كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الرابعة**

المادة : فيزياء نووية2

المحاضرة :الخامسة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

المحاضرة الخامسة لمقرر الفيزياء النووية 2 – د. سمر عمران

النوعية:

أدخل الفيزيائي Laporte عام 1924 عدداً كوانتياً أطلق عليه اسم النوعية، وذلك لكي يأخذ بعين الاعتبار قواعد الانتقاء أو الاصطفاء الملاحظة أثناء الانتقالات الكهرومغناطيسية بين السويات الذرية (النووية). كما أنَّ النتائج التجريبية تدل على أنَّ توابع الموجة للسويات الذرية تكون إما زوجية أو فردية عندما نعكس الإحداثيات المكانية، أي عند استبدال (x, y, z) بـ $(-x, -y, -z)$. هذه الميزة التي تُسهّل تصنيف الحالات عُمّمت فيما بعد على بنيات أخرى وبشكل خاص على النوى والهادرونات.

مفهوم النوعية في الميكانيك الكوانتي:

لنعتبر مؤثر الانعكاس في الفراغ (أو العكس) P يؤثر على التابع الموجي بالشكل التالي:

$$\widehat{P}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \dots .) = \Psi(-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, \dots \dots .)$$

كما نلاحظ أنَّ هذا المؤثر يعكس إحداثيات الموضع وعادةً نرمز للتوابع الخاصة والقيم الخاصة لهذا المؤثر بالرمزين Ψ_π و π على التوالي. درسنا سابقاً أنَّ معادلة القيم الخاصة تُكتب بالشكل التالي:

$$\widehat{P}\Psi_\pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \dots .) = \pi\Psi_\pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \dots .) = \Psi_\pi(-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, \dots \dots .)$$

من الواضح بحسب التعريف السابق أنَّ التوابع الزوجية والتوابع الفردية هي توابع خاصة لـ P مع القيم الخاصة $\pi = +1$ و $\pi = -1$ على الترتيب. هاتان القيمتان هما الإمكانيتان الوحيدتان وبالتالي تطبيق مؤثر الانعكاس على التابع مرتين يعيدنا إلى نفس التابع الأصلي.

$$P^2\Psi_\pi = \mathrm{P}(\mathrm{P}\Psi_\pi) = \mathrm{P}\pi\Psi_\pi = \pi^2\Psi_\pi = \Psi_\pi$$

تحديد النوعية لجملة كوانتية:

إنَّ تحديد النوعية الكلية لجملة كوانتية ما ترتبط بنوعية مكونات هذه الجملة فعلى سبيل المثال نوعية النواة ترتبط بنوعية النكليونات التي تكونها.

بالتعريف، إنَّ النوعية الكلية لجملة تساوي جداء النوعية المدارية في النوعية الذاتية، أي أنَّ:

$$P_{tot} = P_{int}.P_{orb} \quad \text{أو} \quad \pi_{tot} = \pi_{int}.\pi_{orb}$$

حيث π_{tot} ،π_{int} ،π_{orb} تمثل النوعية المدارية والذاتية والكلية على الترتيب.

تمتلك الجسيمات الأولية نوعية ذاتية، فقد اصطلح على أن تكون النوعية الذاتية للإلكترون زوجية وكذلك الأمر بالنسبة للبروتون والنترون:

$$\pi_p = \pi_n = \pi_e = +1$$

ملاحظة: إذا كان للعزم المداري الكلي $\sum_i l_i$ قيمة زوجية تكون النوعية زوجية وإلا فالنوعية فردية.(حيث l_i العزم الزاوي المداري للنكليون i)

حساب النوعية لنواة الديترون أو الديتريوم d:

نعلم أنَّ الديترون مؤلف من نكليونين، وتبيّن بالقياس أنَّ قيمة سبين نواة الديترون يساوي $J_d = 1$. أظهرت التجربة أنَّ قياس العزم المغناطيسي للديترون يأخذ قيمة أكبر من مجموع العزم المغناطيسي لكل من البروتون والنترون، علماً أنَّ كل من البروتون والنترون يجب أن يتوضع في سوية مدارية تكافئ $l = 0$. وأيضاً التجربة بينت أنَّ هناك قيمة لعزم رباعي القطب الكهربائي لهذا الديترون هذا يعني أننا لا نستطيع التعبير عن حالة الديترون من خلال الحالة الأساسية فقط $l = 0$

