناقلية في سلك المكثفة خلال S_1 فقط. يقود هذا إلى تناقص في قيمة التكامل في قانون أمبير. تحل الإشكالية فقط بفرضية انزياح التيار خلال S_2.

عند اعتبار أن المسار P يحيط بـ S_1، تكون نتيجة التكامل هي $\mu_0 I$، لأن التيار يعبر خلال S_1، وعندما يحيط المسار بـ S_2 تكون نتيجة التكامل مساوية للصفر، لأنه لا يوجد تيار يعبر S_2 كما هو واضح من الشكل (9-24).

وهكذا يكون لدينا حالة تناقض تنشأ من عدم استمرارية التيار. حل مكسويل هذه المسألة بافتراضه حد إضافي في الطرف الأيمن من العلاقة (9-15) يدعى تيار الإزاحة ويعرف كما يلي:

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\varphi_E}{dt} \qquad (9\text{-}26)$$

حيث φ_E كما مر معنا سابقاً هي تدفق الحقل الكهربائي ويعطى بالعلاقة:

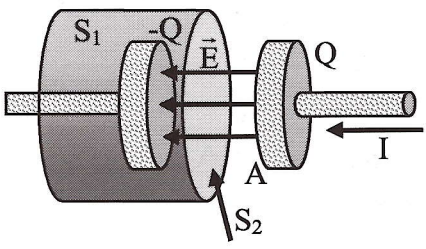
$$\varphi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

عندما تكون المكثفة مشحونة (أو مفرغة)، فإنه يمكن تصور تغير الحقل الكهربائي بين لبوسيها كنوع من التيار الذي يعوض أو يتلافى الانقطاع في تيار الناقلية في السلك. إذاً بإضافة عبارة انزياح التيار المعطاة بالعلاقة (9-26) إلى الطرف الأيمن من قانون أمبير، تُزال عندها الصعوبة المتمثلة في الشكل (9-24). لا تُختار مادة محاط سطحها بالمسار P حيث سيعبرها تراكب ما من تيار الإزاحة وتيار الناقلية. وباستخدام هذا الحد الجديد I_d، نستطيع كتابة الشكل المعمم لقانون أمبير، الذي يدعى أحياناً أمبير ماكسويل، كما يلي:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \frac{\varepsilon_0 \varphi_E}{dt} \qquad (9\text{-}27)$$

يمكن فهم هذه العلاقة بالرجوع إلى الشكل (9-25)، فيه التدفق الكهربائي خلال السطح S_2 هو:

$$\varphi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA$$



الشكل (9-25):
يعبر تيار الناقلية $I = d\theta / dt$ السطح S_1. يعبر تيار الإزاحة $I_d = \varepsilon_0 d\varphi_E / dt$ خلال السطح S_2، يجب أن يتساوى هذين التيارين بالقيمة، في الحالة العامة يكون التيار الكلي خلال سطح محاط بمسار مساوٍ $I+I_d$.

حيث A هي سطح كل من لبوسي المكثفة، و E هو الحقل الكهربائي المنتظم بين صفيحتين المكثفة. إذا كانت Q هي شحنة كل من اللبوسين في أية لحظة فإن:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

وعليه فإن التدفق الكهربائي خلال S_2 هو ببساطة:

$$\varphi_E = EA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

ونستنتج بالتالي أن تيار الإزاحة I_d خلال S_2 هو:

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\varphi_E}{dt} = \frac{dQ}{dt} \qquad (9\text{-}28)$$

تعني العلاقة الأخيرة أن تيار الإزاحة يساوي بدقة تيار الناقلية I الذي يجتاز السطح S_1.

إن المعنى الأساسي لهذه العلاقة ما يلي:

تولد الحقول المغناطيسية من قبل تيارات الناقلية ومن قبل الحقول الكهربائية المتغيرة.

مثال (٩-٩): تيار الإزاحة في مكثفة.

يطبق كمون جيبي مباشرة على مكثفة سعتها 8μF. تردد المنبع 3kHz، وسعة الكمون 30V. أوجد تيار الإزاحة بين صفيحتي هذه المكثفة.

الحل:

يعطى التردد الزاوي للمنبع بالعلاقة:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(3\times10^3 H_Z) = 6\pi\times10^3 S^{-1}$$

وعليه يكون الكمون خلال المكثفة بتابعية الزمن t هو:

$$V = V_{max}\sin\omega t = 30\sin(6\pi\times10^3 t)$$

وبالاعتماد على العلاقة (9-28)، والعلاقة التي تعطي قيمة شحنة المكثفة بتابعية سعتها وكمونها (Q = CV)، يمكن إيجاد تيار الإزاحة I_d الذي يتغير جيبياً مع الزمن كما يلي:

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = C\frac{dv}{dt}$$

$$= 8\times10^{-6}\frac{d}{dt}\left[30\sin(6\pi\times10^3 t)\right] = 4.52\cos(6\pi\times10^3 t)A$$

٩-٩- المغناطيسية في المادة *Magnetism in Matter:*

يعطينا الحقل المغناطيسي المتولد من قبل تيار يسري في وشيعة مؤشراً على قدرة بعض المواد على إظهار خواص مغناطيسية شديدة. وجدنا سابقاً أن الوشيعة كتلك الموضحة في الشكل (15-9) يكون لها قطب شمالي وقطب جنوبي، وفي الحالة العامة يكون لأي عروة تيار حقل مغناطيسي وعزم مغناطيسي متعلق بهذا الحقل.

بصورة مشابهة يمكن وصف العزم المغناطيسي في مادة ممغنطة على أنه ينشأ من تيارات داخلية على المستوى الذري، الأمر الذي يمكن ملاحظته بالنسبة للإلكترونات التي تتحرك حول النواة بما يتفق مع نموذج بور (بعد تعديل الأعداد الكوانتية). يوجد أيضاً عزم مغناطيسي ذاتي لكل من الإلكترونات، البروتونات، النترونات وغيرها من الجسيمات التي يمكن وضع نموذج تقريبي لها ينتج عن دوران الشحن.

سنبدأ بنقاش مختصر حول العزوم المغناطيسية المتعلقة بالإلكترونات. تشكل القوى المتبادلة بين ثنائيات الأقطاب المغناطيسية بعضها مع بعض، وتفاعلها مع الحقل المغناطيسي الخارجي أهمية أساسية لفهم سلوك المواد المغناطيسية. وتتوزع المواد بحسب خواصها المغناطيسية إلى ثلاثة أصناف البارامغناطيسية Paramagnetic، الفرومغناطيسية Ferromagnetic، والديامغناطيسية Diamagnetic.

المواد البارامغناطيسية والفرومغناطيسية هي تلك المواد التي تملك ذرات لها عزوم ثنائيات أقطاب مغناطيسية دائمة، أما المواد الديامغناطيسية فهي تلك التي لا يكون لذراتها عزوم ثنائيات أقطاب مغناطيسية.

٩-٩-١- العزوم المغناطيسية للذرات

:The Magnetic Moments of Atoms

إنه من المناسب أن نبدأ دراستنا مع النموذج الكلاسيكي للذرة والذي ينص على أن الإلكترونات تدور وفق مسارات دائرية حول النواة الأثقل بكثير من الإلكترونات. يشكل الإلكترون في هذا النموذج عروة تيار صغيرة جداً، ويرافق هذه الحركة الدائرية عزم ذري مغناطيسي. بالرغم من أن هذا النموذج يتضمن العديد من النواقص فإن تنبؤاته تتفق بشكل جيد مع النظرية الفيزيائية الكوانتية.

لنأخذ إلكترون يتحرك بسرعة ثابتة v على مسار دائري نصف قطره r حول النواة، كما في الشكل (9-26)، بما أن الإلكترون يجتاز مسافة مقدارها $2\pi r$ (محيط الدائرة) في زمن مقداره T، حيث T هو زمن دورة واحدة، فإن سرعة دوران الإلكترون هي $v = \frac{2\pi r}{T}$.

التيار الفعال المرافق لدوران إلكترون يساوي شحنة هذا الإلكترون مقسمة على زمن دورة واحدة. وباستخدام العلاقة $T = \frac{2\pi}{\omega}$، والعلاقة $\omega = \frac{v}{r}$ نجد ما يلي:

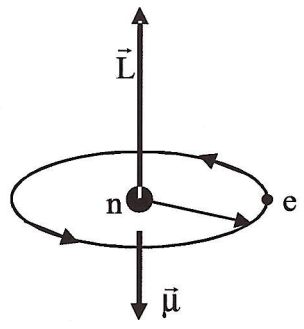
$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi r}$$

يعطى العزم المغناطيسي المرافق لعروة التيار الفعال هذه بالعلاقة:

$$\mu = I A$$

حيث $A = \pi r^2$ هي مساحة دائرة المدار. وعليه نجد ما يلي:

$$\mu = I A = (\frac{ev}{2\pi r})\pi r^2 = \frac{1}{2} evr \qquad (9\text{-}29)$$



الشكل (9-26):
يكون للإلكترون الذي يتحرك بمسار دائري نصف قطره r، كمية حركة زاوية (دفع زاوي) $\vec{L}$، باتجاه معين، وعزم مغناطيسي باتجاه معاكس.

بما أن قيمة كمية الحركة الزاوية المدارية للإلكترون هي $L = m v r$، فإنه يمكن كتابة العزم المغناطيسي كما يلي:

$$\vec{\mu} = (\frac{e}{2m})\vec{L} \; ; \quad \mu = (\frac{e}{2m}) L \qquad (9\text{-}30)$$

تعني هذه النتيجة أن العزم المغناطيسي لإلكترون يتناسب طرداً مع كمية حركته الزاوية المدارية. لاحظ أنه وبسبب أن للإلكترون شحنة سالبة فإن للشعاعين $\vec{L}, \vec{\mu}$

اتجاهين متعاكسين. لكن كلا الشعاعين عمودي على مستوي الدوران، كما هو موضح في الشكل (26-9).

النتيجة الأساسية من الفيزياء الكوانتية هي أن كمية الحركة الزاوية المدارية تكون مكممة وتساوي دوماً عدد صحيح مضروب بـ $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.06\times10^{-34}\,J.s$ حيث h ثابت بلانك، أي أن:

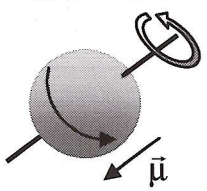
$$L = 0, \hbar, 2\hbar, 3\hbar, \ldots\ldots$$

وعليه فإن القيمة الأصغر غير المساوية للصفر للعزم المغناطيسي هي:

$$\mu = \frac{e}{2m}\hbar \qquad (9\text{-}31)$$

بما أن جميع المواد تحوي الكترونات فإنك قد تستغرب لماذا لا تكون جميعها مغناطيسية. السبب الرئيسي هو أن معظم المواد يلغي فيها العزم المغناطيسي لإلكترون في ذرة العزم المغناطيسي لإلكترون أخر، يدور باتجاه معاكس للأول في ذرة أخرى. بسبب ذلك تكون محصلة العزم المغناطيسي الناتج عن الحركة الدورانية للالكترونات، في معظم المواد إما مساوية للصفر، أو تأخذ قيمة صغيرة جداً.

لقد اعتبرنا حتى الآن فقط مساهمات الإلكترون الذي يدور في تشكيل العزم المغناطيسي للذرة، لكن على أية حال، يملك الإلكترون خاصة جوهرية أخرى تدعى السبين (Spin)، تساهم أيضاً في العزم المغناطيسي للذرة. ووفق لذلك يمكن اعتبار الإلكترون على أنه كرة مشحونة تدور حول محورها الذاتي كما في الشكل (27-9)، إضافة إلى أنها تدور حول النواة، لكن يجب عدم أخذ هذا الوصف بشكل حرفي.



الشكل (27-9):
النموذج الكلاسيكي لإلكترون يدور حول نفسه (يغزل).
يعطي هذا النموذج قيمة غير صحيحة وأعداد كوانتية غير صحيحة والكثير جداً من درجات الحرية.

تنشأ خاصة السبين من الديناميك النسبوي، الذي لا يمكن الاستفادة منه في الميكانيك الكوانتي. تكون قيمة العزم المغناطيسي السبيني من نفس مرتبة قيمة العزم

المغناطيسي الناتج عن عروة التيار المتشكلة من الحركة الدورانية للالكترون حول النواة. تتنبأ النظرية الكوانتية بقيمة كمية الحركة الزاوية السبينية على أنها تساوي:

$$S = \frac{\hbar}{2} = 5.2729 \times 10^{-35}\ J.s$$

أما العزم المغناطيسي الحقيقي المرافق لسبين الإلكترون، فيأخذ القيمة التالية:

$$\mu_B = \frac{e}{2m}\hbar = 9.27 \times 10^{-24}\ J/T \qquad (9\text{-}32)$$

تدعى هذه القيمة مغنيتون بور.

في الذرات أو الأيونات التي تحوي العديد من الإلكترونات. يتزاوج كل إلكترونين متعاكسين بالسبين، ويؤدي هذا إلى حالة تلغى فيها العزوم المغناطيسية للسبين. لكن من أجل الذرات ذات عدد الإلكترونات الفردي، فإنها يجب أن تحوي على الأقل الكترون غير متزاوج، فيكون لها بالتالي عزم مغناطيسي سبيني. العزم المغناطيسي الكلي لذرة هو المجموع الشعاعي للعزمين المغناطيسيين المداري والسبيني.

يعطي الجدول (1-9) بعض الأمثلة على العزوم المغناطيسية لبعض لذرات والأيونات. لاحظ أن العزم المغناطيسي لكل من الهليوم والنيون يساوي الصفر لأن عزومها المفردة تلغي بعضها بعضاً.

الجدول (1-9): العزم المغناطيسي لبعض الذرات والأيونات

الذرة أو الأيون	العزم المغناطيسي $10^{-24}\ J/T$
H	9.27
He	0
Ne	0
Ce^{3t}	19.8
Yb^{3t}	37.1

تملك نواة الذرة أيضاً عزم مغناطيسي مرافق لمكوناتها من بروتونات ونترونات، لكن على أية حال يكون العزم المغناطيسي للبروتون أو النترون صغير مقارنة مع العزم

المغناطيسي للالكترون ويمكن عادة إهماله. ويمكن فهم هذا من خلال تفحص العلاقة (9-32)، حيث أن كتلة كل من البرتون والنترون أكبر بكثير من كتلة الإلكترون فإن عزومها المغناطيسية أصغر منها للإلكترون بمعامل مقداره 10^3 مرة تقريباً.

٩-٩-٢- المغنطة وشدة الحقل المغناطيسي

:Magnetization and Magnetic Field Strength

توصف الحالة المغناطيسية لمادة بواسطة مقدار كمي يدعى شعاع المغنطة $\vec{M}$. أما قيمة شعاع المغنطة فتساوي إلى العزم المغناطيسي في واحدة الحجم من المادة. وكما يمكن للمرء أن يتوقع، يتعلق الحقل المغناطيسي الكلي في مادة ما بكلٍ من الحقل المغناطيسي الخارجي المطبق على هذه المادة وبمغنطة هذه المادة.

لنأخذ منطقة يوجد فيها حقل مغناطيسي $\vec{B}_0$ متولد من ناقل يسري فيه تيار، فإذا ملأنا تلك المنطقة بمادة مغناطيسية، يكون الحقل المغناطيسي الكلي في هذه المنطقة:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$$

حيث $\vec{B}_m$ هو الحقل المغناطيسي المتولد من المادة المغناطيسية. يمكن التعبير عن هذه المساهمة (المشاركة) بتابعية شعاع المغنطة كما يلي:

$$\vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}$$

وعليه يصبح الحقل المغناطيسي الكلي في تلك المنطقة كما يلي:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} \qquad (9\text{-}33)$$

إنه من المناسب إدخال مقدار الحقل $\vec{H}$، والذي يدعى شدة الحقل المغناطيسي، ويعرف هذا المقدار الشعاعي بالعلاقة:

$$\vec{H} = \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) - \vec{M}$$

ونكتب:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \qquad (9\text{-}34)$$

وواحدة كل من $\vec{H}$، $\vec{B}$ في الجملة الدولية هي الأمبير/متر (A/m).

من أجل فهم أفضل للعلاقات السابقة، نأخذ المنطقة أو الحيِّز المحصور داخل وشيعة مستقيمة أو حلقية يمر فيها تيار I وندعوه بقلب (لُب) الوشيعة.

إذا كان هذا الحيِّز خلاءً فإن:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}, \vec{M} = 0$$

بما أن $B_0 = \mu_0 nI$ في قلب وشيعة حلقية مثلاً، حيث n عدد اللفات في واحدة الطول من الوشيعة الحلقية، فإن:

$$H = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{\mu_0 nI}{\mu_0}$$

وبالتالي تكون:

$$H = n\,I \qquad (9\text{-}35)$$

أي أن شدة الحقل المغناطيسي في قلب الوشيعة الحلقية تتعلق بالتيار المار في لفاتها.

إذا كان قلب الوشيعة الحلقية مملوء بمادة ما، وكانت شدة التيار المار في هذه الوشيعة ثابتة فإن $\vec{H}$ داخل هذه المادة يبقى بدون تغيير أي أن قيمته هي nI نفسها التي حصلنا عليها سابقاً. والسبب في ذلك هو أن شدة الحقل المغناطيسي تتعلق فقط بالتيار المار في الوشيعة الحلقية، لكن الحقل المغناطيسي الكلي $\vec{B}$ يتغير عندما تدخل هذه المادة.

من العلاقة (9-34) نجد أن قسماً من $\vec{B}$ المتعلق بـ $\mu_0\vec{H}$ ينشأ عن التيار المار في الوشيعة، أما القسم الثاني من $\vec{B}$ المتعلق بـ $\mu_0\vec{M}$ فينشأ عن تمغنط المادة التي تملأ قلب الوشيعة الحلقية.

٩-٩-٣- تصنيف المواد المغناطيسية

:Classification of Magnetic Substance

يكون شعاع المغنطة $\vec{M}$ متناسباً مع شدة الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ من أجل عدد كبير من المواد، وبشكل خاص المواد البارامغناطيسية (طردية أو متسامتة المغنطة paramagnetic) والمواد الديامغناطيسية (ضعيفة التمغنط diamagnetic) وتدعى أيضاً بالمواد عكسية المغنطة، ونستطيع أن نكتب:

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \qquad (9\text{-}36)$$

حيث χ (حرف إغريقي chi يلفظ تشي)، هو معامل عديم الأبعاد يدعى الطواعية المغناطيسية susceptibility ويعبر عن قابلية التمغنط.

إذا كانت المادة بارامغناطيسية يكون χ موجب وفي هذه الحالة يكون لكلٍ من $\vec{M}$، $\vec{H}$ الاتجاه نفسه، وإذا كانت ديامغناطيسية يكون χ سالب ويكون اتجاه $\vec{M}$ في هذه الحالة معاكس لاتجاه $\vec{H}$. من المهم ملاحظة أن هذه العلاقة الخطية بين $\vec{M}$، $\vec{H}$ لا تنطبق على المواد حديدية المغنطة (الفرومغناطيسية Ferromagnetic). أدرجت في الجدول (2-9) الطواعية المغناطيسية لبعض المواد.

بتبديل $\vec{M}$ بقيمتها من العلاقة (9-36) في العلاقة (9-34) نجد أن:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi\vec{H}) = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}$$

أو:

$$\vec{B} = \mu_m \vec{H} \qquad (9\text{-}37)$$

حيث يدعى الثابت μ_m بالنفوذية أو السماحية permeability المغناطيسية ويعبر عن قابلية الإنفاذ المغناطيسي للمادة وقيمته تتعلق بالطواعية من خلال العلاقة:

$$\mu_m = \mu_0(1+\chi) \qquad (9\text{-}38)$$

يمكن أن تصنف المواد أيضاً بحسب نفوذتيها المغناطيسية μ_m مقارنة مع نفوذية الخلاء μ_0، كما يلي:

المواد البارامغنطيسية: $\mu_m > \mu_0$

المواد الديامغنطيسية: $\mu_m < \mu_0$

المواد الفيرومغنطيسية: $\mu_m >> \mu_0$

إن χ تكون صغيرة جداً لكل من المواد البارامغناطيسية والمواد الديامغناطيسية (الجدول 2-9)، وبالتالي تكون μ_m تقريباً مساوية μ_0 من أجل هاتين الحالتين. لكن في المواد الفررومغناطيسية تكون مساوية لعدة آلاف ضعف من μ_0.

بالرغم من أن المعادلة (9-37) تقدم علاقة بسيطة بين $\vec{H},\vec{B}$، فإنه يجب أن تشرح بعناية عندما يتعلق الأمر بالمواد الفرومغناطيسية. كما ذكر سابقاً، لا ترتبط $\vec{M}$ بتابع خطي مع $\vec{H}$ في المواد الفرومغناطيسية، والسبب في ذلك هو أن قيمة μ_m ليست مميزة للمادة فحسب، ولكنها تتعلق إلى حدٍ ما بالحالة السابقة وبمعالجة العينة.

الجدول (2-9): الطواعية المغناطيسية لبعض المواد البارامغناطيسية والديامغناطيسية عند الدرجة $300^{\circ}K$:

مواد بارامغناطيسية Paramagnetic Substance	χ	مواد ديامغناطيسية Diamagnetic Substance	χ
Aluminum ألمنيوم	2.3×10^{-5}	Bismuth بزموت	-1.66×10^{-5}
Calcium كالسيوم	1.9×10^{-5}	Cupper نحاس	-9.8×10^{-6}
Chromium كروم	2.7×10^{-4}	Diamond ألماس	-2.2×10^{-5}
Lithium اللثيوم	2.1×10^{-5}	Gold ذهب	-3.6×10^{-5}
Magnesium مغنزيوم	1.2×10^{-5}	Lead رصاص	-1.7×10^{-5}
Niobium نيبيوم	2.6×10^{-4}	Mercury زئبق	-2.9×10^{-5}
Oxygen أكسجين	2.1×10^{-6}	Nitrogen نتروجين	-5×10^{-9}
Platinum بلاتين	2.9×10^{-4}	Silver فضة	-2.6×10^{-5}
Tungsten تنغستين	6.8×10^{-5}	Silicon سيليكون	-4.2×10^{-6}

مثال (٩-١٠): وشيعة حلقية مملوءة بالحديد:

وشيعة حلقية تحوي 60 turns/m، يمر فيها تيار قيمته 5A، تحوي قلباً من الحديد سماحيته المغناطيسية $5000\mu_0$. المطلوب: أوجد B , H داخل الحديد.

الحل:

باستخدام العلاقتين (9-35) , (9-37) نحصل على ما يلي:

$$H = n\,I = (60).(5) = 300 \text{ A. turns /m}$$

$$B = \mu_m H = 5000\mu_0 H = 5000(4\pi\times10^{-7}).\ 300 = 1.88 \text{ T}$$

هذه القيمة لـ B أكبر بـ 5000 مرة من قيمة B بدون الحديد.