بل يجب إرفاق وزن ولو كان ضعيفاً لموجة مقابل لعزم مداري $l = 2$ يُضاف إلى الموجة $l = 0$. ونعلم سابقاً أنَّ التابع الموجي في الحالة العامة مكوّن من جزأين جزء قطري يرتبط بـ $R(r)$ وجزء آخر زاوي نرمز لهُ بـ $Y_l^m(\theta,\varphi)$ ، بناءً على ذلك تكون هناك سيطرة واضحة للموجة الموصوفة بـ $Y_0^0(\theta,\varphi)$ وسعة ضعيفة للموجة $Y_2^m(\theta,\varphi)$ ، وبحسب خواص $Y_l^m(\theta,\varphi)$ فإنَّ كل من هذه السعات يتحول تحت تأثير تابع العكس أو الانعكاس P وفق التالي:

$$PY_l^m(\theta,\varphi) = Y_l^m(\pi-\theta,\pi+\varphi) = (-1)^l Y_l^m(\theta,\varphi)$$

نلاحظ من العلاقة السابقة أنَّ تحويل $\vec{r}$ إلى $-\vec{r}$ مكافئ لتحويل (r,θ,φ) إلى $(r,\pi-\theta,\pi+\varphi)$.

وكذلك النوعية لتابع الموجة للديتريوم مرتبطة بقيمة العزم المداري l فعندما يكون ($l = 0$ أو قيمة زوجية) فالنوعية موجبة وإلا فهي سالبة، بناءً على ما تقدّم نعرّف النوعية المدارية لتابع الديتريوم بأنها نوعية موجبة $\pi_{orb} = +1$

$$\pi_d = \pi_p.\pi_n.\pi_{orb} = +1$$

وذلك لأن البرتون والنترون المكونين لنواة الديتريوم يوجدان في حالة عزمها الزاوي النسبي l زوجي.

تجدر الإشارة إلى أنَّ النوعية تكون محفوظة في الحالة العامة كالطاقة الحركية وكمية الحركة والعزم الزاوي وهي لا تتغير إلا بأسر أو تحرير فوتون أو جسيمات أخرى نوعيتها فردية.

نشير أيضاً إلى أنَّ كلّ سوية نووية تتميز عادةً بسبين كلي ونوعية محددة يُعبّر عن ذلك استناداً إلى الرموز الطيفية المستخدمة في الفيزياء الذرية والنووية بالرمز J^p أو J^π . فعلى سبيل المثال سبين نواة الليثيوم ${}_3^7Li_4$ يساوي $\frac{3}{2}$ ونوعيته فردية، فنعبّر عن ذلك كما يلي:

$$J^p \equiv J^\pi = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

السؤال الآن: كيف يتم انحفاظ العزم الزاوي الكلي والنوعية في أي تفاعل نووي؟

للإجابة على هذا السؤال نأخذ المثال التالي:

إذا امتصت النواة السابقة بروتوناً فإنها تعطي نواة جديدة لعنصر البريليوم

$${}_3^7Li + {}_1^1p \rightarrow {}_4^8Be$$

فإذا علمنا أنَّ السبين لنواة الليثيوم والبروتون على التوالي هي: $J_p^\pi = \left(\frac{1}{2}\right)^+, J_{Li}^\pi = \left(\frac{3}{2}\right)^-$ فلنبحث الآن عن كيفية الحصول على العزم الزاوي المحتمل للنواة ${}_4^8Be$.

من أجل ذلك نعتمد على مبدأ انحفاظ العزم الزاوي الكلي قبل وبعد التفاعل (مبدأ المصونية)، ونعبّر عن ذلك بالعلاقة التالية: $J_i = J_f$

حيث: J_i العزم الزاوي الكلي للحالة البدائية ، J_f العزم الزاوي الكلي للحالة النهائية.

$$J_i^\pi = \left[J_{Li}^\pi \pm J_p^\pi\right] \pm (-1)^l = J_f^\pi$$

انطلاقاً من ذلك ومن انحفاظ النوعية نكتب:

$$\pi_i = \pi_{Li}.\pi_p.\pi_{orb} = \pi_{Li}.\pi_p.(-1)^l = \pi_f$$

π_i نوعية الحالة البدائية، π_f نوعية الحالة النهائية، l العزم المداري النسبي، وبحسب قيم l يمكننا أن نميز الحالات التالية:

1- إذا كان $l = 0$ أي المدار S:

$$J_i^\pi = \left[J_{Li}^\pi \pm J_p^\pi\right] \pm (-1)^l = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^- \pm \left(\frac{1}{2}\right)^+\right] \pm 0^+ = 1^-, 2^-$$

$$\Longrightarrow J_f^\pi = 1^-, 2^-$$

النوعية الناتجة هي نوعية سالبة لأنَّ: $(-) \times (+) \times (+) = (-)$

2- إذا كان $l = 1$ أي المدار P:

$$J_i^\pi = [J_{Li}^\pi \pm J_p^\pi] \pm (-1)^l = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^- \pm \left(\frac{1}{2}\right)^+\right] \pm (-1)^- = 0^+, 1^+, 2^+, 3^+$$

$$\Longrightarrow J_f^\pi = 0^+, 1^+, 2^+, 3^+$$

النوعية الناتجة هي نوعية موجبة لأنَّ: $(-) \times (+) \times (-) = (+)$

3- إذا كان $l = 2$ أي المدار D:

$$J_i^\pi = [J_{Li}^\pi \pm J_p^\pi] \pm (-1)^l = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^- \pm \left(\frac{1}{2}\right)^+\right] \pm (-2)^+ = 0^-, 1^-, 2^-, 3^-, 4^-$$

$$\Longrightarrow J_f^\pi = 0^-, 1^-, 2^-, 3^-, 4^-$$

النوعية الناتجة هي نوعية سالبة لأنَّ: $(-) \times (+) \times (+) = (-)$

النماذج النووية

إنَّ النماذج النووية هي عبارة عن تمثيلات نظرية مبسطة لتجمع النكليونات وتفاعلاتها مع بعضها البعض في النوى الذرية. بوجد العديد من النماذج وكل نموذج استطاع أن يشرح جزء من خصائص وميزات التركيب النووي هذا يعني أنَّ كل نموذج يمتلك إمكانيات محددة.

القاسم المشترك بين جميع النماذج النووية المعروفة حتى الآن هو البحث عن فهم أوضح للبنية النووية وهذا يتطلب فهم أكبر للقوى النووية المسيطرة على هذه البنية.

اعتمدت النماذج النووية على فكرتين متناقضتين:

الفكرة الأولى: اعتبرت أنَّ كلّ نكليون لا يخضع إلا لكمون وسطي، وحركته مستقلة عن حركة النكليونات الأخرى (أيّ أنَّ التأثيرات المتبادلة بينه وبين النكليونات الأخرى مهملة). وبالتالي يمكن القول بأنَّ احتمال تبعثر أو انتثار نكليونين في النواة ضعيف، أو أنَّ المسار الحرّ الوسطي لكل نكليون على انفراد يكون كبيراً. (المسار الحرّ الوسطي: المسافة التي

يقطعها الجسيم دون أن يعاني أي تصادم أو تبعثر). ويطلق على هذه النماذج التي تنتمي إلى هذه الفكرة **نماذج الجسيمات المستقلة** كالنموذج الطبقي ونموذج النكليون المفرد ونموذج غاز فيرمي.

الفكرة الثانية: اعتبرت أنَّ كلّ نكليون يتفاعل بشدة وبشكل قوي مع جميع النكليونات الأخرى وعلى الأخص النكليونات القريبة منه (بسبب المدى القصير للقوى النووية التي تؤثر بين النكليونات). وبالتالي سيكون المسار الحرّ الوسطي للنكليون قصير جداً بالمقارنة مع نصف القطر النووي. ويطلق على هذه النماذج التي تنتمي إلى هذه الفكرة **نماذج التأثيرات المتبادلة القوية أو الشديدة** كنموذج القطرة السائلة ونموذج النواة المركبة.