تطبيق: عين قيمة واتجاه المغنطة داخل القلب الحديدي:

إن اتجاه $\vec{M}$ هو نفس اتجاه $\vec{H}$ بحسب العلاقة (9-36)، وبحساب χ من العلاقة (9-38) واستخدام العلاقة (9-36) نجد:

$$M = 1.5\times10^{6} \text{ A / m}$$

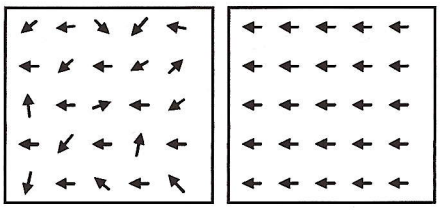
٩-٩-٤- الفرومغناطيسية Ferromagnetism:

هناك بعض المواد الكريستالية يكون لمكوناتها الذرية عزوم ثنائيات أقطاب مغناطيسية دائمة تبدي تأثراً مغناطيسياً شديداً تدعى هذه المواد بالمواد الفرومغناطيسية. من هذه المواد الفرومغناطيسية على سبيل المثال الحديد، الكوبالت، النيكل، الكادولينيوم والديسبروسيوم.

تحوي مثل هذه المواد عزوم مغناطيسية ذرية تميل للتراصف (الاصطفاف) بموازاة بعضها البعض، حتى عندما يكون الحقل المغناطيسي الخارجي ضعيف، بالإضافة إلى ذلك فإنها تبقى ممغنطة حتى بعد إبعاد الحقل المغناطيسي الخارجي. يرتبط هذا التراصف الدائم بالتزاوج (الاقتران coupling) القوي بين العزوم المتجاورة، والذي يمكن تفسيره فقط من خلال الميكانيك الكوانتي.

جميع المواد الفرومغناطيسية تحوي مناطق مجهرية تدعى القطاعات (domains) تكون بداخلها جميع العزوم المغناطيسية متراصفة. تتراوح حجوم هذه القطاعات بين $10^{-12}m^3$ إلى $10^{-8}m^3$، وتحوي عدد من الذرات يتراوح من 10^{17} ذرة إلى 10^{21} ذرة. أما المناطق بين مختلف هذه القطاعات فيكون لها توجهات مختلفة، وتدعى هذه المناطق بجدران القطاعات (domain walls)، تكون القطاعات في عينة غير ممغنطة موجهة بشكل عشوائي بحيث تكون محصلة العزم المغناطيسي معدومة كما في الشكل (9-28a). عندما توضع العينية في حقل مغناطيسي خارجي $\vec{B}_0$ فإن معظم وربما جميع العزوم المغناطيسية لهذه القطاعات تميل للتراصف وفق اتجاه الحقل المغناطيسي الخارجي، ويؤدي هذا إلى تمغنط العينة كما في الشكل (9-28b).

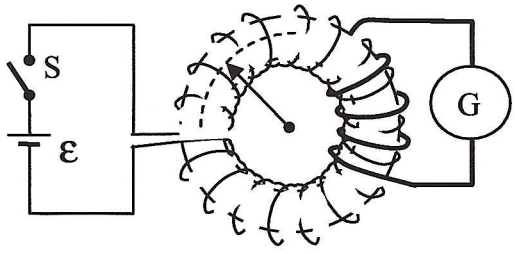
تظهر دراسة القطاعات أن توجهاتها وفق اتجاه الحقل المغناطيسي الخارجي تبدأ بالتزايد حجمياً على حساب القطاعات ذات التوجهات المتآزرة. وعند إبعاد الحقل المغناطيسي الخارجي، يمكن للعينة أن تحتفظ بمحصلة تمغنط وفق اتجاه الحقل المغناطيسي الخارجي. إن التهيج الحراري في درجة الحرارة العادية لا يكون عالٍ إلى حد إيقاع الفوضى في التوجه المختار من قبل العزوم المغناطيسية.



(a) (b)

الشكل (28-9):
(a) توجهات عشوائية لثنائيات الأقطاب المغناطيسية الذرية في مادة غير ممغنطة.
(b) عندما يطبق حقل مغناطيسي خارجي $\vec{B}_0$ تسعى ثنائيات الأقطاب المغناطيسية للاصطفاف وفقه، الأمر الذي يكسب العينة مغنطة تمثل بشعاع التمغنط $\vec{M}$

من التجارب العادية المستخدمة لقياس الخصائص المغناطيسية لمادة فرومغناطيسية متوضعة ضمن عينة لها شكل ملف حلقي يحوي N لفة التجربة الموضحة في الشكل (29-9)، يدعى هذا الجهاز أحياناً بحلقة رولاند (Rowland Ring). تعتبر الوشيعة الحلقية كوشيعة أولية وتستخدم وشيعة ثانوية موصولة بمقياس غلفانومتر لقياس التدفق المغناطيسي. يقاس الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ في قلب الوشيعة الحلقية عن طريق زيادة التيار في سلك الوشيعة الحلقية من 0 حتى قيمة ما I. عند تغير التيار يتغير التدفق المغناطيسي في الوشيعة الثانوية بالمقدار BA حيث A سطح مقطع الوشيعة الحلقية، ويحرض تغير التدفق هذا تياراً في الوشيعة الثانوية متناسباً طرداً مع معدل تغير التدفق المغناطيسي.



الشكل (29-9):
تستخدم وشيعة حلقية لقياس خصائص المادة. تجعل المادة قلباً (لباً) للوشيعة وتقيس دارة الغلفانومتر التدفق المغناطيسي قبل وبعد وضع المادة المدروسة.

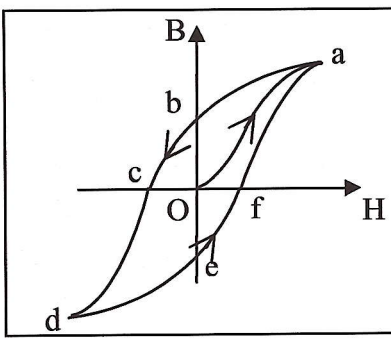
إذا كان غلفانومتر الدارة الثانوية معايراً بشكل مناسب، فإنه يمكن الحصول على قيمة $\vec{B}$ المتعلقة بأية قيمة للتيار المار في الوشيعة الحلقية. يقاس الحقل المغناطيسي في الوشيعة الخالية أولاً، ثم يقاس فيها بعد إشغالها بالمادة المغناطيسية. يمكن عند ذلك الحصول على الخصائص المغناطيسية لهذه المادة بمقارنة هذين القياسين.

لنأخذ الآن ملف حلقي قلبه من الحديد غير الممغنط إذا تمت زيادة شدة التيار في لفات هذا الملف الحلقي من القيمة 0 إلى القيمة I، تزداد شدة الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ خطياً مع I وفق العلاقة:

$$H = n\,I$$

بالإضافة إلى ذلك يتزايد أيضاً الحقل المغناطيسي الكلي B مع تزايد شدة التيار، كما في الشكل (30-9)، في النقطة O تكون القطاعات موجهة عشوائياً، مقابلة لـ $B_m=0$. مع تزايد الحقل المغناطيسي الخارجي تصبح القطاعات أكثر ارتصافاً حتى ترتصف جميعها عند النقطة a ويقترب القلب الحديدي من الإشباع (الإشباع يعني الحالة التي تكون فيها جميع القطاعات متراصفة بنفس الاتجاه).

لنتصور الآن أن التيار قد خفض إلى القيمة صفر، وبذلك يكون قد ألغي الحقل المغناطيسي الخارجي. يدعى المنحني البياني لـ B بتابعية H بمنحني المغنطة (magnetization curve)، وهو يتبع المسار ab كما هو موضح في الشكل (30-9).



الشكل (30-9):
منحني دورة البطاء المغناطيسي لمادة فرومغناطيسية قاسية.

لاحظ أن الحقل $\vec{B}$ لا يساوي الصفر عند النقطة b بالرغم من أن الحقل المغناطيسي الخارجي $\vec{B}_0 = 0$ عند هذه النقطة. يعلل ذلك بأن القلب الحديدي أصبح ممغنطاً في هذه المرحلة بسبب تراصف عدد كبير من القطاعات (أي أن $\vec{B} = \vec{B}_m$)، ويقال عند هذه النقطة أن الحديد يملك مغنطة متبقية.

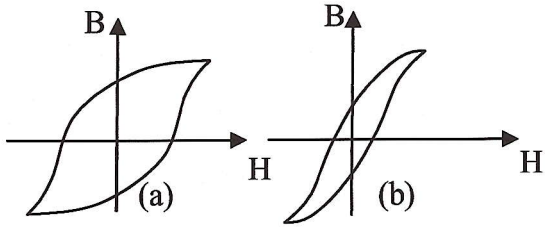
إذا عكس الآن اتجاه الحقل المغناطيسي الخارجي وزيدت شدته بالاتجاه الجديد فإن ذلك يؤدي إلى إعادة توجه القطاعات إلى أن تصبح العينة مرة أخرى غير ممغنطة

عند النقطة c ويتناقص الحقل المغناطيسي إلى أن ينعدم $\vec{B} = 0$. باستمرار الزيادة في قيمة التيار المعاكس يؤدي إلى مغنطة معاكسة بالاتجاه للمغنطة الأولى في الحديد، وتقترب هذه المغنطة الجديدة من الإشباع عند النقطة d.

بتخفيض الآن التيار المعاكس حتى الصفر نلاحظ أن الحقل المغناطيسي المعاكس يتناقص حتى القيمة $\vec{B} = -\vec{B}_m$ عند النقطة e التي تمثل مغنطة متبقية معاكسة. وبزيادة التيار في الاتجاه الموجب يتناقص الحقل المغناطيسي المعاكس إلى أن ينعدم $\vec{B} = 0$ عند النقطة f. باستمرار الزيادة في قيمة التيار الموجب يؤدي إلى مغنطة باتجاه المغنطة الأولى وفقاً للمسار fa،

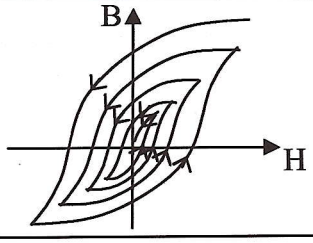
يدعى المفعول الآنف الذكر بدورة البطاء المغناطيسي (magnetic hysteresis)، وهو يبين أن مغنطة المادة الفرومغناطيسية تتعلق بصيرورة المادة (تحولاتها وتغيراتها)، كما ترتبط وتتعلق أيضاً بشدة الحقل المغناطيسي المطبق. (تعني كلمة hysteresis حرفياً lag behind أي التباطؤ الخلفي)، ويقال غالباً أن للمادة الفرومغناطيسية ذاكرة لأنها تبقى ممغنطة بعد إبعاد الحقل المغناطيسي الخارجي.

يتعلق شكل وحجم العروة المغلقة المبينة في الشكل (30-9) بخصائص المادة الفرومغناطيسية، وبالشدة العظمى للحقل الخارجي المطبق. تتميز دورة البطاء من أجل المواد الفرومغناطيسية القاسية التي تستخدم عادةً في صناعة المغانط الدائمة بأنها عريضة، كما في الشكل (31a-9)، الذي يبين أنها تقابل مغنطة متبقية كبيرة، ولا يمكن أن تزال مغنطة هذه المواد بسهولة بواسطة حقول خارجية. وعلى خلاف ذلك يكون للمواد الفرومغناطيسية اللينة كالحديد مثلاً، دورة بطاء ضيقة جداً كما في الشكل (31b-9)، الذي يبين أن المغنطة متبقية صغيرة. تتمغنط مثل هذه المواد بسهولة وتُزال مغنطتها أيضاً بسهولة. ونلاحظ أن المادة الفرومغناطيسية اللينة لدرجة مثالية يجب أن لا يكون لها دورة بطاء، وبالتالي يجب أن لا يكون لها مغنطة متبقية. ويمكن أن تزال مغنطة المادة الفرومغناطيسية عن طريق إخضاعها لسلسلة من دورات البطاء، التي يخفض فيها الحقل المغناطيسي المطبق تدريجياً كما في الشكل (32-9).



الشكل (9-31):
منحني البطاء لـ:
(a) مواد فرومغناطيسية قاسية،
(b) مواد فرومغناطيسية لينة.

إن منحني المغنطة مفيد لسبب آخر نبينه فيما يلي، يمثل السطح المحصور داخل منحني المغنطة العمل اللازم لحمل المادة على تغيير حالتها وفقاً لدورة البطاء. تأتي الطاقة المكتسبة من قبل العينة في عملية المغنطة من المنبع المُنتِج للحقل الخارجي، الذي يتمثل بالقوة المحركة الكهربائية في دارة الوشيعة الحلقية. عندما تتكرر دورة المغنطة فإن عمليات تبديد اتجاهات القطاعات المتراصفة التي تحصل داخل المادة، تؤدي إلى تحويل الطاقة المغناطيسية إلى طاقة حرارية داخلية، الأمر الذي بدوره يؤدي إلى رفع درجة حرارة المادة. لهذا السبب فإن الأجهزة الخاضعة لحقول مغناطيسية متناوبة أي متغيرة الاتجاه (كالمحولات مثلاً) يستخدم فيها قلب (نواة) مصنوع من مواد فرومغناطيسية لينة، لأنها تملك دورات بطاء مغناطيسي ضيقة وبالتالي يكون ضياع الطاقة فيها قليل من أجل كل دورة بطاء.



الشكل (9-32):
إزالة مغنطة مادة فرومغناطيسية عن طريق إجراء سلسلة من دورات البطاء على هذه المادة.

٩-٩-٥- البارامغناطيسية Paramagnetism:

إن للمواد البارامغناطيسية طواعية مغناطيسية موجبة لكن صغيرة $0 < \chi << 1$، ترتبط بوجود ذرات (أو أيونات) ذات عزوم ثنائيات أقطاب مغناطيسية دائمة. تتبادل ثنائيات الأقطاب هذه التأثير مع بعضها البعض بشكل ضعيف ، وتكون توجهاتها

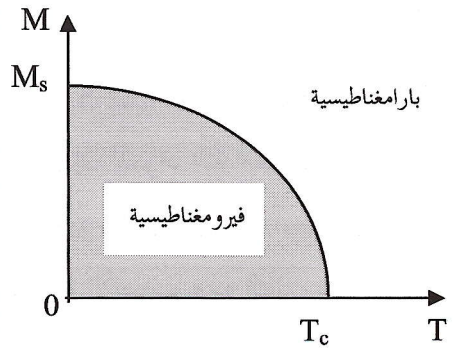
عشوائية بغياب الحقل المغناطيسي الخارجي. عندما توضع المادة في حقل مغناطيسي خارجي تميل ثنائيات الأقطاب الذرية فيها للاصطفاف وفق هذا الحقل. لكن عملية الاصطفاف هذه تتعارض مع تأثير الحركة الحرارية التي تعمل على توجيه ثنائيات الأقطاب بصورة عشوائية.

وجد تجريبياً أن عملية التمغنط لمادة بارامغناطيسية تتناسب طرداً مع الحقل المغناطيسي الخارجي المطبق وعكساً مع درجة الحرارة المطلقة وذلك في مجال واسع من الشروط، أي أن:

$$M = C\frac{B}{T} \qquad (9\text{-}39)$$

تسمى هذه العلاقة بقانون كوري تبعاً لمكتشفه بيير كوري، ويدعى الثابت C ثابت كوري. وهي تظهر أن المغنطة تتزايد مع تزايد الحقل المطبق ومع تناقص درجة الحرارة. فعندما $B = 0$، تكون المغنطة مساوية للصفر، ويقابل هذا توزع عشوائي لثنائيات الأقطاب، عند حقول مغناطيسية عالية أو درجات حرارة منخفضة تقترب المغنطة من قيمتها العظمى أو قيمة الإشباع التي تقابل اصطفاف تام لثنائيات الأقطاب ضمن هذه المادة وعند ذلك لا تعود العلاقة (9-39) صالحة.

من المهم ملاحظة أنه عندما تصل درجة حرارة مادة فرومغناطيسية، درجة حرارة حرجة (تسمى درجة حرارة كوري) أو تزيد عنها، تفقد هذه المادة مغنطتها التلقائية وتصبح بارامغناطيسية كما في الشكل (33-9).



الشكل (33-9):
مخطط بياني للمغنطة بتابعية درجة الحرارة المطلقة لمادة فرومغناطيسية، تصطف العزوم من أجل درجات الحرارة الأقل من درجة حرارة كوري T_c، حيث تكون المادة فرومغناطيسية، وتصبح بارامغناطيسية (غير منتظمة) من أجل درجات حرارة أعلى من درجة حرارة كوري.

من أجل درجات الحرارة الأقل من درجة حرارة كوري تصطف العزوم المغناطيسية وتكون المادة فرومغناطيسية، ومن أجل درجات الحرارة الأعلى من درجة حرارة كوري، تكون الطاقة الحرارية كافية لتسبب توزعات عشوائية لثنائيات الأقطاب، ولذلك تصبح المادة بارامغناطيسية. على سبيل المثال تبلغ درجة حرارة كوري للحديد (1043°K). ويبين الجدول (3-9) درجات حرارة كوري لبعض المواد الفرومغناطيسية.

الجدول (3-9): درجات حرارة كوري لعدة مواد فرو مغناطيسية

Substance المادة	T_c ($^{\circ}$K)
Iron	1043
Cobalt	1394
Nickel	631
Gadolinium	317
Fe_2O_3	893

٩-٩-٦- الديامغناطيسية Diamagnetism :

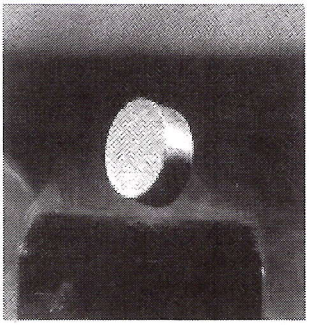
المواد الديامغناطيسية، هي تلك التي لا تملك ذراتها عزوم ثنائيات أقطاب مغناطيسية دائمة. عندما يطبق حقل مغناطيسي خارجي على مادة ديامغناطيسية مثل البزموت أو الفضة يحرض ذلك عزم ثنائي أقطاب مغناطيسي ضعيف باتجاه معاكس لاتجاه الحقل المغناطيسي الخارجي المطبق. بالرغم من أن مفعول الديامغناطيسية (المغنطة العكسية) يتواجد في جميع المواد، إلا أنه يكون ضعيف مقارنة مع البارامغناطيسية أو الفرومغناطيسية.

نستطيع فهم الديامغناطيسية إلى حد ما عن طريق أخذ إلكترونين يدوران بنفس قيمة السرعة ولكن باتجاهين متعاكسين حول نواة. يبقى الإلكترونين على هذين المدارين الدائريين بسبب قوى الجذب المركزي الكهربائي الساكن للنواة موجبة الشحنة. بما أن العزمين المغناطيسيين لهذين الإلكترونين متساويين بالقيمة ومتعاكسين

بالاتجاه، فإنهما يتفانيان (يفني أحدهما الآخر) ويكون بالتالي عزم ثنائي الأقطاب للذرة مساوياً للصفر.

عندما يطبق حقل مغناطيسي خارجي يخضع هذين الإلكترونين لقوة إضافية هي $q\vec{v} \wedge \vec{B}$. تقوم هذه القوة الإضافية بتعديل قوة الجاذبية المركزية، بحيث تزداد قيمة السرعة الدورانية للإلكترون الذي عزمه المغناطيسي لا يوازي الحقل، وتنقص قيمة سرعة الإلكترون الذي عزمه المغناطيسي يكون موازياً للحقل الخارجي. نتيجةً لذلك لا تتفانى العزوم المغناطيسية للإلكترونات طوال الوقت، وتكتسب بالتالي المادة محصلة عزم ثنائي أقطاب غير معدومة معاكسة بالاتجاه للحقل المغناطيسي الخارجي المطبق. وبهذا يكون قد حصل تمغنط عكسي في مثل هذه المواد، وتسمى ظاهرة التمغنط العكسي هذه بالديامغناطيسية.

بالعودة إلى حقيقة أن المواد ذات الناقلية الفائقة تكون مقاومتها معدومة للتيارات .D.C تحت شرط درجة حرارة معينة مميزة للمادة، تُظهر أنواع معينة من المواد ذات الناقلية الفائقة خاصية الديامغناطيسية (المغنطة العكسية) بشكلٍ ممتاز في حالة الناقلية الفائقة. وبالنتيجة يكون الحقل المغناطيسي المطبق على ناقل فائق مستبعداً داخل هذا الناقل الفائق وتكون قيمته مساوية للصفر. تعرف ظاهرة استبعاد تدفق الحقل هذه بمفعول مايسنر (Meissner effect). إذا وضع مغناطيس دائم المغنطة بجانب ناقل فائق فإنهما يتدافعان. يوضح الشكل (34-9) هذا المفعول حيث يظهر مغناطيس صغير دائم معلق في الهواء فوق ناقل موضوع في درجة حرارة $77^{\circ}K$.



الشكل (34-9):
مغناطيس دائم صغير يسبح بحرية فوق قطعة من السيراميك الفائق الناقلية، ذي التركيب ($YBa_2Cu_3O_7$) المبرد بالنتروجين السائل حتى درجة الحرارة $77^{\circ}K$. إن المقاومة الكهربائية لهذا الناقل تساوي الصفر عند درجات حرارة أدنى من $92^{\circ}K$، وهو يلغي أثر أي حقل مغناطيسي يتم تطبيقه.

مثال (٩-١١): التمغنط المشبع:

عين التمغنط الأعظمي في اسطوانة طويلة من الحديد بفرض وجود سبين إلكترون واحد غير متزاوج في كل ذرة.

الحل:

يدعى التمغنط الأعظمي بالتمغنط المشبع، ويحصل عندما تصطف جميع العزوم المغناطيسية في العينة. إذا كانت العينة تحوي n ذرة في واحدة الحجم، يكون لتمغنط الإشباع M_s القيمة التالية:

$$M_s = n\,\mu$$

حيث μ العزم المغناطيسي للذرة الواحدة، بما أن الوزن الجزيئي للحديد هو (55g/mol)، وكثافته هي $7.9g/cm^3$ فإن قيمة n هي ($8.5\times10^{28}atoms/m^3$). بفرض أن كل ذرة تساهم بمغنيتون بور واحد (تبعاً لسبين واحد غير متزاوج) في العزم المغناطيسي فإننا باستخدام العلاقة (9-32) نحصل على ما يلي:

$$M_s = \left(8.5\times10^{28}\,\frac{atom}{m^3}\right)\cdot\left(9.27\times10^{-24}\,\frac{A.m^2}{atom}\right)$$

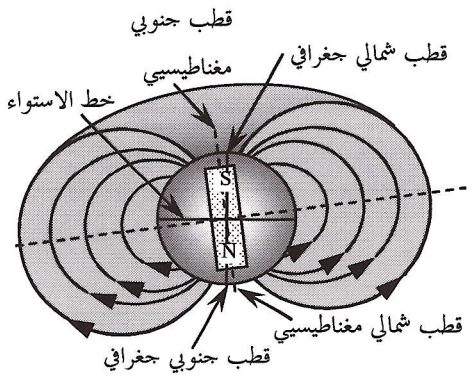
تعادل هذه القيمة نصف قيمة تمغنط الإشباع المحدد تجريبياً للحديد المقسى. ويدل هذا بأنه يوجد في الواقع سبينين اثنين غير متزاوجين لإلكترونين في كل ذرة.