بالإضافة إلى النماذج التي تنتمي إلى الفكرتين السابقتين حيث لا يستطيع أي منهما أن يمثل الحقيقة بكاملها، توجد نماذج وسيطية أو توفيقية قامت بعملية التوفيق بين الفكرتين كالنموذج الجماعي والنموذج الضوئي.

نموذج القطرة السائلة:

يُعتبر هذا النموذج من النماذج النووية التي حققت نجاحاً في حساب بعضاً من خصائص النواة ، لا سيما طاقة الارتباط للنواة واعتمد هذا النموذج على عبارات تحليلية (رياضية) متقدمة وعلى مفاهيم فيزيائية جديدة واستند إلى بعض الفرضيات نذكر منها:

1- النواة عبارة عن مادة غير قابلة للانضغاط بحيث أنَّ نصف القطر النووي يتناسب مع الكتلة الذرية (العدد الكتلي) وفق العلاقة $R \sim A^{\frac{1}{3}}$
2- القوى النووية متماثلة لكل نكليون وهي بشكل خاص لا تتعلق بطبيعة النكليون أي أنها لا تميز بين النكليونات (نترون أو بروتون).
3- القوى النووية ذات مدى قصير أقل من نصف القطر الكروي ولكن تأثيرها أكبر من تأثير أية قوى موجودة في الطبيعة.

إنَّ الأفكار التي سمحت ببناء هذا النموذج اعتمدت على المزج بين الأفكار النظرية والأفكار التجريبية لذلك أُطلق على العلاقة التي تعبّر عن علاقة طاقة ارتباط النواة بعلاقة نصف تجريبية، وتُعطى بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{B(A,Z) = a_V A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} - \delta + \xi} \qquad (*)$$

حيث a_V و a_s و a_c و a_a ثوابت مستقلة عن A و Z (العدد الكتلي والعدد الذري)، وتأخذ قيمها العددية بناءً على النتائج التجريبية لذلك تسمى بالثواب التجريبية.

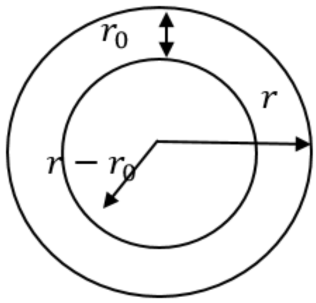
N : عدد النترونات ، Z: عدد البروتونات ، δ: ثابت يتعلق بالنواة.

سنناقش حدود العلاقة السابقة بالتفصيل نظراً لأهميتها:

الحدّ الأول: $B_V = a_V A$ طاقة الارتباط الحجمية، يتعلق هذا الحدّ بحجم النواة الذي يساوي $\frac{4}{3}\pi R^3$ وذلك بفرض أنَّ النواة كروية الشكل، ويتناسب مع العدد الكتلي A.

الحدّ الثاني: $B_s = a_s A^{2/3}$ طاقة الارتباط السطحية، يتعلق هذا الحدّ بسطح النواة، وهو من الحدود الأكثر أهمية في العلاقة الأخيرة لأنه يعطينا فكرة حول عدد النكليونات الموجودة في المركز أو البنية الداخلية للنواة وكذلك عدد النكليونات المتوضعة بالقرب من القشرة الخارجية للنواة (سطح النواة). ونشير إلى أنَّ هذا الحدّ يسيطر من أجل النوى الخفيفة.

مثال: نعلم أنَّ نصف قطر النواة الكروية الشكل يساوي $r = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ فإذا اعتبرنا النواة تشابه قطرة السائل ذات شكل كروي وأخذنا قشرة رقيقة من سطحها سماكتها r_0 من مرتبة أبعاد النكليون كما في الشكل التالي فيمكن أن نكتب ما يلي:



إنَّ الحجم الكلي لهذه النواة التي نصف قطرها r يساوي:

$$V_t = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(r_0 A^{1/3}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$$

بينما حجمها الداخلي الذي نصف قطره يساوي $(r - r_0)$:

$$V_i = \frac{4}{3}\pi(r - r_0)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(r_0 A^{1/3} - r_0\right)^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3\left(A^{1/3} - 1\right)^3$$