٩-١٠ - الحقل المغناطيسي للأرض

Magnetic Field of the Earth:

عندما نتحدث عن مغناطيس صغير له قطب شمالي وآخر جنوبي، يجب أن نقول بدقة أكبر أن أحد طرفيه شمالي التوجه والآخر جنوبي التوجه. ونقصد بذلك أنه إذا استخدم هذا المغناطيس كبوصلة فإن إحدى نهايتيه تسعى لأن تتوجه باتجاه القطب الشمالي الجغرافي للأرض والأخرى باتجاه القطب الجنوبي لها. وعليه نستنتج أن قطب مغناطيسي شمالي يتوضع متجهاً للقطب الجغرافي الجنوبي للأرض، وقطب مغناطيسي جنوبي يتوضع متجهاً للقطب الجغرافي الشمالي لها. يبين الشكل (9-35) هيئة الحقل

المغناطيسي للأرض، وهو في الحقيقة مشابه جداً لما يمكن الحصول عليه بتخيل قضيب مغناطيسي مدفون عميقاً في الأرض.



الشكل (35-9): خطوط الحقل المغناطيسي الأرضي. لاحظ أن القطب الجنوبي المغناطيسي يقع قرب القطب الشمالي الأرضي، والقطب المغناطيسي الشمالي يقع قرب القطب الجغرافي الجنوبي.

إذا علقت إبرة بوصلة بطريقة تسمح لها بالدوران في مستوي شاقولي وكذلك في مستوي أفقي، تأخذ هذه الإبرة الوضعية الأفقية بالنسبة لسطح الأرض قرب خط الاستواء فقط إضافة لكونها نأخذ اتجاه الشمال الجنوب الجغرافيين. وعندما تحرك هذه الإبرة باتجاه الشمال فإنها تميل أكثر فأكثر باتجاه سطح الأرض كلما اقتربنا من القطب الجغرافي الشمالي، وعند الوصول إلى قرب هذا القطب فإن طرفها المتجه باتجاهه يصبح متجهاً مباشرة نحو الأسفل (نحو الأرض). وُجِد هذا الموضع في منطقة (Hudson Bay) في كندا عام 1932، فاعتبر موقع القطب الجنوبي المغناطيسي للأرض. يبعد هذا الموقع حوالي 1300 mile عن القطب الشمالي الجغرافي وهو يتغير مع الزمن. وكذلك الأمر يقع القطب المغناطيسي الشمالي على بعد حوالي 1200 mile عن القطب الجغرافي الجنوبي. وعليه فإن القول بأن إبرة البوصلة تتجه نحو الشمال هو صحيح بصورة تقريبية. إن الفرق بين الشمال الحقيقي الذي يعرف بأنه القطب الجغرافي الشمالي، والشمال الذي تشير إليه إبرة البوصلة يختلف من نقطة لأخرى على الأرض، وهو يدعى بالميل الزاوي (البعد الزاوي) المغناطيسي، فعلى سبيل المثال تشير البوصلة إلى الشمال الحقيقي على طول الخط الذي يمر عبر فلوريدا والبحيرات

الكبرى، بينما يميل الشمال الحقيقي في ولاية واشنطن بزاوية 25° عن الشمال الذي تشير له البوصلة (الشمال المغناطيسي).

بالرغم من أن أشكال الحقل المغناطيسي الأرضي مماثلة لتلك التي تنشأ عن قضيب مغناطيسي موجود على عمق كبير داخل الأرض، فإنه من السهل فهم أو تفسير لماذا لا تؤدي منابع الحقل المغناطيسي الأرضي إلى مغنطة دائمة على نطاق واسع للمواد. تحوي الأرض مكامن فلزات حديد هائلة تحت سطحها، لكن درجات الحرارة الهائلة في قلب الأرض تمنع الحديد من الاحتفاظ بأي تمغنط دائم. ويبدو أن حركة الشحنات في تيارات الحمل (النقل) في الصهارة في باطن الأرض هي المصدر الحقيقي الأكثر واقعية للحقل المغناطيسي، حيث أن الأيونات المشحونة والإلكترونات التي تدور في الصهارة داخل الأرض تولد حقل مغناطيسي بنفس الطريقة التي تولد بها عروة التيار حقلاً مغناطيسياً. يوجد أيضاً دليلاً قوياً يشير إلى أن شدة حقل كوكب الأرض ترتبط بمعدل دورانه، فعلى سبيل المثال يدور كوكب جوبيتير أسرع من الأرض، وتشير الاختبارات الحديثة إلى أن الحقل المغناطيسي له أقوى من الحقل المغناطيسي للأرض، ومن ناحية أخرى يدور كوكب فينوس أبطأ من الأرض وحقله المغناطيسي أضعف من الحقل المغناطيسي للأرض. وتبقى الأبحاث حول سبب مغناطيسية الأرض مفتوحة.

توجد بعض المعلومات الأخرى الهامة فيما يخص الحقل المغناطيسي الأرضي. لقد وجد أن اتجاه الحقل المغناطيسي الأرضي قد انقلب عدة مرات خلال المليون سنة الأخيرة. تم الحصول على إثبات على ذلك من صخور البازلت (نوع من الصخور التي تحوي الحديد) التي قذفت بنشاط بركاني في قاع المحيط، وعندما تبرد صهارتها تتصلب وتعطي صورة عن اتجاه الحقل المغناطيسي الأرضي. ويمكن اعتماد طرائق أخرى لتقدير عمر الصخور بهدف الحصول على إثبات على دورية انعكاس الحقل المغناطيسي الأرضي.

مسائل محلولة:

مسألة(1):

سلكان مستقيمان ومتوازيان كما في الشكل (36-9)، المسافة بينهما 0.2 m يمر في الأول تيار شدته 1.66 A وفي الثاني تيار شدته 6.65 A والمطلوب:

آ- ما هي شدة القوة التي تؤثر على متر واحد من كل من هذين السلكين.

ب- أوجد شدة حقل التحريض المغناطيسي بين السلكين في الحالتين:

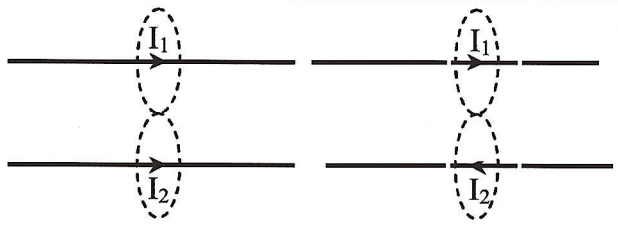
الأولى للتيارين في السلكين نفس الاتجاه، والثانية لهما اتجاهين متعاكسين.

الحل:

الطلب آ- لحساب القوة المؤثرة على 1m من كل منهما نطبق العلاقة:

$$F_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2 I_1 I_2}{r} L$$

$$\Rightarrow F_M = \frac{4\pi\times10^{-7}}{4\pi} \cdot \frac{2(1.66)(6.65)}{0.2} \times (1) = 110.4\times10^{-7}\,N$$



الشكل (36-9): الحقل المغناطيسي بين سلكين متوازيين.

الطلب ب-

الحالة الأولى: نتركها للطالب.

الحالة الثانية: إن التيارين المتعاكسين يولدان حقلين تحريضيين متعاكسين، وتكون قيمة محصلتهما B في نقطة ما هي فرق قيمتيهما وبحسب قاعدة اليد اليمنى يكون للمحصلة جهة الحقل الأكبر ونطبق من أجل ذلك القانون التالي:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r} \Rightarrow$$

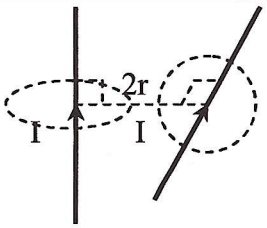
$$B_1 = \frac{4\pi\times10^{-7}}{4\pi} \cdot \frac{2(1.66)}{0.1} = 3.32\times10^{-6}\,T$$

$$B_2 = \frac{4\pi\times10^{-7}}{4\pi}\cdot\frac{2(6.65)}{0.1} = 13.30\times10^{-6}\,T$$

$$\Rightarrow B = B_2 - B_1 = 13.3 - 3.32 = 9.98T$$

مسألة(2):

يوجد سلكان مستقيمان أحدهما شاقولي والآخر أفقي كما في الشكل (37-9) ويمر في كليهما تيار شدته I، المسافة العمودية بينهما 2r أوجد شدة واتجاه الحقل المغناطيسي المتولد عنهما في النقطة الواقعة في منتصف العمود المشترك عليهما بدلالة I,r.



الشكل (37-9): الحقل المغناطيسي بين سلكين غير متوازيين.

الحل:

نطبق القانون:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I}{r}$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{4\pi\times10^{-7}}{4\pi}\cdot\frac{2I}{r} = \frac{2I}{r}\times10^{-7}\,T$$

$$B_2 = \frac{4\pi\times10^{-7}}{4\pi}\cdot\frac{2I}{r} = \frac{2I}{r}\times10^{-7}\,T$$

واتجاهيهما متعامدان لذلك تكون المحصلة B:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{4\frac{I^2}{r^2}\times10^{-7}\times2} = 2\sqrt{2}\times10^{-7}\,\frac{I}{r}\,T$$

مسألة(3):

يبلغ طول اسطوانة 33×10^{10} m ونصف قطر مقطعها 5×10^{5} m وتحوي غازاً إلكترونياً بكثافة 23×10^{6} e/m^2. تنجرف هذه الإلكترونات جميعها بسرعة واحدة

موازية لمحور الاسطوانة وتساوي 10^4 m/sec. ما هي شدة الحقل المغناطيسي الناتج عن هذا الاسطوانة على مسافة 10^8 m من محورها، علماً أن شحنة الإلكترون هي $e= 1.6022\times10^{-19}$ C.

الحل:

نطبق القانون:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

نحسب قيمة I، إنها تساوي مقدار الشحنة الموجودة في جزء الاسطوانة الذي طوله يساوي طويلة متجه السرعة ومقطعه مقطع الاسطوانة، ليكن V حجم هذا الجزء من الاسطوانة الذي يساوي:

$$V = 10^4 \times \pi \times (5\times10^5)^2 = 7.853\times10^{15} m^3$$

أما عدد الإلكترونات فيساوي:

$$N= \rho \times V^3 = 7.853\times10^{15} \times 2\times10^6 = 1.5708\times10^{22} e$$

وتكون شدة التيار المارة في هذه الاسطوانة مساوية للشحنة الموجودة في الحجم السابق:

$$I = 1.5708 \times10^{22} \times1.6022 \times10^{-19} = 2.51673 \times10^3 A$$

$$\Rightarrow B = \frac{4\pi\times10^{-7}\times2.51673\times10^3}{2\pi\times10^8} = 5.03346 \times10^{-12} we/m^2 (T)$$

أسئلة ومسائل غير محلولة

الأسئلة:

١. هل الحقل المغناطيسي المتولد من قبل عروة تيار منتظم؟ فسر ذلك.

٢. يولد التيار الكهربائي في ناقل حقل مغناطيسي، يمكن حسابه باستخدام قانون بيو سافار، وبما أن التيار يعرف بأنه معدل الشحن التي تعبر مقطع الناقل في واحدة الزمن. فكيف يمكنك تعريف الحقل المغناطيسي المتولد عن شحن ساكنة؟ وماذا عن الحقل المغناطيسي المتولد عن الشحن المتحركة؟

٣. سلكان متوازيان يسري فيهما تياران باتجاهين متعاكسين، صف محصلة الحقل المغناطيسي المتولد من قبل السلكين في النقاط التالية:

a) نقاط تقع بين السلكين.

b) نقاط تقع خارج السلكين في المستوي الذي يحوي هذين السلكين.

٤. اشرح لماذا يتدافع السلكان اللذان يسري فيهما تياران باتجاهين متعاكسين.

٥. ركبت دارة كهربائية وفق تقنية شائعة لفتل سلكين يسري فيهما تيارين متساويين ولكن باتجاهين متعاكسين. لماذا تُقلل هذه التقنية من حقول التشويش المغناطيسية؟

٦. هل يصلح قانون أمبير لجميع المسارات التي تحيط بناقل؟ لماذا لا يكون حساب $\vec{B}$ ذو فائدة لجميع هذه المسارات؟

٧. قارن قانون أمبير مع قانون بيو سافار، أي منهما يمثل الطريقة الأكثر عمومية لحساب $\vec{B}$ لتيار يسري في ناقل؟

٨. هل الحقل المغناطيسي داخل الملف الحلقي منتظم؟ أوضح ذلك؟

٩. كيف يتشابه قانون أمبير في المغناطيسية وقانون غوص في الكهرباء الساكنة؟

١٠. أنبوب نحاسي مفرغ ينقل تيار، لماذا $\vec{B}=0$ داخل هذا الأنبوب؟ وهل $\vec{B}$ لا يساوي الصفر خارج الأنبوب؟

١١. لماذا يؤدي طرق المغناطيس بمطرقة إلى تناقص مغنطته؟

١٢. لماذا لا يكون $\vec{B}$ مساوياً الصفر خارج الملف اللولب؟ ولماذا يكون مساوياً الصفر خارج الملف الحلقي؟ (ملاحظة:يجب أن تشكل خطوط $\vec{B}$ مسارات مغلقة).

١٣. صف تغير الحقل الكهربائي في المنطقة المحاطة بملف لولبي (وشيعة). ينقل تيار ثابت قيمته I، وذلك في الحالات التالية:

a) إذا تضاعف طول الملف لكن بقي عدد لفاته ثابت (أي أنه مُطَّ).

b) إذا تضاعف عدد لفات الملف وبقي طوله ثابت.

١٤. عروة ناقلة مستوية متوضعة في حقل مغناطيسي منتظم موجه على طول المحور ox. من أجل أي توضع لهذه العروة يكون التدفق خلالها أعظمياً؟ ومن أجل أي توضح لها يكون التدفق خلالها أصغرياً.

١٥. يجذب المغناطيس قطعة من الحديد. وتستطيع بعد ذلك قطعة الحديد هذه أن تجذب قطعة حديد أخرى. اشرح وفقاً لمبدأ سيطرة الارتصاف (الانتظام) للمغانط الذرية، ماذا يحصل في كل قطعة حديد؟

١٦. تصور أنك رجل فضاء حطَّ على كوكب بدون تجهيزات لاختبار المعادن المحيطة، وأن هذا الكوكب لا يحوي حقل مغناطيسي. لديك قضيبين من الحديد في حوزتك، أحدهما ممغنط والآخر غير ممغنط، كيف يمكنك تحديد أحدهما من الآخر؟

١٧. هل ينجذب المسمار الحديدي إلى أيٍ من قطبي المغناطيس؟ اشرح ماذا يحصل داخل المسمار عندما يوضح بالقرب من المغناطيس.

١٨. ينجذب القطب الشمالي لمغناطيس باتجاه القطب الشمالي الجغرافي. ولكن القطبان المغناطيسيان المتماثلان يتنافران. كيف يمكن تفسير هذه الحالة؟

١٩. اقترح حكيم هندوسي في إحدى المرات أن يدفن في تابوت مغناطيسي، القطبية فيه مرتبة بحيث يبقى معلقاً بين الأرض والسماء. هل هذه الرافعة المغناطيسية ممكنة؟ ناقش ذلك.

٢٠. لماذا تكون $\vec{M}=0$ في الخلاء؟ ما هي العلاقة بين $\vec{H},\vec{B}$ في الخلاء؟

٢١. لماذا ينجذب الفولاذ غير الممغنط إلى المغناطيس الدائم؟

٢٢. ما هي العوامل التي تساهم في عزم ثنائي الأقطاب الكلي لذرة؟

٢٣. لماذا تكون السماحية المغناطيسية للمواد الديامغناطيسية (عكسية التمغنط) سالبة؟

٢٤. لماذا يمكن إهمال التأثير الديامغناطيسي في المواد البارامغناطيسية؟

٢٥. اشرح معنى درجة حرارة كوري في المواد الفرومغناطيسية (حديدية المغنطة).

٢٦. ناقش الفرق بين كل من المواد الفرومغناطيسية والبارامغناطيسية والديامغناطيسية.

٢٧. ما الفرق بين المواد الفرومغناطيسية اللينة. والمواد الفرومغناطيسية القاسية؟

٢٨. ممّ يصنع سطح القرص الصلب لُلكمبيوتر من مادة مغناطيسية لينة أم قاسية؟

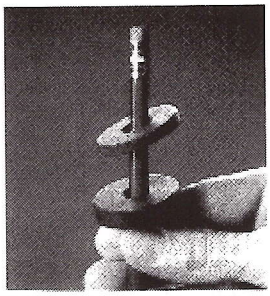
٢٩. يظهر الشكل (38-9) مغناطيسين يحوي كل منهما فتحة في مركزه. يدخل فيها قلم رصاص، بحيث يكون المغناطيس السفلي مثبت والعلوي مرتفع عنه نحو الأعلى المطلوب:

a) كيف يحصل ذلك؟

b) ما الغاية من استخدام قلم الرصاص؟

c) ماذا يمكنك القول عن قطبي المغناطيس من خلال الشكل؟

d) إذا قمنا بعكس المغناطيس العلوي فماذا تتوقع أن يحصل؟



الشكل (38-9):
يرتفع المغناطيس الأول فوق الآخر طافياً وذلك تحت تأثير القوة المغناطيسة.

٣٠. علل لماذا تملك بعض الذرات عزوم ثنائيات أقطاب مغناطيسية دائمة وبعضها لا تملك ذلك.

٣١. هل تتوقع أن ينجذب جزء من شريط الكاسيت (كاسيت المسجلة) إلى مغناطيس. (حاول ذلك لكن ليس بشريط ترغب بالاحتفاظ بما هو مسجل عليه).

٣٢. لديك مغناطيس قوي ومفك براغي. كيف يمكنك مغنطة المفك أولاً، ثم إزالة مغنطته؟

٣٣. اشرح لماذا يكون مرغوباً استخدام مواد فرومغناطيسية قاسية لصنع مغانط دائمة.

المسائل:

مسألة (1):

احسب قيمة الحقل المغناطيسي في نقطة تبعد 100cm عن ناقل رفيع وطويل يمر فيه تيار قيمته 1A.

مسألة (2):

يمر تيار مقداره 5A في سلك، يشكل هذا السلك دارة على شكل حلقة مؤلفة من لفة واحدة (عروة تيار). إذا كانت قيمة الحقل المغناطيسي المرغوبة في مركز هذه العروة هي 10μT، فما هو نصف قطر العروة المقابل لذلك؟

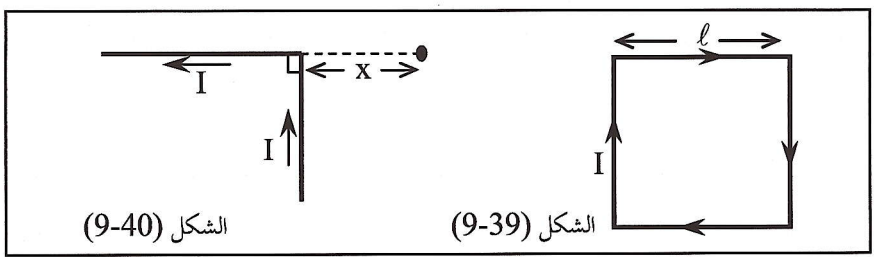
مسألة (5):

سلك مستقيم متوضع على طاولة أفقية ينقل تيار قيمته 1.2μA. يتحرك بروتون بموازاة السلك وباتجاه معاكس لاتجاه التيار وبسرعة ثابتة مقدارها $2.3\times10^4 m/s$، وينتقل مسافةً مقدارها d فوق السلك، عين قيمة d. يمكنك إهمال الحقل المغناطيسي للأرض.

مسألة (3):

a) نشكل مربع من سلك ناقل طول ضلع هذا المربع $\ell = 0.4m$، ويمر فيه تيار قيمته I = 10A، كما في الشكل (39-9)، احسب قيمة الحقل المغناطيسي في مركز هذا المربع وعين اتجاهه.

b) إذا شكل من هذا الناقل دارة على شكل حلقة من لفة واحدة، ومر في السلك نفس التيار السابق، فما هي قيمة الحقل المغناطيسي في مركزه العروة؟



الشكل (9-39) الشكل (9-40)

مسألة (4):

عين الحقل المغناطيسي في النقطة p المتوضعة على بعد x من رأس زاوية سلك طوله لانهائي حُني على شكل زاوية قائمة، كما في الشكل (9-40)، علماً أن السلك ينقل تيار ثابت قيمته I.

مسألة (6):

سلكان طويلان متوازيان تفصل بينهما مسافة 10cm، يسري فيهما تياران بنفس الاتجاه. إذا كان $I_1 = 5A$، $I_2 = 8A$، ما هي قيمة القوة التي تؤثر على كل واحدة طول في كل منهما من قبل الآخر.

مسألة (7)

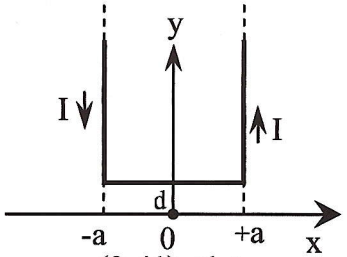
قضيبان نحاسيان متوازيان تفصل بينهما مسافة 1cm، يرسل فجأة دفقة تيار مقدارها 10kA في كل من الناقلين. احسب القوة المؤثرة لكل واحدة طول من كل من الناقلين. هل هي قوة تجاذب أم قوة تدافع؟

مسألة (8):

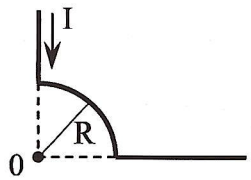
عين الحقل المغناطيسي بتابعية كلٍ من I, a, d في المبدأ 0 الموضح في الشكل (9-41).

مسألة (9):

جزء من سلك كما في الشكل (9-42)، ينقل تيار $I = 5A$، نصف قطر القوس الدائري $R = 3cm$، عين قيمة واتجاه الحقل المغناطيسي في المبدأ 0.



الشكل (9-41)



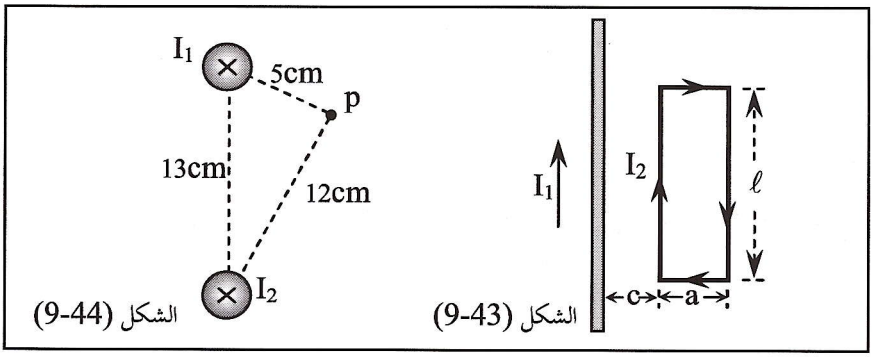
الشكل (9-42)

مسألة (10):

في الشكل (9-43) لدينا التيار في السلك الطويل المستقيم $I_1 = 5A$، أما التيار في العروة التي تشكل مستطيل فهو $I_2 = 10A$، وأن أبعاد هذه العروة هي:

$\ell = 0.45\ m, a = 0.15\ m, c = 0.1m$.

والمطلوب: أوجد قيمة واتجاه محصلة القوة المؤثرة على العروة المستطيلة من قِبل الحقل المغناطيسي المتولد من التيار I_1.



الشكل (9-44) الشكل (9-43)

مسألة (11):

ناقلان مستقيمان طويلان يسري فيهما تياران $I_1=3A$، $I_2=3A$، وكل منهما يتجه عمودياً إلى داخل هذه الصفحة كما في الشكل (9-44).

المطلوب: عين قيمة واتجاه محصلة الحقل المغناطيسي في النقطة p.

مسألة (12):

ما هي النفوذية النسبية لمادة طواعيتها المغناطيسية 10^{-4}.

مسألة (13):

يمكن لبعض الخلائط فائقة الناقلية في درجات الحرارة المنخفضة جداً، أن تنقل تيارات عالية جداً. على سبيل المثال، يمكن للخليطة Nb_3Sn في درجة الحرارة $10^{\circ}K$ أن تنقل تيار شدته 1×10^3A وتبقى محافظة على ناقليها الفائقة. عين القيمة العظمى لـ $\vec{B}$، التي يمكن الوصول إليها في وشيعة طولها 25cm، إذا احتوت 1000 لفة من سلك مصنوع من خليطة المركب Nb_3Sn.

مسألة (14):

إن الملفات المغناطيسية لمفاعل الالتحام من النوع توكوماك (Tokomak)، ذات شكل حلقي نصف قطره الداخلي 0.7m، ونصف قطره الخارجي 1.3m، إذا كان عدد لفات الملف الحلقي هو 900 لفة وهي مصنوعة من سلك قطره كبير وينقل فيها تيار قيمته 14kA، المطلوب:

a) أوجد شدة الحقل المغناطيسي على طول نصف القطر الداخلي.

b) أوجد شدة الحقل المغناطيسي على طول نصف القطر الخارجي.

مسألة (15):

لديك حجم معين من النحاس، يمكنك صنع أسلاك نحاسية منه، تستخدم هذه الأسلاك بعد ذلك لصنع وشائع لولبية متراصة، فماذا عليك أن تفعل من أجل توليد حقل مغناطيسي أعظمي في داخلها؟

a) هل عليك صنع الأسلاك طويلة ورفيعة أم ثخينة وقصيرة؟

b) هل عليك جعل نصف قطر الوشيعة صغير أم كبير؟ أوضح ذلك؟

مسألة (16):

حزمة متراصة مؤلفة من 100 سلك طويل ومستقيم ومعزول، تشكل اسطوانة نصف قطرها 0.5cm، المطلوب:

a) إذا مر تيار مقداره 2A في كل سلك، فما هي قيمة واتجاه القوة المغناطيسية المؤثرة على كل واحدة طول من سلك يتوضع على بعد 0.2cm من مركز الحزمة؟

b) هل يعاني السلك الموجود على السطح الخارجي للحزمة قوة أكبر أم أصغر من تلك المؤثرة على السلك المذكور في الطلب (a).

مسألة (17):

وشيعة نصف قطرها R=5cm، مصنوعة من قطعة طويلة من سلك نصف قطره r = 2mm، وطوله $\ell = 10m$ حيث $\ell >> R$، والمقاومة النوعية لهذا السلك هي $\rho = 1.7\times10^{-8}\Omega\cdot m$، المطلوب: أوجد الحقل المغناطيسي في مركز الوشيعة، إذا كان السلك موصول ببطارية قوتها المحركة الكهربائية $\varepsilon = 20\ V$.

مسألة (18):

وشيعة مؤلفة من 500 لفة، طولها 50cm، يسري في سلكها تيار قيمته 4A، المطلوب: احسب الحقل المغناطيسي في نقطة واقعة على محور هذه الحلقة، وتبعد عن مركزها بمقدار 15cm، أي تبعد عن أحد طرفي الوشيعة بمقدار 10cm.

مسألة (19):

مكعب طول حرفه 2.5cm، متوضع كما هو موضح في الشكل (43-9). يخترق هذا المكعب حقل مغناطيسي منتظم يعطى بالعلاقة $\vec{B} = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})T$، المطلوب:

a) احسب التدفق خلال الوجه المظلل.

b) ما هو التدفق الكلي من خلال الأوجه الستة.

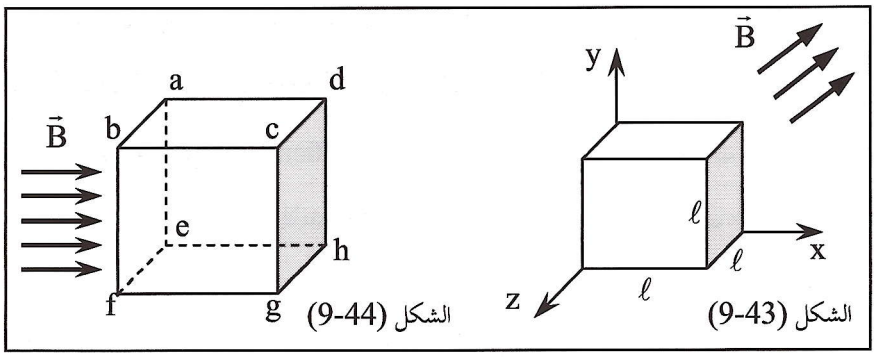
مسألة (20):

يتغير مع الزمن الكمون المطبق بين صفيحتي مكثفة سعتها 4μF، وفق العلاقة: $V_{app} = (8V)\cdot(1 - e^{\frac{-t}{4}})$، حيث t بالثانية، المطلوب:

a) احسب انزياح التيار بتابعية الزمن. b) احسب قيمة التيار في اللحظة $t = 4s$.

مسألة (21):

نأخذ المكعب الموضح في الشكل (44-9)، طول ضلعه L، يوجه حقل مغناطيسي منتظم $\vec{B}$ عمودياً على الوجه abfe، المطلوب: أوجد التدفق المغناطيسي خلال كل من الحلقات المستوية التالية: a) dfhd , b) acfa



الشكل (9-44)　　الشكل (9-43)

مسألة (22):

تشحن مكثفة بتيار مقداره 0.1A، فإذا علمت أن كلاً من صفيحتين المكثفة له شكل مربع طول ضلعه 5cm، وأن المسافة الفاصلة بين اللبوسين هي 4mm، المطلوب:

a) أوجد معدل التغير الزمني للتدفق بين صفيحتين هذه المكثفة.

b) أوجد تيار الإزاحة بين الصفيحتين.

مسألة (23):

ملف حلقي نصف قطره الوسطي 20cm، وعدد لفاته 630 لفة، كما في الشكل (9-11)، مملوء ببراد الفولاذ التي طواعيتها المغناطيسية هي $\chi = 100$، فإذا كان التيار المار في اللفات هو 3A، فأوجد قيمة B داخل الملف على افتراض أنه منتظم.

مسألة (24):

وشيعة فائقة الناقلية تولد حقلاً مغناطيسياً قيمته 10T والمطلوب:

a) إذا كانت الوشيعة تتألف من 2000turne/m، فما قيمة التيار اللازمة لتوليد الحقل؟

b) ما هي قيمة القوة في واحدة الطول، التي تؤثر على اللفات من قبل الحقل ؟

مسألة (25):

نريد إنتاج حقل مغناطيسي قيمته 1.3T، من ملف حلقي له قلب من الحديد، نصف القطر الوسطي لهذا الملف هو 100cm، والنفوذية المغناطيسية له هي $5000\mu_0$، ما شدة التيار اللازمة في هذه الحالة إذا كان عدد لفات هذا الملف هو 470 turne.

مسألة (26):

وشيعة مؤلفة من 500 لفة، ملفوفة على حلقة من الحديد $\mu_m = 750\ \mu_0$، ونصف قطرها الوسطي 20cm، ومساحة مقطعها $8cm^2$، المطلوب: احسب التدفق المغناطيسي φ في حلقة رولاند، إذا كانت شدة التيار المار في الملف هي 0.5A.

مسألة (27):

وجدنا في هذا الفصل أنه من الممكن التعبير عن $\vec{B}$ بتابعية $\vec{H}$ والتمغنط $\vec{M}$ على النحو $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}$، والمطلوب اكتب علاقة الطواعية المغناطيسية χ بـ $\vec{H}$، و $\vec{M}$، من أجل المواد البارامغناطيسية والمواد الديامغناطيسية.

مسألة (28):

مغناطيس اسطواني من الحديد الممغنط قطره 3cm وطوله 20cm وقيمة الحقل المغناطيسي في داخله $B = 0.04T$. ما هو عدد لفات وشيعة قلبها الهواء، لها نفس أبعاد المغناطيس، تنتج نفس الحقل المغناطيسي، ويسري فيها تيار قيمته 5A.

مسألة (29):

يمكن أن يولد في حالة الإشباع من اصطفاف ثنائيات الأقطاب حقل مغناطيسي $\vec{B}$ قيمته أكثر من 2T، إذا كان كل إلكترون يقدم عزم مغناطيسي $9.27\times10^{-24}A.m^2$ (ماغنيتون بور واحد)، فكم عدد الإلكترونات في الحديد التي تساهم في الحقل المغناطيسي في حالة الإشباع. (ملاحظة: يوجد في الحديد $8.5\times10^{28}\ atom/m^3$).

مسألة (30):

يبلغ العزم المغناطيسي للأرض $8.7\times10^{22}A.m^2$ تقريباً، المطلوب:

a) إذا كان هذا الحقل متولد من كتل هائلة من الحديد المخزن في الأرض، فما هو عدد الكترونات غير المتزاوجة التي يجب أن تقابل ذلك.

b) إذا افترضنا وجود إلكترونين غير متزاوجين في ذرة حديد، فكم كيلو غرام من الحديد يقابل ذلك. (كثافة الحديد $7900kg/m^3$ ويوجد في الحديد $8.5\times10^{28}atom/m^3$).

الفصل العاشر

التيـــــار المتنـــــاوب

Alternating current

١٠-١- مقدمة *Introduction:*

يختلف التيار المتناوب Alternating current (AC)، عن المستمر بأن حركـــة إلكترونات الناقلية فيه اهتزازية جيبية، ومع التطورات الصناعية في القرن الماضي أظهر التيار المتناوب AC تفوقاً في الاستخدامات الصناعية التقنية مقارنة مع التيار المســـتمر Directed current (DC)، ويعزى ذلك بالدرجة الأولى إلى إمكانية تحويـــل التيـــار المتناوب من توتر منخفض إلى متوسط أو عالي وبالعكس، وهذه خاصية هامة تعمـــل على التوفير في الطاقة الكهربائية عند نقلها عبر مسافات طويلة. كما توفر أيضا إمكانية الاستخدام المريح للطاقة الكهربائية.

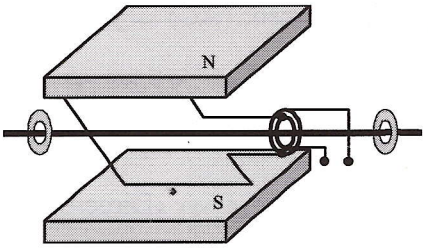
من الناحية الفيزيائية، ونظراً لطول موجة التيار المتناوب λ الكبير بالمقارنة مـــع أبعاد الدارات الكهربائية المستخدم فيها، فإنه يمكننا الاعتبار بأنه تيار شبه مســـتمر أو مستمر، وأما التغير الزمني لكل من شدة التيار والكمون فيسيران ببطء بحيـــث يبقـــى قانون أوم محقق في كل لحظة بالإضافة لذلك فإن كـــل مـــن الحقلـــين الكهربـــائي والمغناطيسي المرافقين للتيار المتناوب يرتبط مع التيار والكمون كما لو كانا ثابتين.

١٠-٢- توليد التيار المتناوب

Generating of Alternating Current:

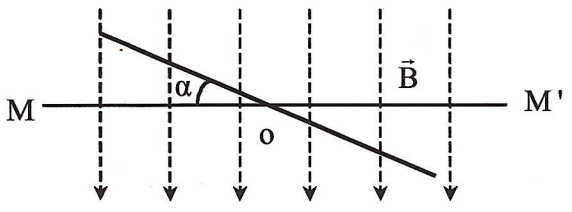
يتم توليد التيارات الكهربائية المتناوبة في محطات الطاقة الكهربائيـــة بواســـطة مولدات تعتمد مبدأ توليد فرق كمون كهربائي أو توتر باستخدام حقل التحـــريض المغناطيسي، وسنعرض فيما يلي مبدأ عمل هذه المولدات، يوضـــح الشـــكل (1-10) عروة من سلك ناقل على شكل مستطيل يخترقها حقل مغناطيسي منتظم، لـــيكن A

سطح هذه العروة، من الواضح أنه عند دوران هذه العروة حول محورها تتغير زاوية ناظم سطحها $\vec{a}$ مع خطوط الحقل المغناطيسي ويؤدي ذلك إلى تغير التدفق من خلال هذا السطح، وبالتالي مرور تيار كهربائي من خلال سلك هذه العروة، ونظراً لأن تغير التدفق أثناء دوران العروة يكون مرة بالزيادة ومرة بالنقصان، فإن التيار الناتج يكون متناوباً.



الشكل (10-1):
مبدأ توليد التيار المتناوب

ومن أجل التعبير الكمي بعلاقات رياضية عما سبق، نعتبر الشكل التخطيطي (10-2) والذي يبين مقطع العروة الكهربائية على شكل قطعة مستقيمة بحيث يكون محور دورانها عمودي على مستوى الرسم. لتكن α الزاوية المتغيرة التي يشكلها مستوي العروة مع المستوي الأفقي MM′، فيكون التدفق المتغير للحقل المغناطيسي الذي خطوطه تخترق سطح هذه العروة هو:



الشكل (10-2):
مقطع رأسي للعروة المولدة للتيار المتناوب.

$$\varphi(t) = \vec{A}.\vec{B} = A.B.\cos\ \alpha$$

وعندما تدور العروة بسرعة زاوية ثابتة ω، تتحقق العلاقة $\alpha = \omega t$ ويمكن بالتالي حساب التدفق المغناطيسي بتابعية الزمن كما يلي:

$$\varphi(t) = A.B.\cos\ \omega t = \Phi_m \cos\ \omega t \qquad (10\text{-}1)$$

حيث Φ_m التدفق الأعظمي ويخترق هذه العروة عندما تكون خطوط الحقل المغناطيسي عمودية على سطحها أي عندما $\alpha = 0$.

يتولد خلال دوران هذه العروة فرق كمون متحرض يعطى بالعلاقة:

$$u_{ind}(t) = -\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

$$u_{ind}(t) = -\frac{d(A.B.\cos\ \omega t)}{dt}$$

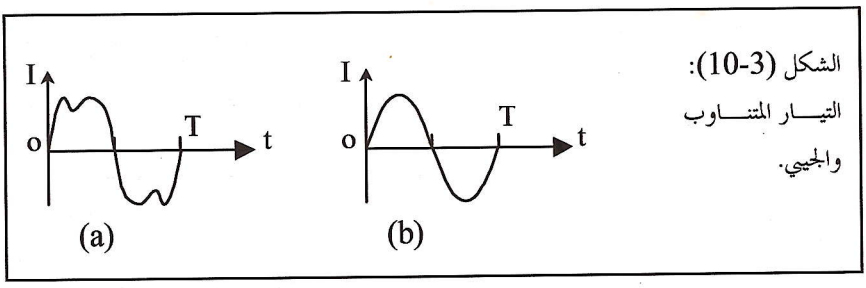
$$u_{ind}(t) = A.B\ \omega \sin\ \omega t$$

وبحسب العلاقة الأخيرة فإن المنحني الزمني للكمون المتحرض induced يكون جيبي الشكل، فإذا رمزنا لسعته بالرمز U_m التي تساوي $\omega A.B$ تصبح العلاقة الأخيرة على الشكل:

$$u_{ind}(t) = U_m \sin \omega t \qquad (10\text{-}2)$$

وبما أن فرق الكمون المتولد جيبي الشكل، فإنه يولد في مقاومة ما تيار متناوب جيبي الشكل أيضاً وهو مبين في الشكل (10-3,b) ويمكن تمثيله بالعلاقة:

$$i(t) = I_m \sin \omega t \qquad (10\text{-}3)$$



الشكل (10-3): التيار المتناوب والجيبي.

إن التيار الجيبي أو التجيبي يعتبر حالة خاصة من التيار المتناوب، الذي ليس من الضروري أن يكون تغير شدته أو فرق الكمون الذي ينتجه، جيبياً أو تجيبياً، ويوضح الشكل (10-3,a) التمثيل البياني لتيار متناوب ما، والذي يمثل في الحقيقة تابعاً دورياً ولكن بقانون مختلف، وبما أنه وبحسب تحليل فوريه الرياضي يمكن تحليل كل تابع دوري إلى مجموع توابع جيبية وتجيبية، فإنه يكتفى عادةً بدراسة تيارات جيبية أو تجيبية.

١٠-٣- خصائص التيارات المتناوبة والاهتزازات

:Characteristics of Alternating Current and Vibrations

كنا قد تعاملنا في الفصول السابقة مع قيم مستمرة للتيار والكمون، وكنا رمزنا لهما بحروف كبيرة V, I، ونشير هنا إلى أن التيار والكمون المتناوبين يرمز لهما بحروف صغيرة v, i على الترتيب، وهي تعبر عما ندعوه بالقيم اللحظية. وسنطبق هذا الاصطلاح على جميع المقادير الكهربائية التي سنتعامل معها في هذا الفصل، فمثلاً يرمز للقيم العظمى والوسطى والمنتجة للتيار بـ I_m, I_{av}, I_{eff}، وللكمون بـ V_m, V_{av}, V_{eff}، وهي تعتبر من المقادير المستمرة، وكذلك يرمز للاستطاعة اللحظية والمستهلكة بـ P, p على الترتيب. كما يرمز للقيمة المنتجة بالدليل rms بدلاً من الدليل eff.

تسمى القيمة الحدية الموجبة أو السالبة التي تكون الأكبر بالقيمة المطلقة، والتي تمثل النهاية العظمى أو الصغرى (قمة أو قعر) للمنحني الجيبي الممثل للتيار المتناوب بالمطال الأعظمي أو السعة، ونستخدم تعابير مثل التدفق المغناطيسي الأعظمي وفرق الكمون الأعظمي وشدة التيار العظمى ونرمز لها على الترتيب بالرموز Φ_m , U_m , I_m.

عند قياس شدة أو فرق الكمون لتيار متناوب فإن مقاييس فرق الكمون والتيار المستمرين لا تصلح لهذا الغرض، لذلك تستخدم مقاييس خاصة بالتيار والكمون المتناوبين، ويكتب عليها اختصار التيار المتناوب AC. إن هذه المقاييس مصممة لتقيس القيم المنتجة للتيار وفرق الكمون I_{eff}, V_{eff}، وهي ليست قادرة على الاستجابة للتغيرات السريعة جداً لقيمها اللحظية، ولا تستطيع إظهارها. لأن عطالة مثل هذه المقاييس كبيرة جداً مقارنةً مع أدوار التيارات المتناوبة، فعلى سبيل المثال تيار المدينة الذي تواتره 50Hz يكون دوره 1/50sec وهو زمن صغير جداً.

يوجد أجهزة قياس خاصة بالذبذبات أو الاهتزازات الكهربائية تملك القدرة على متابعة التغيرات الزمنية السريعة للتيار أو فرق الكمون، وتظهرها على شكل منحنيات بيانية على شاشتها الخاصة، وإننا باستخدامها نستطيع إجراء القياسات المختلفة المتعلقة بالاهتزازات الكهربائية، نسمي هذه الأجهزة برواسم الأشعة أو الاهتزاز المهبطية cathode ray oscillograph or oscilloscope.

نتعرف فيما يلي على هذه المقادير المتعلقة بالتيار المتناوب:

الدور والتواتر Period and frequency:

تسمى الفترات الزمنية المتساوية التي تفصل بين نقاط متماثلة من المنحني التابع الزمني الذي يمكن أن يكون منحني التيار أو الكمون ويكرر فيها المنحني نفسه، بالدور ويرمز له بالرمز T ويسمى مقلوبه 1/T بالتواتر أو التردد ويرمز له بالرمز f وقيمته العددية تمثل عدد الأدوار في واحدة الزمن وبالتالي:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \omega \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (10\text{-}4)$$

حيث تمثل ω هنا السرعة الزاوية التي تدور بها العروة الكهربائية، ويقاس التواتر في الجملة الدولية بواحدة هي مقلوب الثانية 1/s وتسمى بالهرتز نسبةً إلى العالم هرتز ويرمز لها بـ Hz.

القيمة الفعالة (المنتجة) Effective amount:

عند حساب العمل أو الاستطاعة في دارة تيار متناوب من المناسب استخدام القيمة الفعالة للتيار المتناوب. نعرف القيمة الفعالة لتيار متناوب بأنها شدة التيار المستمر الذي يقدم الاستطاعة الحرارية نفسها التي يقدمها التيار المتناوب. ونحسب القيمة الفعالة للتيار المتناوب I_{eff} على النحو التالي:

يقدم التيار الذي شدته i(t) خلال الزمن dt عندما يسري في مقاومة R عملاً على شكل كمية من الحرارة يعطى بعلاقة جول التالية:

$$dw = i^2(t)\ R\ dt \qquad (10\text{-}5)$$

وخلال فترة دور كامل T تكون كمية الحرارة:

$$W_T = \int_0^T i^2(t) R dt = R \int_0^T i^2(t) dt \qquad (10\text{-}6)$$

ويجب أن تكون كمية الحرارة W_T هذه مساوية لتلك الناتجة في الزمن نفسه T عن تيار مستمر شدته I_{eff}:

$$W_T = R . I_{eff}^2\ T \qquad (10\text{-}7)$$

وبمقارنة العلاقتين (10-5) ، (10-6) ينتج:

$$I_{eff} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)\,dt \right]^{1/2} \qquad (10\text{-}8)$$

تعطي العلاقة (10-8) القيمة الفعالة للتيار وتصح هذه العلاقة من أجل جميع أشكال التيار المتناوب الجيبي وغير الجيبي.