وإذا حسبنا النسبة بين الحجمين:

$$\frac{V_i}{V_t} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_0^3\left(A^{1/3} - 1\right)^3}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{\left(A^{1/3} - 1\right)^3}{A}$$

وطبقنا العلاقة الناتجة على نواة الألمنيوم $^{27}_{13}Al$ نجد:

$$\frac{V_i}{V_t} = \frac{\left(27^{1/3} - 1\right)^3}{27} = \frac{8}{27}$$

أيّ أنَّ عدد النكليونات الموجودة في الحجم الداخلي يساوي 8 نكيلونات، وعدد النكليونات الموجودة في القشرة الخارجية يساوي $27 - 8 = 19$ وبالتالي فإنَّ النسبة بين حجم القشرة الخارجية والحجم الكلي يساوي:

$$\frac{V_s}{V_t} = \frac{19}{27}$$

ومنه نجد أنَّ حدّ السطح ذو أهمية كبيرة ويجب أخذه بعين الاعتبار.

الحدّ الثالث: $(\Delta B)_c = a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$ طاقة الارتباط الناتجة عن التدافع الكولوني نتيجة التأثير المتبادل بين البروتونات ذات الشحنة الكهربائية الموجبة ضمن النواة. إنَّ مساهمة هذا الحدّ تنقص طاقة الارتباط $\frac{B}{A}$ وتبدو أهميته في النوى الثقيلة (أي من أجل قيم كبيرة لـ Z) أي من أجل $A \cong 60$ وما فوق.

إنَّ مساهمة هذا الحدّ من أجل النوى الخفيفة ضعيفة وذلك لأن شدّة التفاعل القوي أكبر بكثير من شدّة التفاعلات الكهربائية.

الحدّ الرابع: طاقة الارتباط اللاتناظرية أو اللامتناظرة. نشير إلى أنَّ هذا الحدّ يعكس سعي النواة لامتلاك نفس العدد من البروتونات والنترونات، وهذا واضح في النوى الخفيفة المستقرة التي يكون فيها $N = Z$ ، لكن ذلك لا يتحقق من أجل النوى الثقيلة بسبب أهمية الطاقة الكولونية التي تفضل زيادة عدد النترونات على عدد البروتونات.

إنَّ الطاقة التناظرية هي الفرق بين الطاقة النووية لنواة تمتلك N نترون و Z بروتون والنواة التي تمتلك عدداً متساوياً من النترونات والبروتونات $N = Z = \frac{A}{2}$ التي تدعى الإيزوبار isobare .

من أجل تصنيع النواة الأولى ابتداءً من نواتها الإيزوبارية، إذا كان n عدد البروتونات التي تمّ تحويلها إلى نترونات، نجد أنَّ:

$$N = \frac{1}{2}A + n \ , \ \ Z = \frac{1}{2}A - n \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{1}{2}(N - Z)$$

أي يجب صرف كمية من العمل تساوي:

$$n^2\Delta = \frac{1}{4}(N - Z)^2\Delta$$

بما أنَّ هذه العلاقة تأخذ دائماً قيمة موجبة، فطاقة الارتباط ستكون دائماً أقل من أجل نواة $N \neq Z$ منها من أجل نواة يكون فيها $N = Z$. علماً أنَّ Δ البعد بين حالات البروتونات أو حالات النترونات. Δ

الحدّ الخامس (طاقة التزاوج): إنَّ هذا الحدّ $\delta(A,Z)$ يأخذ بالحسبان التزاوج بين النكليونات. ويمثل خاصية عدم الاستقرار للنوى الزوجية البروتونات والنترونات بالمقارنة مع النوى الفردية – الفردية، حيث إنَّ النظائر المستقرة من النوع الأخير نادرة جداً في الطبيعة.