من أجل الحالة الخاصة التي يكون فيها التيار المتناوب على شكل تابع جيبي أي إن:

$$i(t) = I_m \sin \omega t$$

فيكون مربع القيمة الفعالة للتيار معطى في هذه الحالة بالعلاقة:

$$I_{eff}^2 = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t\,dt$$

وباستخدام تعريف السرعة الزاوية من العلاقة (10-4) والعلاقة التالية من حساب المثلثات:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1-\cos 2\omega t}{2}$$

يصبح التكامل السابق كما يلي:

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{2}\frac{I_m^2}{T}\left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{I_m^2}{T}\left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T = \frac{1}{2}\frac{I_m^2}{T}[T-0]$$

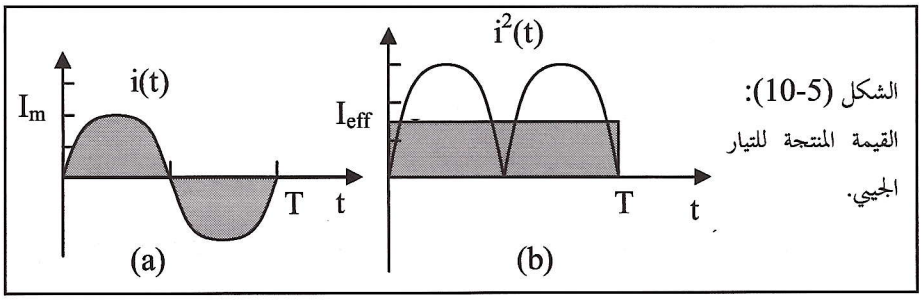
$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad (10\text{-}9)$$

ويبين الشكل (10-5) شدة التيار المتناوب ومربع قيم الشدة اللحظية، كما يبين القيمة المنتجة المتمثلة بالمنطقة المظللة.

وبنفس الطريقة السابقة وقياساً على العلاقة (10-8) نحصل على علاقة القيمة الفعالة التالية لفرق الكمون لتيار متناوب جيبي:

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad (10\text{-}10)$$

وهذه العلاقة يمكن أيضاً تمثيلها برسمٍ كالذي في الشكل (5-10).



الشكل (5-10): القيمة المنتجة للتيار الجيبي.

نعرف معامل المطال k بين المطال الأعظمي والقيمة الفعالة بالعلاقة التالية:

$$k = \frac{U_m}{U_{eff}} \qquad (10\text{-}11)$$

ومن أجل التيار الجيبي الشكل فإن قيمة معامل المطال الأعظمي يساوي $\sqrt{2}$، وبالطبع عندما لا يكون للتيار شكلاً جيبياً فإن قيمة معامل المطال الأعظمي ستتغير.

تعطى الاستطاعة المستهلكة P –التي تعتبر مقداراً مستمراً– لتيار متناوب والمصروفة في مقاومة R يمر من خلالها هذا التيار باستخدام القيم الفعالة لكلٍ من شدة التيار I_{eff} وفرق الكمون U_{eff} ومن خلال علاقة جول التالية:

$$P = I_{eff} \cdot U_{eff} = I_{eff}^2 R = \frac{U_{eff}^2}{R} \qquad (10\text{-}12)$$

القيمة الوسطى Average amount:

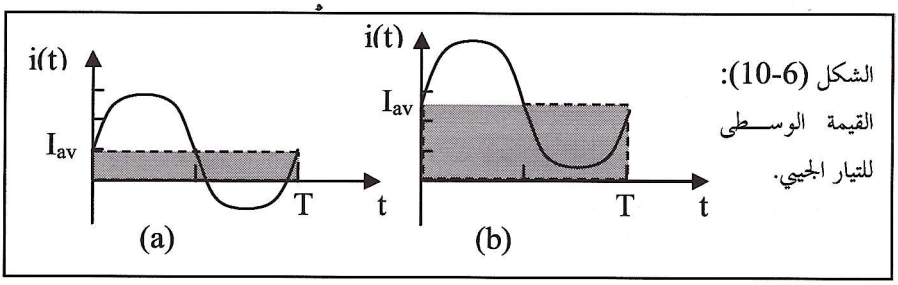
من القيم المهمة المستمرة الأخرى لكل من التيار والكمون ما ندعوه بالقيم الوسطى I_{av} للتيار و V_{av} للكمون والتي ندعوها بالقيم الغلفانية galvanic أحياناً. نعرف القيمة الوسطى للتيار بأنها متوسط قيمه الآنية أو اللحظية على مدى دور كامل، ونعبر عن ذلك رياضياً بالشكل التالي:

$$I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt \qquad (10\text{-}13)$$

نلاحظ من الشكل (10-5,a) أن التابع الجيبي يحصر مساحتين متساويتين فوق وتحت محور الزمن، فالتي فوق المحور تكون موجبة والتي تحت المحور تكون سالبة،

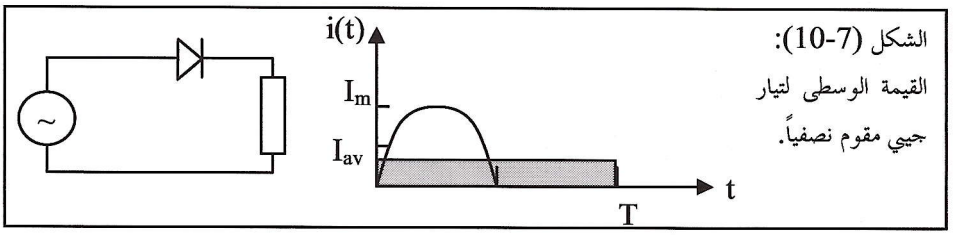
ومجموعهما يكون صفراً، والنتيجة هي أن القيمة الوسطى لكل تابع متناوب أو دوري متناظر حول محور الزمن تكون معدومة.

أما إذا لم يكن التابع متناظراً حول محور الزمن فلن تكون القيمة الوسطى معدومة، الأمر الموضح في الشكل (10-6,a)، حيث أن المساحة التي يحصرها التابع فوق المحور أكبر منها تحت المحور، أو أنها تكون كلها فوق المحور كما في الشكل (10-6,b) وتكون القيمة الوسطى متمثلة بالمستطيل المنقط في الشكلين. وكذلك فإن التيار المتناوب في الشكلين (10-7) و (10-8) له القيمة الوسطى التي تساوي I_m / π , $2I_m$ / π على الترتيب.



الشكل (10-6): القيمة الوسطى للتيار الجيبي.

للحصول على تيار ذي اتجاه واحد يمكن استخدام دارات كهربائية أو إلكترونية كدارتي تقويم التيار المتناوب الموضحتين في الشكلين (10-7) و (10-8)، اللتين تحويان على ديودات تمثل عناصراً إلكترونية لها خاصية تمرير التيار في اتجاه واحد، فهي تعمل على حذف إحدى نوبتي التيار أو عكسها لتصبح في اتجاه الأخرى.



الشكل (10-7): القيمة الوسطى لتيار جيبي مقوم نصفياً.

تنقل القيم المستمرة للتيار في الأشكال السابقة خلال دور واحد نفس الكمية من الكهرباء التي ينقلها التيار المتناوب الذي حسبت من أجله، ولذلك ندعو هذا التيار

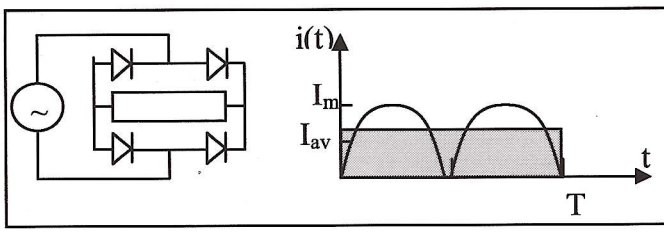
المتناوب بالتيار ذي الاتجاه الواحد. يمكن حساب القيمة الوسطى للتيارين المبينين في الشكل (10-6)، ولكن من الأسهل حساب القيمة الوسطى للتيارين المبينين في الشكلين (10-7) و (10-8).

إن الشحنة المنقولة خلال الزمن dt تساوي i(t)dt، وباستخدام العلاقة (10-13) التي تعرف القيمة الوسطى للتيار المتناوب، نحسب الشحنة المنقولة خلال دور كامل، ونكتفي بالتكامل على نصف الدور الأول لأن التيار معدوم في نصف الدور الثاني، وبالتالي نكتب:

$$Q = \int_0^{T/2} i(t)\,dt \qquad (10\text{-}14)$$

وبفرض أن التيار جيبي فإن $i(t) = I_m \sin \omega t$ وبالتعويض في العلاقة الأخيرة نجد:

$$Q = \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t\,dt = -\frac{I_m}{\omega}\cos \omega t\Big|_0^{T/2}$$



الشكل (10-8):
القيمة الوسطى لتيار جيبي مقوم بالكامل.

وبما أن السرعة الزاوية $\omega = \frac{2\pi}{T}$ نبدل في العلاقة الأخيرة فتصبح:

$$Q = -\frac{I_m}{\omega}\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) + \frac{I_m}{\omega}\cos(0)$$

$$Q = \frac{2I_m}{\omega} \qquad (10\text{-}15)$$

وحسب تعريف التيار ذو الاتجاه الواحد فإن الشحنة تعطى بإحدى العلاقتين:

$$Q = I_{av}\frac{T}{2} \;;\; Q = I_{av}\frac{\pi}{\omega} \qquad (10\text{-}16)$$

وبالمقارنة مع العلاقة (10-15) ينتج:

$$I_{av}\frac{\pi}{\omega} = \frac{2I_m}{\omega} \Rightarrow I_{av} = \frac{2I_m}{\pi} \qquad (10\text{-}17)$$

إن النسبة بين القيمة الفعالة للتيار المتناوب وقيمة الاتجاه الواحد I_{eff} / I_{av}، تعتبر معاملاً مهماً لوصف التيار المتناوب، وتساوي قيمته 1.11 من أجل التيارات المتناوبة الجيبية، وكلما كانت النهايات العظمى والصغرى للتيار ضيقة العرض أكثر كلما كانت قيمة هذا المعامل أكبر.

١٠-٤- عمل واستطاعة التيار المتناوب

Work and Power of Alternating Current:

لا تختلف علاقات العمل في حال التيار المتناوب عنها في حال التيار المستمر، حيث إن عمل التيار المتناوب خلال الزمن dt عبارة عن حاصل جداء القيم الآنية لشدة التيار وفرق الكمون مضروبة بالزمن أي أن:

$$dw = i(t).u(t).dt \qquad (10\text{-}18)$$

وعندما يكون لمنحنيي شدة التيار i(t) وفرق الكمون u(t) الطور نفسه أي إن نهايتيهما العظميين تقعان في نفس اللحظة وكذلك الصغريين أيضاً، توافق هذه الحالة حالة تيار متناوب يجري في مقاومة، عندها فإن شدة التيار وفرق الكمون يعطيان على الترتيب التابعين الجيبين:

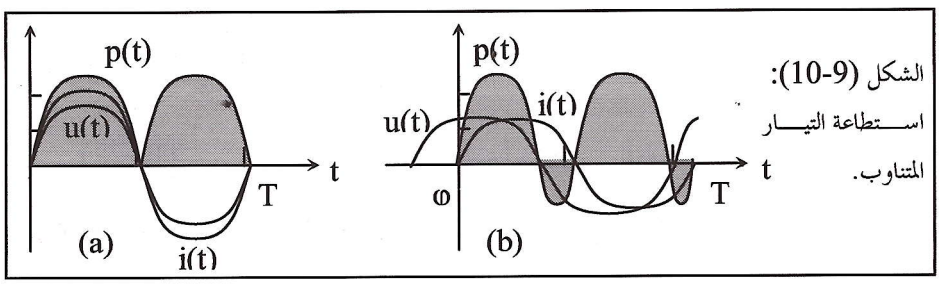
$$\left.\begin{aligned} u(t) &= U_m \sin \omega t \\ i(t) &= I_m \sin \omega t \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}19)$$

وبالرغم من أن التيار والكمون يغيران إشارتيهما بشكل مستمر ولكنهما يتغيران معاً على كامل الدور، أي أن لهما نفس الطور أو الصفحة، أو أن فرق الطور بينهما معدوماً، وبالتالي يكون لهما دوماً نفس الإشارة، ونقول عند ذلك بأن التيار والكمون متطاوران، وهكذا يكون للعمل أو الاستطاعة في هذه الحالة إشارة موجبة دوماً كما هو موضح في الشكل (10-9,a).

عندما تحوي دارة تيار متناوب وشائع ومكثفات إضافية، فإن التيار والكمون لن يبقيا متطاورين كما في الشكل (10-9,b)، ولكن يصبح بينهما فرق في الطور مقداره φ، فبفرض أن التيار يتأخر عن الكمون فإننا نكتبهما على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= U_m \sin \omega t \\ i(t) &= I_m \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}20)$$

يكون العمل أو الاستطاعة في الحالة الأولى، الشكل (10-9,a)، موجباً دائماً لأن للتيار والكمون نفس الإشارة دائماً، أما في الحالة الثانية، الشكل (10-9,b)، فنلاحظ من الرسم أن هناك قطاعات يكون فيها للتيار والكمون الإشارة نفسها وتوافق عملاً أو استطاعة موجبة، أي أنها تقع فوق محور الزمن، وقطاعات يكون فيها للتيار والكمون إشارتان مختلفتان، وتوافق استطاعة سالبة، وهي تقع تحت محور الزمن.



الشكل (10-9): استطاعة التيار المتناوب.

توافق الاستطاعة الموجبة المرحلة أو النوبة التي يتم فيها دفع الإلكترونات من قبل المنبع خلال الأسلاك، حيث تتحول الطاقة الكهربائية إلى عمل في الوسط الخارجي كالآلات والأجهزة، أو أن تتحول إلى حرارة في المقاومات بحسب مبدأ جول، أو تتحول إلى طاقة كامنة مغناطيسية في الوشائع، أو تخزن كطاقة كامنة كهربائية في الحقول الكهربائية للمكثفات. وتوافق الاستطاعة السالبة المرحلة التي يسترجع فيها منبع التيار الطاقة الكامنة الكهربائية من المكثفات والمغناطيسية من الوشائع، وهو لا يسترجع بالطبع الطاقة الحرارية لأنها تضيع في المقاومات والوسط الخارجي.

باعتبار أن الكمون والتيار يعطيان في هذه الحالة بالعلاقتين (10-20) فإن العمل المقدم خلال الزمن dt يعطى بالعلاقة:

$$dw = u(t).i(t)dt = U_m.\sin(\omega t).I_m.\sin(\omega t - \varphi)dt \qquad (10\text{-}21)$$

بالعودة إلى حساب المثلثات واستخدام العلاقة:

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

نفرق عبارة التيار إلى حدين فتصبح:

$$i(t) = I_m \sin \omega t.\cos \varphi - I_m \cos \omega t.\sin \varphi$$

يمثل الحد الأول $I_m \sin \omega t.\cos \varphi$ من عبارة التيار جزء التيار الذي يوجد في الطور نفسه مع الكمون، أما الحد الثاني $I_m \cos \omega t.\sin \varphi$ من عبارة التيار فيمثل جـــزء التيار الذي يتأخر عن الكمون بفرق طور مقداره $\pi/2$ وعليه يمكن أن نعبّر عن العمـــل الكلي في هذه الحالة بالتعويض في العلاقة (10-21) على النحو:

$$dw = U_m I_m \cos \varphi \sin^2 \omega t.dt - U_m I_m \sin \varphi.\sin \omega t.\cos \omega t.dt$$

ومن حساب المثلثات باستخدام العلاقة:

$$\sin \omega t.\cos \omega t = \frac{1}{2}\sin 2\omega t$$

ثم حساب العمل التفاضلي فنجد:

$$dw = U_m I_m \cos\varphi \sin^2 \omega t dt - \frac{1}{2} U_m I_m \sin\varphi.\sin 2\omega t dt \qquad (10\text{-}22)$$

ونحصل على العمل الكلي المنجز خلال دور كامل T ونرمز له بالرمز W_T عن طريق مكاملة العلاقة (10-22) على كامل هذا الدور أي أن:

$$W_T = \int_0^T dw = U_m I_m \cos\varphi \int_0^T \sin^2 \omega t.dt - \frac{1}{2} U_m I_m \sin\varphi \int_0^T \sin 2\omega t.dt \qquad (10\text{-}23)$$

وبنفس طريقة حساب التكاملات لدى حساب القيمة الفعالة في الفقرة (١٠-٣) نجد أن التكامل الأول يساوي T/2 والثاني معدوم وبالتالي :

$$W_T = \frac{1}{2} U_m I_m T.\cos \varphi \qquad (10\text{-}24)$$

نستطيع مما سبق صياغة عبارة الاستطاعة الوسطى أي الاستطاعة الثابتة القيمة الـــتي تُعطى خلال دورٍ كاملٍ، ونسيمها الاستطاعة المؤثرة ونرمز لها بالرمز $\overline{P}$ كما يلي:

$$\overline{P} = \frac{W_T}{T} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi \qquad (10\text{-}25)$$

وبحسب العلاقتين $U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ ، $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ تصبح العلاقة (10-25) كما يلي:

$$\overline{P} = I_{eff}\ U_{eff}\ \cos \varphi \qquad (10\text{-}26)$$

نسمي المعامل $\cos\varphi$ معامل الاستطاعة power factor. ونعبر عن العلاقة السابقة بالعبارة التالية:

تعطى الاستطاعة المؤثرة لتيار متناوب كحاصل ضرب القيمة الفعالة للتيار بالقيمة الفعالة للكمون بمعامل الاستطاعة.

إن الطاقة المعنية في هذه العلاقة يمكن أن تعطى كحرارة أو كعمل ميكانيكي، وهذه الاستطاعة هي مقدار وسطي وتقدر بواحدة الواط W.

ونعرف الاستطاعة الظاهرية apparent power بالمقدار التالي:

$$S = \overline{P}_{max} = I_{eff}.U_{eff} \qquad (10\text{-}27)$$

نلاحظ من العلاقة (10-26) أنه عندما يكون فرق الطور معدوماً $\varphi = 0$ فالاستطاعة المستهلكة كما في الشكل (10-9,a) تكون عظمى ومساوية للاستطاعة الظاهرية، أما إذا كان فرق الطور مساوياً $\varphi = \pm\pi/2$ فإن الاستطاعة المستهلكة تكون معدومة، أي أن الدارة لا تستهلك أية طاقة، وهذا يصادف في الوشائع ذات المقاومة الأومية المهملة وفي المكثفات، ونلاحظ أيضاً أن الاستطاعة المستهلكة تكون دوماً موجبة.

ونلاحظ أنه لدينا دوماً $\overline{P} \le S$، ولكي نتذكر أن الاستطاعة S تختلف عن الاستطاعة الوسطى $\overline{P}$ المستهلكة في الدارة فإننا نقدر الاستطاعة الظاهرية بالفولط أمبير V.A.

ويعطي الحد الأخير من العلاقة (10-23) قيمة الطاقة التي تتغير دورياً بين القيم الموجبة والسالبة، وهذا يعني أن الطاقة تُدفع من قبل مولد التيار المتناوب في النواقل والوشائع والمكثفات في حالة القيم الموجبة، ثم تسحب هذه الطاقة من قبل المولد من الوشائع والمكثفات في حالة القيم السالبة. وهكذا يهتز التيار ومعه الكمون والطاقة بين المنبع والعناصر غير المستهلكة للطاقة، ندعو الاستطاعة المتعلقة بالطاقة المهتزة بالاستطاعة الرّدية reavtive power ونرمز لها بالرمز P_r، التي يمكن أن نحسبها بمقارنة الاستطاعتين المستهلكة والظاهرية، نكتب:

$$P_r = I_{eff}\ U_{eff}\ \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$$

$$P_r = I_{eff}\ U_{eff}\ \sin\ \varphi \qquad (10\text{-}28)$$

وبما أن هذا الجزء من الاستطاعة لا يتحول إلى أي شكل من أشكال الطاقة، فإنه يسمى بالمركبة الخالية من الواط، ويقدر بواحدة تسمى الفولط أمبير ردّي Volt Amper reavtive (V.A.r). ويمكن أن نعبر عن العلاقة بين الاستطاعات الثلاث على النحو التالي:

$$S^2 = \overline{P}^2 + P_r^2$$

لقد دارت المناقشة في هذه الفقرة حتى الآن حول مكثفة لا تحوي عازل، ووشيعة لا تحوي نواة حديدية، لنناقش تأثير العازل والنواة الحديدية على الطاقة والاستطاعة التي حصلنا عليها آنفاً فيما يلي:

عند وجود مكثفة تحوي عازل في دارة تيار متناوب فإن الحقل الكهربائي الناتج بين لبوسيها عن الطاقة الكهربائية المقدمة لها من قبل المولد، يكون مسؤولاً عن عمليات الاستقطاب الكهربائي التي تحصل داخل العازل، وبالتالي يخسر الحقل جزءاً من طاقته، وعندما يسترجع المولد الطاقة فهو لا يسترجع كامل الطاقة التي قدمها للمكثفة بسبب وجود العازل.

أما عند وجود وشيعة تحوي لب حديدي في دارة تيار متناوب فإن الحقل المغناطيسي الناتج داخلها عن الطاقة الكهربائية المقدمة لها من قبل المولد، يكون مسؤولاً عن عمليات الاستقطاب المغناطيسي التي تحصل داخل اللب الحديدي، وبالتالي يخسر الحقل جزءاً من طاقته، وعندما يسترجع المولد الطاقة فهو لا يسترجع كامل الطاقة التي قدمها للوشيعة بسبب وجود اللب الحديدي، ويتناسب هذه الضياع مع مساحة دورة البطاء المغناطيسي للحديد.

يحصل في المحولات أيضاً ما ندعوه بالتيارات الدوامة في نوى الملفات الأولية والثانوية، ويكون هناك ضياع في طاقة الحقل المغناطيسي بسببها، وفي هذه الحالة أيضاً لا يسترجع المولد كامل الطاقة التي يقدمها للمحولة. إن ظاهرتي الاستقطاب الكهربائي في العوازل والمغناطيسي في المواد الحديدية المغنطة متشابهتان من حيث أن

الطاقة تستهلك بسببهما، وينتج عن استهلاك الطاقة في كلتا الحالتين ارتفاع في درجة حرارة العازل في المكثفة، واللب الحديدي في الوشيعة.

من أجل التعبير الرياضي عن هاتين الظاهرتين، نعتبر أن فرق الطور الذي تسببه كل من المكثفة والوشيعة المثالية (مقاومتها الأومية معدومة)، لن يكون مساوياً لـ 90^o تماماً، وذلك بسبب الطاقة الضائعة، وإنما أقل بمقدار صغير δ نعرفه كما يلي:

$$90^o - \delta = \varphi$$

ويمكن ربط هذا المقدار بالاستطاعة على الشكل التالي:

$$\delta = \frac{\overline{P}}{P_r} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \tan\delta$$

ندعو المقدار δ بزاوية الضياع، ومن أجل التواتر $f = 50Hz$ الشائع الاستعمال تبلغ قيمته 0.003 تقريباً.

١٠-٥- دارات التيار المتناوب

Circuits of Alternating Current:

لقد درسنا الحالة العامة في الفقرة السابقة، وأتينا على ذكر دارة المقاومة دون أن نجري حساباً بشأنها. سندرس في هذه الفقرة بعض الأمثلة البسيطة بالتفصيل.

١٠-٥-١- دارة مقاومة *Resistance circuit:*

لتكن دارة المقاومة المبينة في الشكل (10-10,a)، حسب قانون أوم يكون فرق الكمون المتناوب u بين طرفي المقاومة R مساوياً لجداء قيمة هذه المقاومة في شدة التيار i المار فيها، وحين يكون فرق الكمون بين طرفي هذه المقاومة عند أعلى قيمة له فإن التيار أيضاً سيكون عند قيمته العظمى، وحين يصبح فرق الكمون صفراً يصبح التيار صفراً كذلك. ويوضح الشكل (10-10,b) هذا السلوك بيانياً، ونكتب:

$$u(t) = U_m \sin\omega t \quad ; \quad u_R(t) = i(t) \,.\, R$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{U_m}{R}\sin\omega t = I_m \,.\, \sin\omega t$$

إن الطاقة المصروفة في المقاومة خلال زمن dt هي:

$$dw = i(t).\, u(t).\, dt \geq 0$$

والطاقة المصروفة في المقاومة خلال دور هي:

$$dw = \frac{U^2_m}{R}\sin^2 \omega t \, dt$$

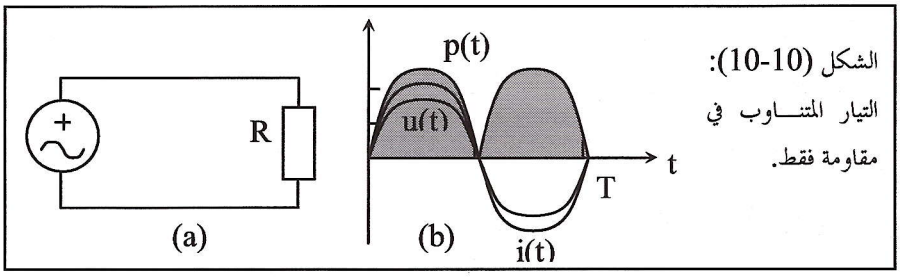
$$\Rightarrow W = \int_0^T dw = \frac{U^2_m}{R}\int_0^T \sin^2 \omega t \, dt = \frac{U^2_m}{R}.T = \frac{U^2_{eff}}{R}.T \quad (10\text{-}29)$$

والاستطاعة المصروفة الآنية هي:

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{U^2_m}{R}\sin^2 \omega t$$

والاستطاعة المصروفة خلال دور كامل هي:

$$p(t) = \frac{W}{T} = \frac{U^2_m}{2R} = \frac{U^2_{eff}}{2R} \qquad (10\text{-}30)$$



الشكل (10-10): التيار المتناوب في مقاومة فقط.

نقول في هذه الحالة إن التيار وفرق الكمون متطاوران لأن φ=0، أي لهما نفس الطور، أي أنهما يتغيران معاً خطوةً بخطوة، ويكون حاصل جداء التيار والجهد موجباً في كل لحظة حيث تختفي السطوح الواقعة تحت محور الزمن، وبالتالي يكون العمل والاستطاعة المقدمان من قبل المولد موجبان دائماً، وتكون طاقة التيار قابلة للتحول إلى أشكال أخرى من الطاقة يمكن الاستفادة منها في تقديمها للأجهزة المستهلكة للطاقة، ويبلغ العمل المنتج في هذه الحالة قيمته العظمى.

١٠-٥-٢ - دارة مكثفة *Capacitor circuit*:

لتكن الدارة المبينة في الشكل (10-11,a) تحوي مكثفة فقط، وعلى اعتبار مقاومة الأسلاك مهملة في هذه الدارة فإن فرق الكمون بين طرفي المكثفة يساوي فرق الكمون المتناوب للمولد وهو:

$$u(t) = U_m \sin \omega t = U_m \sin 2\pi f t$$

ولكن إذا كانت C سعة المكثفة، q شحنتها المتغيرة مع الزمن، ففرق الكمون بين لبوسيها يعطى بالعلاقة:

$$u(t) = \frac{q(t)}{C}$$

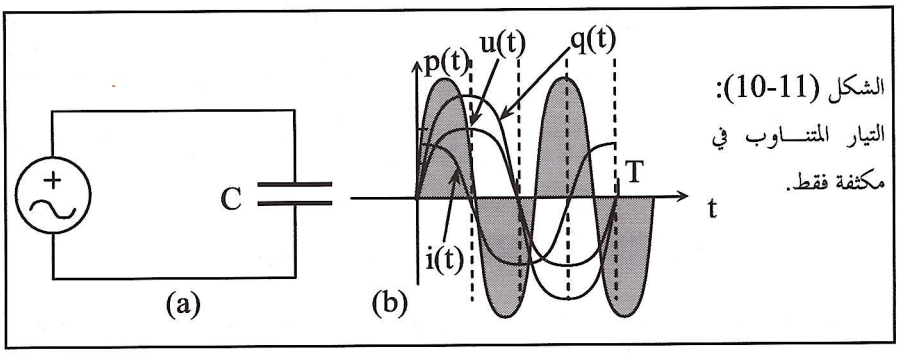
وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد:

$$q(t) = C.u(t) = C.U_m.\sin \omega t \qquad (10\text{-}31)$$

وحيث أن C مقدار ثابت، لذلك فالشحنة على لبوسي المكثفة سوف تتذبذب بنفس الطريقة التي يتذبذب فيها كمون المنبع، ففي النوبة الموجبة يُشحن لبوس المكثفة الموصول إلى طرف المنبع الموجب (فاز، المؤشر بـ +) بشحنة موجبة، و يُشحن لبوس المكثفة الموصول إلى طرف المنبع الأرضي (نتر، الغير مؤشر) بشحنة سالبة، أما في النوبة السالبة فتحصل عملية الشحن بالعكس. إضافة لذلك فإن الشحنة تبلغ قيمتها العظمى في نفس الوقت الذي يبلغ فيه كمون المولد قيمته العظمى وعلى هذا فإن تزايد وتناقص الشحنة بتايعية الزمن يكون متفقاً مع تزايد وتناقص الكمون بتايعية الزمن كما هو واضح من الشكل (10-11,b).

من أجل دراسة تغير التيار مع الزمن يجب أن نأخذ بعين الاعتبار أن التيار في هذه الدارة يساوي معدل تغير شحنة المكثف مع الزمن:

$$i(t) = \frac{\Delta q(t)}{\Delta t}$$



الشكل (10-11): التيار المتناوب في مكثفة فقط.

وباستخدام العلاقة (10-31) نجد:

$$i(t) = C.\frac{\Delta u(t)}{\Delta t} = C.\frac{\Delta(U_m \sin \omega t)}{\Delta t}$$

$$i(t) = \omega.C.U_m \cos \omega t \qquad (10\text{-}32)$$

إن هذه العلاقة تمثل تياراً سعته:

$$I_m = \omega . C . U_m$$

وبالحساب نجد أن ممانعة المكثفة تعطى بالعلاقة التالية:

$$Z_C = \frac{u(t)}{i(t)} = -\frac{1}{\omega C} \qquad (10\text{-}33)$$

تسمى ممانعة المكثفة لمرور التيار بالمعاوقة أيضاً وتقاس بواحدة الأوم. وإذا تـــذكرنا أن $\cos \omega t = \sin(\omega t + \pi/2)$ فإن التيار يصبح:

$$i(t) = \omega.C.U_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \omega.C.U_m \cos(\omega t - (-\frac{\pi}{2}))$$

وهذا يعني أن فرق الطور يساوي $\varphi = -\pi/2$، أي أن التيار يتقدم على فرق الكمـــون بالمقدار $\pi/2$.

أما الطاقة المصروفة خلال زمن dt هي:

$$dw = i(t).u(t).dt$$

بالتعويض عن قيمتي التيار والجهد الآنيتين نجد:

$$dw = (\omega.C.U_m \cos \omega t)(U_m \sin \omega t).dt$$

$$dw = \omega.C.U^2_m \cos \omega t . \sin \omega t .dt$$

$$dw = \frac{1}{2}\omega.C.U^2_m \sin 2\omega t .dt \qquad (10\text{-}34)$$

والاستطاعة الآنية المصروفة:

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{1}{2}\omega.C.U^2_m \sin 2\omega t \qquad (10\text{-}35)$$

وخلال دور كامل نجد الطاقة والاستطاعة:

$$W = \int_0^T dw = \frac{1}{2}\omega.C.U^2_m \int_0^T \sin 2\omega t .dt = 0 \; ; \; \int_0^T \sin 2\omega t .dt = 0$$

$$P = \frac{W}{T} = 0$$

يبين الشكل (10-11,b) بأن التيار المعطى بالعلاقة (10-32) يمثل ميل المنحني البياني الممثل للعلاقة (10-31) التي تعبر عن الشحنة، ومن الملاحظ في هذا الشكل أن التيار لا يساير فرق الكمون، فحين يكون التيار عند قيمته العظمى عند بداية الدور أي عندما $t = 0$ فإن فرق الكمون يصل إلى قيمته العظمى متأخراً بمقدار ربع دور.

أما الطاقة المستهلكة في الدارة فإنها كما يبين الشكل (10-11,b) المرسوم بناءً على العلاقات السابقة وخاصة العلاقة (10-35)، تتغير خلال دور كامل على النحو التالي:

يكون التيار الذي يعطيه المولد في بداية الدور موجباً وبقيمته العظمى، وهو يتناقص ولكنه ينقل الشحنة الموجبة إلى اللبوس الموصول بالمأخذ الموجب، وتصبح شحنة المكثفة عظمى، وبالتالي يزداد كمون المكثفة ويصبح أعظمياً في نهاية الربع الأول من الدور، إذاً ففي الربع الأول يقدم المنبع طاقة للمكثفة، وفي الربع الثاني ينعكس اتجاه التيار ويعمل على تفريغ شحنة المكثفة وبالتالي يتناقص كمونها ثم ينعدم، في حين يبلغ التيار قيمته العظمى وذلك في نهاية الربع الثاني، ففي هذا الربع إذاً، يسحب المنبع الطاقة من المكثفة. أما في الربع الثالث فيتناقص التيار بالقيمة المطلقة ويزداد بالقيمة الجبرية حتى يبلغ الصفر وهو يعمل بالتالي على شحن المكثفة بشحنة سالبة على اللبوس السابق نفسه وبالتالي يزداد كمون المكثفة بالقيمة المطلقة ويتناقص بالقيمة الجبرية حتى يبلغ قيمته الجبرية الصغرى في نهاية الربع الثالث، ويقوم المنبع في هذه الحالة بتقديم الطاقة للمكثفة. أما في الربع الرابع فيستمر التيار بالتزايد بقيمتيه المطلقة والجبرية حتى يبلغ قيمته العظمى من جديد، وهو يعمل على تفريغ الشحنة السالبة من اللبوس السابق، ويتناقص كمون المكثفة حتى ينعدم في نهاية الربع الرابع، والمنبع في هذه الحالة يقوم بسحب الطاقة من جديد من المكثفة. وهكذا تتكرر عملية الشحن والتفريغ في الأدوار التالية.

والخلاصة هي أن المنبع يقوم بتقديم الطاقة في الربعين الأول والثالث، ويعمل على سحبها من الدارة في الربعين الثاني والرابع، أي أن الطاقة تتأرجح خلال الدور

الواحد مرتين بين قيمتيها الجبريتين العظمى والصغرى (أو نقول: بين قيمتيها العظميين الموجبة والسالبة).

من الواضح في هذه الدارة أن المولد يحصل على طاقة بنفس القدر الذي يقدم فيه طاقة، أي أن متوسط الطاقة المسحوبة من المنبع يساوي الصفر وقد تم البرهان على ذلك رياضياً أعلاه، أما قيمة الطاقة التي تختزنها ثم تعيدها المكثفة فهي تعطى بحسب الفقرة (٥-٤) بعد تعديلها بما يتوافق مع التيار المتناوب بإحدى العبارات التالية:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} Q_m U_m \\ E &= \frac{1}{2} C U_m^2 = C U_{eff}^2 \\ E &= \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}36)$$

من المهم هنا معرفة سلوك المكثفة حين يتغير تردد المنبع، فعند الترددات المنخفضة يمر تيار ضئيل جداً في الدارة، وعندما يكون التردد معدوماً وهي حالة التيار المستمر فإن التيار يمر في دارة المكثفة، ثم يضعف حتى ينعدم بعد إتمام عملية الشحن. كما أن التيار المستمر يمر في دارة المكثفة ويقوم بشحنها وتفريغها وشحنها بالاتجاه المعاكس ثم تفريغها خلال دور واحد، ولكنه لا يتوقف عن المرور في الدارة، بل تزداد شدته بازدياد تردده نظراً لانخفاض ممانعة المكثفة.

١٠-٥-٣- دارة وشيعة *Coil circuit:*

يمكن دراسة الدارة التي تحوي وشيعة بنفس الطريقة التي تمت بها دراسة دارة تحوي مكثفة. إن فرق الكمون بين طرفي الوشيعة في الدارة الموضحة في الشكل (10-12,a) يساوي فرق الكمون بين طرفي المنبع وذلك بفرض أن المقاومة الأومية لأسلاك الدارة مهملة، أي أن:

$$u(t) = U_m \sin \omega t = U_m \sin 2\pi f t$$

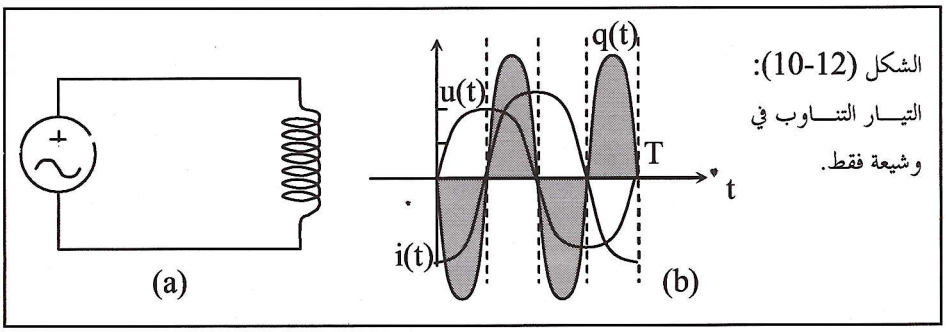
وهو يساوي بإشارة معاكسة فرق الكمون المتحرض في هذه الوشيعة نتيجةً لتغير كل من التيار والتدفق فيها:

$$E_{ind} = -\frac{d\varphi}{dt} = -L\frac{di(t)}{dt}$$

حيث L عامل التحرض الذاتي للوشيعة، وبالتالي نكتب:

$$L\frac{di(t)}{dt} = U_m \sin \omega t \Rightarrow$$

$$d\,i(t) = \frac{1}{L}U_m \sin \omega t\, dt$$



الشكل (10-12): التيار التناوب في وشيعة فقط.

وبالمكاملة نجد:

$$i(t) = \int d\,i(t) = \frac{U_m}{L}\int \sin \omega t\, dt$$

$$i(t) = -\frac{U_m}{\omega L}\cos \omega t = -I_m \cos \omega t \; ; \; I_m = \frac{U_m}{\omega L} \qquad (10\text{-}37)$$

وتكون ممانعة الوشيعة:

$$Z_L = \frac{u(t)}{i(t)} = \omega L \qquad (10\text{-}38)$$

حيث تمثل Z_L ممانعة الوشيعة وهي تقاس بالأوم. وبما أن $\cos \omega t = -\sin(\omega t - \pi/2)$ فبالتعويض في عبارة تيار الوشيعة نجد:

$$i(t) = -\frac{U_m}{\omega L}(-\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})) = \frac{U_m}{\omega L}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

وهذا يعني أن فرق الطور $\varphi = \pi/2$، أي أن التيار يتأخر بالطور عن الكمون بالمقدار $\pi/2$. وبما أن L مقدار ثابت يتعلق بالخصائص الهندسية فقط، فإن فرق كمون المنبع يتناسب طرداً مع معدل تغير التيار، وهو يمثل ميل المنحني البياني للتيار بتابعية الزمن كما في الشكل (10-12,b) الذي يظهر فيه أيضاً منحني تغير الاستطاعة.

أما الطاقة المصروفة خلال زمن dt هي:

$$dw = i(t).u(t).dt$$

بالتعويض عن قيمتي التيار والجهد الآنيتين نجد:

$$dw = (-\frac{U_m}{\omega L}.\cos\omega t)(U_m \sin\omega t).dt$$

$$dw = -\frac{U_m}{\omega L}.\cos\omega t.\sin\omega t.dt$$

$$dw = -\frac{1}{2}.\frac{1}{\omega L}.U^2{}_m \sin 2\omega t.dt \qquad (10\text{-}39)$$

والاستطاعة الآنية المصروفة:

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{\omega L}.U^2{}_m \sin 2\omega t \qquad (10\text{-}40)$$

وخلال دور كامل نجد الطاقة والاستطاعة:

$$W = \int_0^T dw = -\frac{1}{2}.\frac{1}{\omega L}.U^2{}_m \int_0^T \sin 2\omega t.dt = 0 \; ; \; \int_0^T \sin 2\omega t.dt = 0$$

$$P = \frac{W}{T} = 0$$

ولو ناقشنا بالتفصيل حالة الوشيعة كما فعلنا في حالة المكثفة، فإننا نخلص إلى أن الوشيعة لا تستهلك طاقة فيما يتعلق بتوليد الحقل المغناطيسي والتحريض المغناطيسي، ولكنها تستهلك طاقة مهملة في المقاومة الأومية لسلك الناقل المصنوعة منه. يقدم المولد الطاقة الكهربائية للوشيعة التي تختزنها كحقل مغناطيسي في الربعين الثاني والرابع من الدور، إلا أن الوشيعة تعيد هذه الطاقة إلى المولد خلال الربعين الأول والثالث من الدور، وأما قيمة الطاقة المخزنة في الوشيعة فهي تعطى بالعلاقة التالية:

$$E = \frac{1}{2}L.I^2_m = LI^2_{eff} \qquad (10\text{-}41)$$

تعمل الوشيعة في دارات التيار المتناوب على مقاومة التغير في التيار، وتتناسب القوة المحركة الكهربائية الناتجة بالتحريض داخل الوشيعة مع معدل تغير التيار $L\frac{\Delta i}{\Delta t}$، لذلك عندما يتغير التيار ببطء شديد فإن هذا الأثر في وشيعة التحريض لن يكون كبير. ولكن عند الترددات المرتفعة، حين يحاول التيار أن يتغير بسرعة، فإن الأثر المقاوم أو

المعاوق للوشيعة يكون كبير جداً، ويسمى هذا الأثر المعاوق بالمفاعلة التحريضية أو الممانعة التي رمزنا لها بـ Z_L، العلاقة (10-38).

نتيجة:

نلاحظ من دراستنا السابقة لداراتي المكثفة والوشيعة أنهما تتصرفان عكس بعضهما البعض، فأثر المكثفات المعاوق لمرور التيار يكون كبير عند الترددات المنخفضة وصغيراً عند الترددات المرتفعة، والعكس هو الصحيح في حالة الوشائع. وأما في دارة المقاومة فإن قيمة المقاومة مقدار ثابت ومستقل عن تردد التيار.

١٠-٥-٤- دارة مقاومة ومكثفة ووشيعة

The Circuit of Resistance, Capacitor, and Coil:

ندرس في هذه الفقرة دارة تحتوي على العناصر الثلاثة، مكثفة ووشيعة ومقاومة، ومن الممكن أن تكون هذه العناصر موصولة على التسلسل أو على التفرع.

أولاً- العناصر موصولة على التسلسل:

نصل العناصر، مقاومة، وشيعة، ومكثفة على التسلسل في دارة تيار متناوب كما في الشكل (10-13,a)، ثم نطبق في هذه الدارة فرقاً في الكمون جيبياً من الشكل:

$$u(t) = U_m \cos \omega t$$

يكون في هذه الحالة التيار المار في كل من المكثفة والوشيعة غير متطاور مع فرق الكمون بين طرفي كل منهما، ولكنه في المقاومة يكون متطاوراً مع فرق الكمون بين طرفيها، انظر الشكل (10-13,b)، وبفرض أن فرق الطور الإجمالي بين التيار وفرق الكمون هو φ فإننا نكتب التيار عندئذ على الشكل:

$$i(t) = I_m \cos (\omega t + \varphi)$$

حيث أن: $\varphi>0$ يعني أن التيار يتقدم على الكمون بمقدار φ.

$\Phi<0$ يعني أن التيار يتأخر عن الكمون بمقدار φ.

يعطى الكمونان بين طرفي كل من المقاومة والوشيعة كما يلي:

$$v_R(t) = i(t) \cdot R$$

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

ونحسب الكمون بين طرفي المكثفة:

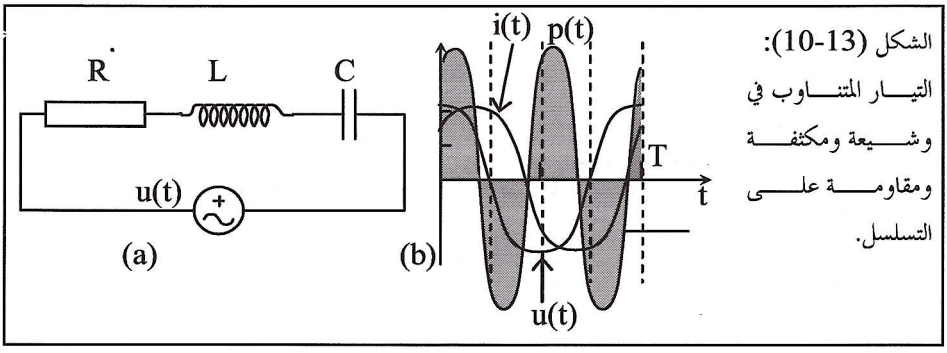
$$q_C(t) = C.u_C(t)$$

$$i(t) = \frac{dq_C(t)}{dt} = C.\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$u_C(t) = \int du_C(t) = \frac{1}{C}.\int i(t)dt$$

وبحسب قانون كيرشوف للكمون يتوزع الكمون الكلي على العناصر السابقة ونكتب:

$$i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}.\int i(t)dt = u(t) \qquad (10\text{-}42)$$



الشكل (10-13): التيار المتناوب في وشيعة ومكثفة ومقاومة على التسلسل.

باشتقاق ومكاملة عبارة التيار والتعويض في المعادلة السابقة نجد:

$$RI_m \cos(\omega t + \varphi) - \omega L I_m \sin(\omega t + \varphi) + \frac{I_m}{\omega C}\sin(\omega t + \varphi) = U_m \cos \omega t \qquad (10\text{-}43)$$

باستخدام الحساب المثلثي وحل المعادلة السابقة نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$I_m[R\cos\varphi - (\omega L - \frac{1}{\omega C})\sin\varphi] = U_m \qquad (10\text{-}44)$$

$$I_m[-R\sin\varphi + (\omega L - \frac{1}{\omega C})\cos\varphi] = 0 \qquad (10\text{-}45)$$

من العلاقة (10-45) نحصل على فرق الطور بين التيار وفرق الكمون:

$$\tan\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \qquad (10\text{-}46)$$

وبتربيع العلاقتين السابقتين وجمعهما طرفاً إلى طرف فإننا نجد الشدة العظمى للتيار:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \qquad (10\text{-}47)$$

والشدة المنتجة تعطى بالعلاقة:

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \qquad (10\text{-}48)$$

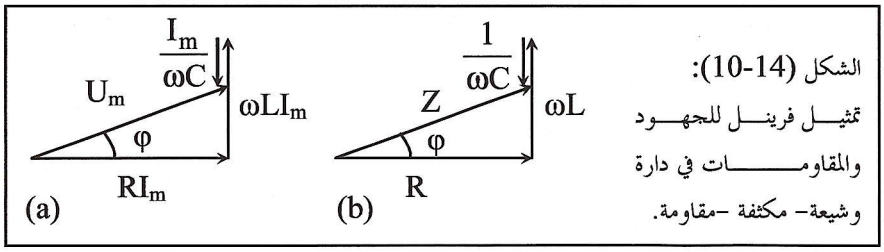
ونستنتج بالتالي أن ممانعة الدارة هي:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \qquad (10\text{-}49)$$

من الممكن استخدام طريقة فرينل، الشكل (10-14)، في إيجاد زاوية فرق الطور والتيار وفرق الكمون على النحو التالي: نذكر من الفقرتين السابقتين أن كمون المكثفة يتأخر عن تيارها وأن كمون الوشيعة يتقدم على تيارها، وبالتعويض يمكن أن نكتب العلاقة (10-43) على الشكل التالي:

$$RI_m \cos(\omega t + \varphi) - \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) = U_m \cos\omega t$$

يمكن تمثيل حدود هذه العلاقة بمتجهات كما في الشكل (10-14)، ففرق الكمون بين طرفي المقاومة يمثل بمتجه طوله RI_m، وفرق الكمون بين طرفي عامل التحريض الذاتي أو الوشيعة يمثل بالمتجه الذي طوله ωLI_m، وهو يتقدم في الطور على شدة التيار بالزاوية $\pi/2$، وأخيراً يمثل فرق الكمون بين طرفي المكثفة بمتجه طوله $I_m/\omega C$ ولكنه يتأخر في الطور عن شدة التيار بالزاوية $\pi/2$، ويكون مجموع هذه المتجهات متجه جديد مبدؤه مبدأ الأول ونهايته نهاية الأخير وهو يمثل المتجه V_m، وتمثل الزاوية φ فرق الطور بين التيار المار في الدارة والكمون المطبق بين طرفيها.



الشكل (10-14): تمثيل فرينل للجهود والمقاومات في دارة وشيعة- مكثفة -مقاومة.

يمكن من الشكل (10-14,a) الذي يمثل مثلث الجهود إيجاد العلاقتين (10-47) ,(10-46)، أما ممانعة الدارة المعطاة بالعلاقة (10-49) فيمكن الحصول

عليها بعد رسم مثلث الممانعات المبين في الشكل (10-14,b) الذي نحصل عليه من المثلث السابق بقسمة طول كل من المتجهات فيه على شدة التيار العظمى I_m.

المناقشة: لنناقش العلاقتين (10-49) , (10-46) اللتين توصلنا إليهما في هذه الفقرة كما يلي:

آ- إذا كان $\omega L > 1/\omega C$ فإنه ينتج أن $\varphi<0$ وأن الممانعة $Z>R$ والتيار يتأخر بهذا الطور عن فرق الكمون وهو واضح من الشكل (10-49).

ب- إذا كان $\omega L < 1/\omega C$ فإنه ينتج أن $\varphi>0$ وأن الممانعة $Z>R$ أيضاً والتيار يتقدم بالطور على فرق الكمون.

ج- إذا كان $\omega L = 1/\omega C$ فإنه ينتج أن $\varphi=0$ وأن الممانعة $Z=R$، أي أن الممانعة تكون في نهاية صغرى في هذه الحالة، والتيار يتفق بالطور مع فرق الكمون المطبق بين طرفي الدارة أو مع القوة المحركة الكهربائية، ونقول أن الدارة في حالة تجاوب أو طنين أو رنين، نسمي هذه الدارة بأنها دارة مهتزة، ويمكن أن نحصل على هذه الحالة بتغيير كل من C, L أو بتغيير تواتر منبع الكمون، أما التيار بحسب العلاقة (10-47) يكون في قيمته العظمى من أجل تردد معين يتحدد بالعلاقة:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (10\text{-}50)$$

وندعو هذه الدارة بالمرشح أيضاً، فهي أنها تعمل على ترشيح التردد المعبر عنه بالعلاقة السابقة.

باستخدام عبارتي التيار والكمون فإن الطاقة المقدمة خلال الزمن dt تعطى بالعلاقة:

$$dw = i(t)dt.u(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi).U_m \cos(\omega t).dt \qquad (10\text{-}51)$$

باستخدام حساب المثلثات نفرق عبارة التيار إلى حدين فتصبح:

$$i(t) = I_m \cos \omega t.\cos \varphi - I_m \sin \omega t.\sin \varphi$$

يمثل الحد الأول $I_m \sin \omega t.\cos \varphi$ جزء التيار المتفق بالطور مع الكمون، أما الحد الثاني $I_m \cos \omega t.\sin \varphi$ فيمثل جزء التيار الذي يتقدم على الكمون بفرق طور مقداره $\pi/2$ وعليه يمكن أن نعبّر عن الطاقة التفاضلية بالتعويض في العلاقة (10-51) على النحو:

$$dw = U_m I_m [\cos^2 \omega t . \cos \varphi - \sin \omega t . \cos \omega t . \sin \varphi . dt]$$

ومن حساب المثلثات باستخدام العلاقتين:

$$\sin \omega t . \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t \quad ; \quad \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(\cos 2\omega t + 1)$$

وبالتعويض في عبارة الطاقة التفاضلية نجد:

$$dw = U_m I_m . [\frac{1}{2}(\cos 2\omega t + 1)\cos \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\omega t . \sin \varphi] . dt \qquad (10\text{-}53)$$

وبمكاملة العلاقة (10-53) نحصل على الطاقة الكلية المنجزة خلال دور كامل T :

$$W_T = \int_0^T dw = U_m I_m \int_0^T \frac{(\cos 2\omega t + 1)}{2} \cos \varphi . dt - U_m I_m \int_0^T \frac{\sin 2\omega t}{2} . \sin \varphi . dt$$

(10-54)

وبنفس طريقة حساب التكاملات لدى حساب القيمة الفعالة في الفقرة (١٠-٣) نجد أن التكامل الأول يساوي T/2 والثاني معدوم لأنه تابع دوري، ويمكن من أجل دور كامل إجراء نفس المناقشة في الفقرة (١٠-٤) والحصول على نفس العلاقات الواردة فيها التي تعبر عن الطاقة المصروفة والاستطاعة المؤثرة والردية والظاهرية وتعريف عامل الاستطاعة زاوية الضياع، وهذه العلاقات هي التالية:

$$W_T = \frac{1}{2} U_m I_m T . \cos \varphi \qquad (10\text{-}55)$$

$$\overline{P} = \frac{W_T}{T} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi \qquad (10\text{-}56)$$

$$\overline{P} = I_{eff} \; U_{eff} \; \cos \varphi \qquad (10\text{-}57)$$

$$P_r = I_{eff} \; U_{eff} \; \sin \varphi \qquad (10\text{-}59)$$

$$S = I_{eff} \; . \; U_{eff} \qquad (10\text{-}58)$$

$$\delta = \frac{\overline{P}}{P_r} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \tan \delta \qquad (10\text{-}59)$$

أما في الشكل (10-13,b)، فنلاحظ من الرسم أن هناك قطاعات يكون فيها للتيار والكمون الإشارة نفسها وتوافق عملاً أو استطاعة موجبة وهي تقع فوق محور الزمن، توافق النوبة التي يدفع فيها المنبع الإلكترونات في الدارة، وتتحول الطاقة الكهربائية إلى عمل أو حرارة في الوسط الخارجي كالآلات والأجهزة والمقاومات، أو

تتحول إلى طاقة كامنة مغناطيسية أو كهربائية في الوشائع والمكثفات. وهناك قطاعات يكون فيها للتيار والكمون إشارتان مختلفتان، وتوافق استطاعة سالبة، وهي تقع تحت محور الزمن وتوافق المرحلة التي يسترجع فيها المنبع الطاقة الكامنة المغناطيسية والكهربائية فقط من الوشائع والمكثفات، ولا يسترجع الطاقة الحرارية لأنها تضيع في المقاومات والوسط الخارجي.

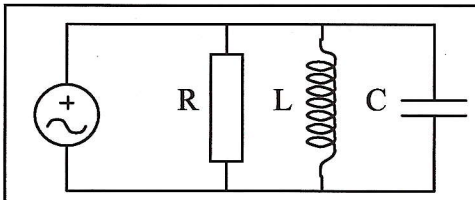
ثانياً– الدارة موصولة على التفرع:

نصل العناصر، مقاومة، وشيعة، ومكثفة على التفرع في دارة تيار متناوب كما في الشكل (15-10)، ثم نطبق في هذه الدارة فرقاً في الكمون يعطي تياراً جيبياً من الشكل:

$$i = I_m \cos \omega t$$

لا يكون التيار المار في كل من المكثفة والوشيعة متطاوراً مع فرق الكمون على طرفي كل منهما ولكن التيار في المقاومة يكون بنفس الطور مع فرق الكمون بين طرفيها، وبفرض أن فرق الطور الكلي بين التيار وفرق الكمون هو φ، فإننا نكتب الكمون الذي يكون نفسه على طرفي كل عنصر عندئذ على الشكل:

$$u(t) = U_m \cos (\omega t + \varphi)$$



الشكل (15-10): دارة وشيعة– مكثفة– مقاومة على التفرع.

إن التيار المار في المقاومة هو $u(t) / R$، وفرق الكمون المحرض بين طرفي الوشيعة هو $L \frac{di(t)}{dt}$، الذي نستنتج منه أن التيار المار في الوشيعة يساوي $\frac{1}{L}\int u(t)dt$، وأما التيار المار في المكثفة كما وجدنا في الفقرة السابقة هو $C.\frac{du(t)}{dt}$. إن التيار $i(t)$ الذي يعطيه المنبع يتوزع في الفروع الثلاثة بحسب قانون كيرشوف للتيارات وبالتالي التيار الكلي يساوي مجموع التيارات المتفرعة في هذه العناصر ونكتب:

$$\frac{u(t)}{R}+\frac{1}{L}.\int u(t)dt+C.\frac{du(t)}{dt}=i(t) \qquad (10\text{-}60)$$

باشتقاق ومكاملة عبارة الكمون والتعويض في المعادلة السابقة نجد:

$$\frac{U_m}{R}\cos(\omega t+\varphi)-\omega CU_m\sin(\omega t+\varphi)+\frac{U_m}{\omega L}\sin(\omega t+\varphi)=I_m\cos\omega t$$

باستخدام الحساب المثلثي وحل المعادلة السابقة نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$U_m[\frac{\cos\varphi}{R}+(\frac{1}{\omega L}-\omega C)\sin\varphi]=I_m$$

$$U_m[-\frac{\sin\varphi}{R}+(\frac{1}{\omega L}-\omega C)\cos\varphi]=0$$

من العلاقة الثانية نحصل على فرق الطور بين التيار وفرق الكمون:

$$\tan\varphi=R(\frac{1}{\omega L}-\omega C) \qquad (10\text{-}61)$$

وبتربيع العلاقتين السابقتين وجمعهما طرفاً إلى طرف فإننا نجد أن ممانعة الدارة تعطى بالعلاقة:

$$Z=[\frac{1}{R^2}+(\frac{1}{\omega L}-\omega C)^2]^{-1/2} \qquad (10\text{-}62)$$

المناقشة: يمكن مناقشة العلاقتين السابقتين كما نوقشت مثيلتيهما في الدارة التسلسلية، ولكن الحالة الأهم هي عندما تكون المقاومة لانهائية $R\to\infty$ فتكون هذه الدارة محتوية على مكثفة ووشيعة فقط والتيار يكون متأخر بالطور عن فرق الكمون إذا كان $\omega C>1/\omega L$ أو أنه متقدم بالطور إذا كان $\omega C<1/\omega L$ وممانعتها عندئذ تعطى بالعلاقة:

$$Z=\frac{1}{1/\omega C}-\omega C$$

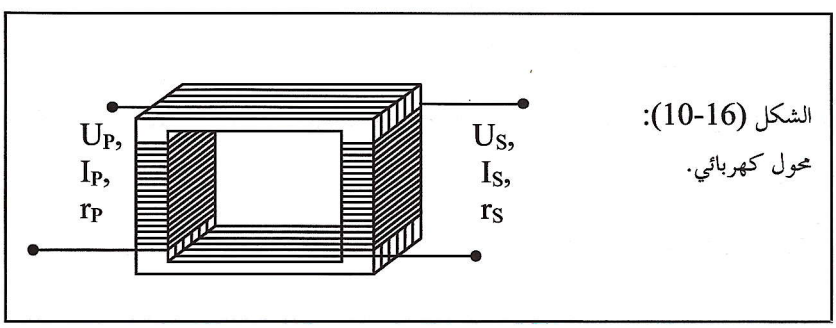
أما إذا كان $1/\omega C=\omega C$ فإن الممانعة تؤول نظرياً إلى اللانهاية وندعو هذه الدارة عندئذ بالدارة المهتزة الخانقة للتيار، أي أن منبع التيار الجيبي لا يصرف أية طاقة، والطاقة تنتقل بالتناوب من المكثفة إلى الوشيعة وبالعكس، ويكون الاهتزاز غير متخامد نظرياً، ولكنه يتخامد ولو ببطء شديد بسبب أن للوشيعة مقاومة أومية صغيرة، وأن مثل هذه الدارة تفقد جزءاً من طاقتها على شكل إشعاع أمواج كهرطيسية. أما تواتر

الاهتزاز فيعطى بالعلاقة (50-10). وأما بدراسة الطاقة والاستطاعة المصروفتين فيمكن الحصول على العلاقات (59-10) -(55-10) أيضاً.

١٠-٦- المحول الكهربائي *Electric transformator:*

المحول الكهربائي عبارة عن جهاز كهربائي يعمل على تحويل كمون أو تيار الطاقة المتناوبة رفعاً أو خفضاً، وهو يعتبر من أهم تطبيقات الدارات الكهربائية المترابطة التي تعمل على مبدأ التحريض المتبادل بين دارتين كهربائيتين.

يتألف المحول من وشيعتين مصنوعتين من سلك ناقل مغلف بعازل، وملفوفتين على لب من الحديد كما في الشكل (16-10)، نسمي الوشيعة التي توصل بمنبع التيار بالوشيعة الأولية، ونسمي الأخرى التي يمكن أن توصل إلى حمولة ما (أي جهاز كهربائي مترلي)، بالوشيعة الثانوية. إذا طبقنا من منبع متناوب ما، فرقاً في الكمون على الوشيعة الأولية U_p فإنه يسبب مرور تياراً I_p فيها، وبالتالي يؤدي إلى نشوء حقل مغناطيسي تتدفق خطوطه عبر اللب الحديدي بكاملها تقريباً، وتمر بالتالي من خلال الوشيعة الثانوية، إن هذا التدفق يتغير باستمرار لأن U_p يتغير بشكل جيبي، ويحرض تياراً I_s يمر في الوشيعة الثانوية مما يؤدي إلى نشوء فرق في الكمون تحريضي أو قوة محركة تحريضية U_s على طرفي الوشيعة الثانوية. وعادة ما يكون عدد لفات أحد الوشيعتين مختلفاً عن الآخر، والوشيعة التي يكون عدد لفاتها أقل تصنع من سلك ذي مقطع أكبر والعكس بالعكس. وهكذا نجد أن اللب الحديدي يشكل دارة مغناطيسية مغلقة في حين تشكل الوشيعتان دارتين كهربائيتين مترابطتين.



الشكل (16-10):
محول كهربائي.

إذا كان عاملي التحريض الذاتي للوشيعة الأولية L_1 وللوشيعة الثانوية L_2 في محول ما، وكان عامل التحريض المتبادل بينهما M، فإننا نعرف عامل الترابط coupling coefficient بين دارتي هاتين الوشيعتين بالعلاقة التالية:

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad (10\text{-}63)$$

إن قيم K تتراوح بين الصفر والواحد: $0<K<1$ ، وإذا كان $K=1$ فإننا نكتب:

$$M = \pm\sqrt{L_1 L_2}$$

وقيم M يمكن أن تكون موجبة أو سالبة بحسب اتجاه اللفات في كل من الوشيعتين.

تكون المقاومة الكهربائية لأسلاك معظم المحولات مهملة مما يسمح لنا بالإبقاء عليها موصولة بمنبع الطاقة في حالة عدم التشغيل، فالمحولات في هذه الحالة لا تستهلك سوى كمية قليلة من الطاقة يمكن أن تؤدي إلى ارتفاع بسيط في درجة حرارتها، وهذا ناتج بالطبع عن المقاومة الصغيرة لأسلاك الوشيعة الأولية.

ولهذا فإن التيار في الوشيعة الأولية يعاني فقط من الممانعة التحريضية لهذه الوشيعة، في حين يمر التيار في الوشيعة الثانوية في مقاومة الحمولة إضافةً للممانعة التحريضية للوشيعة ذاتها. وحسب قانون فارادي يرتبط فرق الكمون في الوشيعة الأولية بكلٍ من عدد لفاتها N_p ومعدل تغير تدفقها $\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ وفق العلاقة التالية:

$$U_p = N_p \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \qquad (10\text{-}64)$$

وبما أن اللب الحديدي يشكل ممراً لخطوط الحقل المغناطيسي، لذلك فالتدفق يعبر من خلال الوشيعة الثانوية بكامله، وعليه يكون فرق الكمون الناتج بالتحريض في الوشيعة الثانوية هو:

$$U_s = N_s \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \qquad (10\text{-}65)$$

تمثل N_s عدد لفات الوشيعة الثانوية. وبقسمة العلاقة (10-65) على العلاقة (10-64) ينتج:

$$\frac{U_s}{U_p} = \frac{N_s}{N_p} = n \qquad (10\text{-}66)$$

حيث أن قيمتي فرقي الكمون في هذه العلاقة منتجتين، ونسمي هذه العلاقة بمعادلة المحولة، وهي تبين ببساطة مبدأ رفع فرق الكمون إذا كان n>1، أو خفضه إذا كان n<1 باستخدام محولة، وندعو n بنسبة التحويل. ومن الواضح أن المحول يكون رافع للكمون عندما يكون عدد لفات الوشيعة الثانوية أكبر من عدد لفات الوشيعة الأولية والعكس بالعكس.

ويمكن الإثبات على أن علاقة تحويل فرق الكمون تكتب على النحو التالي:

$$\frac{I_s}{I_p} \approx \frac{N_p}{N_s} = \frac{1}{n} \qquad (10\text{-}67)$$

وهذه العلاقة تقريبية وصحيحة إذا كانت ممانعة الحمولة تحقق $|Z_L| << \omega L_2$.

عندما تكون دارة الملف الثانوي غير مغلقة على حمولة ما، فإنه لا يمر فيها تيار وبالتالي لا يكون فيها ضياع في الطاقة. وهذا يعني أن الحقل المغناطيسي في الوشيعة الثانوية لا يقوم بأي عمل. ولكن عندما يحصل سحب تيار من الوشيعة الثانوية وذلك بتشغيل أداة ما تقوم باستهلاك طاقة تنقل إليها بالتحريض من الوشيعة الأولية التي تُقدم إليها طاقة من المنبع، أي أن استهلاك الأداة للطاقة من الوشيعة الثانوية يعني استهلاك الوشيعة الأولية للطاقة من المنبع، وهذا يعني أنه يكون للوشيعة مقاومة في حالة التشغيل.

إذا كانت P_p استطاعة الوشيعة الأولية وكانت P_s الاستطاعة التي يمكن الحصول عليها من الوشيعة الثانوية، فإننا نعرف مردود المحول بالشكل التالي:

$$\eta = \frac{P_s}{P_p}$$

إن الفرق $P_s - P_p$ يمثل الاستطاعة الضائعة في المحول بأشكال مختلفة تتحول جميعها إلى حرارة، مثل تلك الضائعة في النواة الحديدية بسبب دورة البطاء المغناطيسي، أو بسبب التيارات التحريضية (تيارات فوكو) التي يقلّل من تأثيرها باستخدام صفائح معدنية رقيقة في صناعة النوى الحديدية، إذ توضع بحيث توازي حقل التحريض

المغناطيسي، أو الضائعة بفعل جول في سلكي الوشيعتين، وتعطى هذه الأخيرة بالعلاقة التالية:

$$P' = r_p I_p^2 + r_s I_s^2$$

حيث تمثل r_p, r_s مقاومتي سلكي الوشيعتين.

يستعمل المحول في أغراض متعددة، فالكمون الذي تحتاجه معظم الأجهزة الإلكترونية يكون أعلى أو أخفض من كمون تيار المدينة فالراديو يحتاج مثلاً لـ 5V وبالتالي يحتاج لمحولة خفض والتلفزيون يحتاج لفرق كمون عالي جداً (~12000V) لذلك يحتاج لمحولة رفع.

ومن الاستخدامات الهامة للمحولات، رفع الكمون عند نقل الطاقة الكهربائية لمسافات طويلة حيث أن الضياع في الطاقة يكون أقل من أجل الكمون عالي التوتر، ومن ثم تستخدم محولات خفض للكمون حتى القيمة المناسبة للاستخدام المباشر في المنازل والمعامل.

مسألة محلولة:

لتكن الدارة التي في الشكل (13-10)، وليكن فيها:

$R=160\Omega$; $C=15\mu F$; $L=230mH$; $f=60Hz$; $U_m=36V$

والمطلوب: إيجاد ممانعة المكثفة مستقلةً، وممانعة الوشيعة مستقلةً أيضاً، ثم ممانعة الدارة بكامل عناصرها والتيار الأعظمي والمنتج المار فيها وزاوية الطور.

الحل:

إن ممانعة المكثفة مستقلةً تحسب بالعلاقة التالية:

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f.C} = \frac{1}{(2\pi)(60\ Hz)(15\times10^{-6}\ F)} = 177\ \Omega$$

وممانعة الوشيعة مستقلةً تحسب بالعلاقة التالية:

$$Z_L = \omega L = 2\pi f.L = (2\pi)(60\ Hz)(230\times10^{-3}\ H) = 87\ \Omega$$

نلاحظ أن $Z_C > Z_L$ وهذا يعني أن سعوية الدارة capacitive أكبر من حثيتها inductive.

أما ممانعة الدارة بكامل عناصرها فتحسب بالعلاقة التالية:

$$Z=\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}=\sqrt{(160\Omega)^2+(87\Omega-177\Omega)^2}=184\Omega$$

أما التيار الأعظمي والمنتج المار في الدارة فيحسبان كما يلي:

$$I_m=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}}=\frac{U_m}{Z}=\frac{36V}{184\Omega}=200mA$$

$$I_{eff}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=\frac{200mA}{\sqrt{2}}=141.4mA$$

وأخيراً تحسب زاوية الطور كما يلي:

$$\tan\varphi=\frac{\omega L-1/\omega C}{R}=\frac{Z_L-Z_C}{R}=\frac{78\Omega-177\Omega}{160\Omega}=-0.563$$

$$\Rightarrow \varphi=\tan^{-1}(-0.563)=-29.4^\circ$$

أسئلة ومسائل غير محلولة

الأسئلة:

١. تقاس السرعة الزاوية في العلاقة $\omega=2\pi f$ بواحدة rad/sec والتواتر بواحدة Hz أو cycles/sec، أما الـــ rad فتقاس به الزاوية. ما هي الصلة التي تتعلق بها الزاوية بالتيار المتناوب.

٢. هل يمكن تطبيق قوانين التيار المستمر على التيار المتناوب؟ فسر ذلك.

٣. هل تقدم المكثفة التيار بالطور على الكمون؟

٤. هل تقدم الوشيعة التيار بالطور على الكمون؟

٥. ما هي الاستطاعات المؤثرة والردية والظاهرية؟

٦. ما هو عامل الاستطاعة؟

٧. ما هو مردود المحولة؟

٨. ما هو عامل الترابط في محولة؟

المسائل:

مسألة (1):

لتكن دارة مكثفة موصولة إلى طرفي منبع كمون متناوب، فإذا كانت سعة المكثفة $C = 0.4\mu F$، والكمون $U = 100 \sin 2\pi f t$ وتواتره $f = 20$ Hz فالمطلوب:

آ. أوجد ممانعة المكثفة لمرور التيار.

ب. أوجد التيار الفعال الذي يعبر هذه المكثفة.

مسألة (2):

لتكن دارة وشيعة موصولة إلى منبع كمون متناوب، ولتكن قيمة التحريض الذاتي للوشيعة $L=15$ mH، وفرق كمون المنبع هو $U_{eff} = 40V$ وتردده 60 Hz والمطلوب: أوجد قيمة كلٍ من I_{eff} , Z_L.

مسألة (3):

لتكن الدارة المكونة من مقاوة ومكثفة ووشيعة R , C , L، الموصولة على التسلسل مع منبع كمون متناوب، فإذا كان U_{eff} =50V، والتردد f =600 Hz، ولتكن R =20Ω، C =10 μF، H×L =4 ،10^{-3}، المطلوب:

آ. أوجد قيمة I_{eff}

ب. أوجد U_{eff} بين طرفي كلٍ من L , C , R.

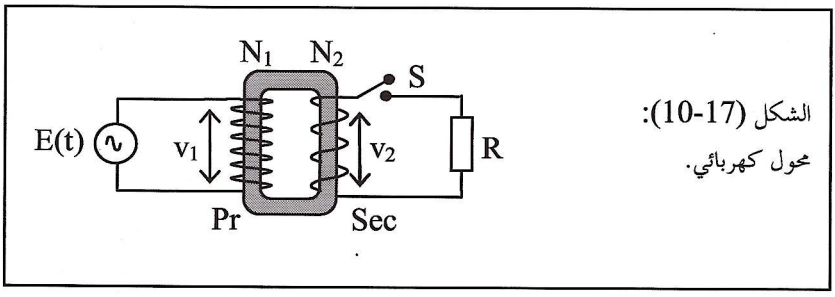
مسألة (4):

يطبق على طرفي أولية محولة جهداً منتجاً $V_{1,rms}$=8kV، ونحصل للاستعمال المترلي على جهد بين طرفي الثانوية $V_{2,rms}$=120V، انظر الشكل (17-10)، المطلوب:

(a) ما هي نسبة التحويل؟

(b) إذا كان معدل استهلاك الطاقة الكهربائية 70kW، فما هي شدة التيار المنتجة في دارتي الأولية والثانوية؟

(c) ما هو الحمل الأومي في ثانوية المحولة؟



الشكل (17-10):
محول كهربائي.

الجداول

الجدول ١ – ثابت العازلية النسبية للمواد الصلبة

المادة	ε_r
الخشب	1-7
الورق الجاف	1.5-2.5
البارافين	2.0
الكبريت	2- 4
المطاط القاسي	2.5-3.5
الشبلاك	2.5-3.5
الكولوفونيوم	2.6
الأحجار النارية	2.8 ; (3.5-4)
الورق القاسي	3.5-6.0
الزجاج الكوازتزي	3.7
الفينول	4-5
النلمير	4-8
البيلسان	4.5-5.5
البيرتيناكس	4.8
الستيتيت	5.0
البورسلان القاسي	5-6.5
الزجاج	2-16
الملح الصخري	5.6
السيليلوز	6.6
المرمر	8.6
البازلت	9.0
الماس	16.5

الجدول٢ – ثابت العازلية النسبية للمواد السائلة والغازية

المادة	ε_r
الكحول الإيتيل	26
الغليسرين	56
البترول	2.0
البترين	2.28
زيت التربنتين	2.3
التولوين	2.3
زيت الديزنوس	4.6
الأسيتون	21.5
نترات البترين	36.0
الهواء	1.000594
أكسيد الفحم	1.00099
الهيدروجين	1.00022
الهيليوم	1.00007
النتروجين (الازوت)	1.00061
الأكسجين	1.00055
بخار الماء	1.00716
بخار الزئبق	1.0074

الجدول٣- المقاومة النوعية لبعض المعادن

المادة	$\rho(10^6)/\Omega m$
الألمنيوم	0.032
الأنتموان	0.45
الرصاص	0.21
الحديد	0.09-0.15
الذهب	0.023
النحاس	0.017
النيكل	0.08-0.11
الأسميوم	0.10
البلاتين النقي	0.108
الزئبق	0.958
الفضة	0.016
الفولاذ	0.15-0.50
التانتال	0.15
فيسموت	1.2
التوتياء	0.061
الفحم	50-100
الغرافيت	11

الجدول ٤ – المقاومة النوعية لبعض الخلائط

المادة	$\rho(10^6)/\Omega m$
الشبه	0.07-0.09
الفضة الجديدة (60% Cu , 19%Ag, 21% Ni)	0.15-0.40
النيكيلين (58% Cu , 41% Ni , 1% Mn)	0.42
الكونستنتان (35-55 % Ni) (65-45 % Cu) (0-20 % Zn)	0.49-0.50
المنغنين (70 % Cu , 30 % Mn)	0.42

الجدول ٥ – تصنيف المواد بحسب مقاومتها النوعية

الصنف	المقاومتة النوعية $\rho(\Omega m)$
ناقل conductor	10^{-8} - 10^{-4}
نصف ناقل semiconductor	10^{-4} - 10^{+6}
عازل inulator	10^{+6} - 10^{+16}

الجدول٦– تصنيف بعض المواد بحسب نوع المغنطة، وثابت السماحية المغناطيسية النسبية لهذه المواد.

المادة	نوع المغنطة	السماحية المغناطيسية النسبية μ_r
بيرمالوي permalloy (خليطة من النيكل والحديد)	حديدية المغنطة	حتى 50000
الماس diamond	طردية	حتى 15000
حديد لين forging steel		حتى 5000
حديد صلب cast iron		حتى 6000
نيكل Nickel		حتى 3000
فولاذ steel		حتى 2000
بلاتين Platinum	قابلة للمغنطة طردية	حتى 1.00026
ألمينيوم Alaminum		حتى 1.000021
بلاستيك قوي hard gum		حتى 1.00014
الهواء air		حتى 1.000004
نحاس copper	عكسية المغنطة	حتى 0.9999964
زجاج glass		حتى 0.999987
بزموت Bismuth		حتى 0.999843

الجدول٧– خصائص بعض العوازل*		
المادة	ثابت العزل النسبي	شدة العزل** kV/mm
الخلاء	1	∞
الهواء	1.00054	0.8
الماء	78	-
الورق	3.5	14
رقاقات ياقوتية	5.4	160
بوسلان	6.5	4
الكوارتز السائل	3.8	8
زجاج البيركس	4.5	13
بيكاليت	4.8	12
بوليتيلين	2.3	50
كهرمان	2.7	90
بوليسترين	2.6	25
تيفلون	2.1	60
مطاط صناعي	6.9	12
زيت محولات	4.5	12
ثاني أكسيد التيتانيوم	100	6

* أخذت هذه الخصائص في درجة حرارة الغرفة، والحقل الكهربائي في العازل، في هذه الشروط، لا يتغير مع الزمن.

** تمثل هذه القيم شدة الحقل الأعظمي الذي يمكن تطبيقه على العازل دون أن ينهار.

الجدول٨–بعض الثوابت الفيزيائية

الثابت	قيمته في جملة القياس الدولية (SI)
عدد أفوغادرو	$N_A=6.022\times10^{23}mol^{-1}$ $=6.022\times10^{26}kmol^{-1}$
ثابتة الجاذبية الكتلية	$G=6.672\times10^{-11}Nm^2/kg^2$
شحنة الإلكترون	$e=1.602\times10^{-19}\ C$
كتلة الإلكترون	$m_e=9.1095\times10^{-31}\ kg$
كتلة البروتون	$m_p=1.673\times10^{-27}\ kg$
كتلة النويترون	$m_n=1.675\times10^{-27}\ kg$
تسارع الجاذبية الأرضية على سطح الأرض	$g=9.81\ m/s^2$
نصف قطر الأرض الوسطي	$R_H=6370\ km$
كتلة الأرض	$M_H=5.98\times10^{24}\ kg$
كثافة الهواء	$1.29\ kg/m^3$
كثافة الماء	$1000\ kg/m^3$
نسبة شحنة الإلكترون إلى الكتلة	$\frac{e}{m_e}=1.759\times10^{11}\ Coul.kg^{-1}$
نسبة شحنة البروتون إلى كتلته	$\frac{e}{m_p}=9.5798\times10^{7}\ Coul.kg^{-1}$
ثابتة فارادي	$F=9.65\times10^{4}\ A.S.mol^{-1}$
سرعة الضوء في الخلاء	$C=299792\ km/sec$
السماحية الكهربائية للخلاء	$\varepsilon_0=8.86\times10^{-12}\ F.m^{-1}\ (\frac{C^2}{Nm_2})$
النفوذية المغناطيسية للخلاء	$\mu_0=1.256\times10^{-6}V.s.A^{-1}.m^{-1}(\frac{N}{A^2}=\frac{H}{m})$
ثابت بلانك	$h=6.62\times10^{-34}\ J.s$ $\hbar=1.06\times10^{-34}\ J.s$
واحدة الكتل الذرية	$u=1.66057\times10^{-27}kg$

الجدول٩- رموز الأحرف اللاتينية					
لفظ الرمز	الرمز		لفظ الرمز	الرمز	
	صغير	كبير		صغير	كبير
Alpha	α	A	Nu	ν	N
Beta	β	B	Xi	ξ	Ξ
Gama	γ	Γ	Omicron	ο	O
Delta	δ	Δ	Pi	π	Π
Epsilon	ε	E	Rho	ρ	P
Zeta	ζ	Z	Sigma	σ	∑
Eta	η	H	Tau	σ	T
Theta	θ	Θ	Upsilan	υ	Y
Iota	ι	I	Phi	φϕ	Φ
Kappa	κ	K	Chi	χ	X
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
Mu	μ	M	Omega	ω	Ω

المراجع العربية

١. الفيزياء العامة ٢. د. أحمد بطيخ، د. مفيد عباس. منشورات جامعة تشـــرين 2004 -2003.

٢. الفيزياء العامة ١. د. عاطف الجندي. منشورات جامعة تشرين 1991 -1990.

٣. الفيزياء العامة ٢. د. سليمان الخضر. منشورات جامعـــة تشـــرين -1982 1981.

٤. الفيزياء الكلاسيكية والحديثة. د. عصام جانو. منشورات جامعـــة تشـــرين 1976 -1975.

٥. أسس الهندسة الكهربائية.د. تيسير عبد الرحمن. منشورات جامعـــة حلـــب 1988 -1989.

٦. الفيزياء العامة ٢. د. محيي الدين نظام، د. علي درويشو. منشورات جامعة تشرين 1994 -1995.

٧. أساسيات الهندسة الكهربائية. جيمي ج. كاثي، سيد أ. نصار. سلسلة شوم، منشورات الدار الدولية للنشر والتوزيع- القاهرة 1994.

٨. الدوائر الكهربائية. جوزيف أ. أدمنستر. سلســـلة شـــوم، منشـــورات دار ماكروهيل 1977.

٩. تجارب في الفيزياء العامة ١،٢. د. أحمد بطيخ، د. غياث ياسين، د. سلمان محمود، د. ابراهيم علي، د. زياد رستم، مشرفة الأعمـــال غـــادة جبـــور. منشورات جامعة تشرين 2997 -2998.

١٠. الإلكترونيات١. أ.د. حسن اسماعيل، أ.د. ضيف الله نصـــور. منشـــورات جامعة تشرين 1996 -1997.

References

1. A Laboratory Manual of Physics SI Units. F. Tyler. 1975, Forth Edition.by Edward Arnold (Publishers) Limited.
2. PHYSICS. Parts 1 and 2. 1996, David Halliday and Robert Resnick. Third edition by Williams, Brownstein and Gray.
3. PHYSICS. R. A. Serway. 1996, Saunders Collage Publishing.
4. Fundamentals of Physics. David Halliday, Robert Resnick. Third Editin. John Wiley & Sons. New York. 1988.
5. Elektrizitatslehe P. Taubert unter Mitarbeit von Dr.Gotz –1979.
6. Kleine Enzyk lopadie Physic –1988.
7. Elementars Physic , N.I. Kschkin und M.G.Schirkewitsch –1987.
8. Курс Физки. Н. Н. Евграфова, В. Л. Каган. Москва, Высшая школа. 1984.
9. Фейнмановские Лекции по Физике , Электричество и Магнетизм. Издательство "Мир" Москва, 1977.
10. Задачник по Физике. А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. . Москва, Высшая школа. 1988.

المصطلحات العلمية

انكليزي – عربي

-A-

Absolute	مطلق
Absorption	امتصاص
Acceleration	تسارع
Accelerometer	مقياس تسارع
Accumulator	مدخرة
Edison ~	مدخرة أديسون
Lead ~	مدخرة رصاصية
Steel ~	مدخرة فولاذية
Angular	زاوي
Angular momentum	العزم الزاوي (عزم الدفع)
Anions	شوارد سالبة (أيونات)
Anode	مصعد
Atmosphere	غلاف غازي
Astigmatism	اللانقطية
Atom	ذرة
Atomic mass	الكتلة الذرية
Atomic number	العدد الذري
Theory Atomic	النظرية الذرية
Avogadro's number	عدد أفوكادرو

-B-

Ball -lightning	البرق الكروي

Barlow- wheel	دولاب بارلو
Binding energy	طاقة الارتباط
Bio- savarat law	قانون بيوسافار
Black radiation body	إشعاع الجسم الأسود
Bond	رابطة
Boundary condition	شروط حدية

-C-

Carbon	فحم
Capacity	سعة
~ Current	سعة التيار
~ nergyE	سعة الطاقة
Caloric	حراري
Calorie	حريرة
Capacitor	مكثفة
Carrier	حامل
Charge ~	حامل الشحنة
Cathode	مهبط
Cations	كاتيونات، شوارد
Cell	خلية
Daniel ~	خلية (بيل) دانيال
Fuel ~	خلية تعمل بالوقود
Galvannic ~	خلية غلفانية
Leaclanche ~	خلية (بيل) لاكلانشيه
Primary ~	خلية أولية
Secondary ~	خلية ثانوية

Volta ~	خلية فولتا
Weston ~	خلية ويستون
Coherence	ترابط
Chemistry	كيمياء
Electro ~	الكيمياء الكهربائية
Chemical compound	مركب كيميائي
Chemical bonding	ارتباط كيميائي
Combination	اتحاد-تركيب
Classical Physics	الفيزياء الكلاسيكية
Coefficient	معامل
Collision	تصادم
Component	مركبة
Component nucleus	النواة المركبة
Compression	انضغاط
Condensation	تكاثف
Conduction	ناقلية
Conductor	ناقل
Conservation	انحفاظ
Contraction	تقلص
Critical	حرج
Cooling	تبريد

-C-

Damped	متخامد
Deflection	انحراف
Deformation	تشوه

Degree	درجة
Density	كثافة
Determinism	حتمية
Diamagnetic	عكسي(مغاير) المغنطة
Diaphragm	حاجز مسامي
Diagram	مخطط
Diatomic	ثنائي الذرة
Diffraction	انعراج
Diffusion	انتشار (تسرب)
Dimension	بُعد
Discharge	انفراغ الشحنات
An self ~	الانفراغ اللاذاتي
Gas ~	انفراغ الغازات
Self ~	الانفراغ الذاتي
Dissociation	تفكك
Distribution	توزع
Distributive	توزيعي(قابل للتوزع)
Displacement	انزياح
Dual nature	طبيعة مزدوجة
Dyne	دينة (واحدة لقياس القوة)

-E-

Effect	تأثير (مفعول)
Efficiency	مردود
Elasticity	مرونة
Elastic collision	تصادم مرن

Electric	كهربائي
Electric field	حقل كهربائي
Electromagnetic	كهرطيسي (كهربائي مغناطيسي)
Electrostatic	كهراكدي (كهربائي ساكن)
Electrolysis	التحليل بالكهرباء
Electrolyte	منحل كهربائي
Real ~	منحلات حقيقية
Potential ~	منحلات كمونية
Element	عنصر
Elemental particle	جسيم عنصري
Energy	طاقة
Equation	معادلة
Equilibrium	توازن
Equivalence	تكافؤ

-F-

Factor	عامل
Multiplication ~	عامل التضاعف
Ferromagnetic	حديدي المغنطة
Field	حقل
Fission	انشطار
Flux	تدفق
Force	قوة
Frequency	تواتر (تردد)
Ionization's ~	تواتر التأين
Fuel	وقود

Fossil ~	وقود متحجر
Fundamental particle	جسيم أولي(أساسي)
Fusion	اندماج، انصهار

-G-

Gamma-rays	أشعة غاما
Gradint	تدرج
Gravitation	ثقالة- جاذبية
Gravitational field	حقل الجاذبية (حقل الثقالة)
Gravitational potential energy	طاقة الجهد التجاذبي

-H-

Heat	حرارة
~ Equilibrium	توازن حراري
~ Radiation	إشعاع حراري
~ Transfer coefficient	عامل النقل الحراري

-I-

Induction	تحريض
Magnetic ~	تحريض مغناطيسي
Self ~	تحريض ذاتي
Inductivity	تحريضية
Mutual ~	تحريضية متبادلة
Interplanetary	ما بين الكواكب
Interstellar	ما بين النجوم
Internal energy	طاقة داخلية
Internal pressure	ضغط داخلي
Interaction	تأثير متبادل

Interference	تداخل
Ion	أيون (شاردة)
~ Conductivity	الناقلية الأيونية
Ionization	التأين
Temperature ~	التأين الحراري
Photo ~	التأين الضوئي
~ Coefficient	معامل التأين
~ Rate	نسبة التأين
~ Py rays	التأين بالإشعاع
~ Py collision	التأين بالصدم
Isotope	نظير
Isolator	عازل

-L-

Lamp	مصباح
Gas discharge ~	مصباح انفراغ غازي
Lattice	شبيكة
Law	قانون
Faraday's ~	قانون فارادي
Length	طول
Light	ضوء
Lightning	برق
Linear expansion	تمدد خطي
Linear momentum	كمية الحركة
Liquid	سائل

-M-

Magnet	مغناطيس
Article ~	مغناطيس صناعي
Electro ~	مغناطيس كهربائي
Natural ~	مغناطيس طبيعي
permanent ~	مغناطيس دائم
Magnetic field	حقل مغناطيسي
Mass	كتلة
Melting point	نقطة الذوبان
Meson	ميزون
Metal	معدن
Microwaves	أمواج ميكروية
Mobility	حركية
Mole	مول
Molecule	جزئي
~ Mass	كتلة الجزيء
Moment	عزم
Multiplication	تضاعف

-N-

Neutron	نيوترون
Nuclear	نووي
~ forces	قوى نووية
~ reaction	تفاعل نووي
Nucleus	نواة

-O-

Orbital	مدار
Organic	عضوي
Oxidation	أكسدة

-P-

Paramagnetic	طردي (متسامت) المغنطة
Parameter	وسيط معامل
Particle	جسيم
Permeability	نفوذية
Periodic	دوري
Phenomena	ظاهرة
Photon	فوتون
Plasma	بلازما
Thermo ~	بلازما حرارية
Potential	كمون
Pressure	ضغط
Process	عملية
Proton	بروتون

-Q-

Quantum Physics	فيزياء كوانتية

-R-

Radiation	إشعاع
Radioactivity	نشاط إشعاعي
Radius	نصف القطر
Ray	شعاع

Rate	نسبة (معدل)
Recombination	إعادة الاتحاد
Electron-Ion ~	إعادة اتحاد أيون-إلكترون
Ion-Ion ~	إعادة اتحاد أيون-أيون
Rays ~	إعادة اتحاد إشعاعية
Three Collision ~	إعادة اتحاد ثلاثية الصدم
Volume ~	إعادة اتحاد حجمي
Reduction	إرجاع
Reflection	انعكاس
Resistance	مقاومة
Rotation	دوار،دوران
Reversible	عكوس

-S-

Satiation	إشباع
Scattering	تبعثر- تشتت
Solid	صلب
Solenoid	لولبي
Solution	محلول
Soluatation	إذابة
Separation	فصل
Thermo Separation of charge	الفصل الحراري للشحنات
Spul	وشيعة
Space	فضاء
Spectrum	طيف
Star	نجم

Fixed ~s	نجوم ثابتة
~ Atmosphere	الغلاف الغازي للنجوم
Storm	عاصفة
Superconductivity	الناقلية الفائقة
Super sonic speed	السرعة فوق الصوتية
Source	منبع
Gas discharge light ~	منابع ضوئية ذات انفراغ غازي
Ionization cross-section	المقطع العرضي للتأين
Surface	سطح
Suzeptibilty	طواعية

-T-

Temperature	درجة الحرارة
Thermocouple	مزدوجة كهرحرارية
Time	زمن
Thunder	رعد
Torque	مزدوجة

-U-

Unite	واحدة

-V-

Vacuum	خلاء
Vapor	بخار
Vector	متجه
Velocity	سرعة
Vibration	اهتزاز
Voltage	جهد

Induceed ~	جهد متحرض
Magnetic ~	جهد مغناطيسي
Viscosity	لزوجة

-W-

Wall	جدار
Wave	موجة
Wave-Packet	حزمة أمواج
Weight	ثقل
Work	عمل

اللجنة العلمية

الدكتور جبور جبور

أستاذ في قسم الفيزياء- كلية العلوم- جامعة تشرين

الدكتور هيثم جبيلي

أستاذ في قسم الفيزياء- كلية العلوم- جامعة تشرين

الدكتور مصطفى أفيوني

أستاذ في قسم الفيزياء- كلية العلوم- جامعة حلب

المدقق اللغوي

الدكتورة ريم هلال

عضو هيئة تدريسية في قسم اللغة العربية بكلية الآداب

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات

السؤال الأول