من أجل A فردي: $\delta = 0$

من أجل A زوجي: N,Z زوجيان: $\delta = -f(A)$

N,Z فرديان: $\delta = +f(A)$

حيث $f(A)$ موجب وبحسب فيرمي فإنَّ:

$$f(A) = a_p . A^{-3/4} . \delta \approx \frac{33MeV}{A^{3/4}} . \delta$$

باختصار:

$$\text{زوجية – زوجية} \longrightarrow (2p - 2n) \Longrightarrow -1$$

$$\text{فردية – فردية} \longrightarrow (1p - 1n) \Longrightarrow +1$$

$$\text{فردية – زوجية} \longrightarrow (2p - 1n) \Longrightarrow 0$$

الحدّ السادس (طاقة التزاوج): إنَّ هذا الحدّ ξ يأخذ بالحسبان مفهوم الطبقات النووية. وهو موجب إذا كانت قيم N أو Z قريبة من الأعداد السحرية التي سوف نتكلم عنها بشيء من التفصيل عند دراستنا لنموذج الطبقات.

هناك مفعول أُطلق عليه مفعول مافوق الاستقرار بقليل للنوى التي تمتلك عدد من النترونات أو البروتونات قريبة من $28 , 50, 82, 128$. بعبارة أخرى نلاحظ وجود ترابطات قوية جداً كلما اقتربنا من الأعداد المذكورة السابقة والتي تدعى الأعداد السحرية.

يتم المقارنة بين القيم التجريبية لطاقة الفصل والتي نرمز لها بـ S_{exp} والقيم المحسوبة S_{cal} باستخدام العلاقة (*) النصف تجريبية.

وبالتعريف طاقة الفصل هي الطاقة اللازمة لنزع نكليون غير متزاوج من نواة فردية.

يمكن تحديد ثوابت العلاقة (*) من معطيات تجريبية متوفرة، ويمكن استخدام عدة مجموعات من القيم لهذه الثوابت.

وهذه القيم مقدرة بالـ MeV، حيث: $r_0 = 1.24\ Fermi\ ,\ \ 1u = 931MeV$

$$a_v = 15.56\ ,\ \ a_s = 17.23\ ,\qquad a_c = 0.70\ \ ,a_a = 23.6\ ,\qquad \delta = \frac{11}{A^{\frac{1}{2}}}$$

تمرين: يمكن حساب الخسارة في طاقة الارتباط والناتجة عن التدافع الكولوني (الطاقة الكولونية) كما يلي:

تُعطى طاقة كولوم بالعلاقة التالية:

$$E_c = \frac{(Ze)^2}{r}$$

على اعتبار أنَّ:

$$\rho V = Ze = q \quad \Longrightarrow \quad \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Ze$$

$$\Delta E_c = \frac{qdq}{r} = \frac{Ze\ \ d(Ze)}{r} = \frac{\rho V\ \ d(\rho V)}{r}$$

$$\Longrightarrow E_c = \int_0^R \frac{\rho V\ \ d(\rho V)}{r} \qquad\qquad (1)$$

$$\text{حيث} \quad d(\rho V) = \ \rho\ d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi\ \rho r^2 dr$$

نعوض في (1):

$$E_c = \int_0^R \frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)\ \ 4\pi\ \rho r^2 dr}{r} = \int_0^R \frac{\frac{16}{3}\pi^2 r^5 \rho^2 dr}{r} \quad =$$

$$= \int_0^R \frac{16}{3}\pi^2 \rho^2 r^4 dr = \frac{16}{15}\pi^2 \rho^2 R^5 \qquad (2)$$

لنعتبر النواة كرة مشحونة بشكل منتظم ذات شحنة Ze وكثافة شحنية ρ:

حيث:

$$\rho = \frac{Ze}{V} = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad , \quad R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$$

تصبح E_c بعد التعويض في العلاقة (2) بالصيغة التالية:

$$E_c = \frac{16}{15}\pi^2 \left(\frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)^2 R^5 = \frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{R} \qquad (3)$$

$$\Longrightarrow E_c = \frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{r_0 A^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0}\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} = a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}$$

حيث: $a_c = \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0}$ ثابت.

بما أننا افترضنا أنَّ شحنة كل بروتون كانت قد توزعت على النواة، فالعلاقة (3) تحتوي من أجل كل بروتون حدّ طاقة ذاتية يساوي $\frac{3}{5}\frac{e^2}{R}$ ، وهذا الحدّ يعتبر حدّ غير شرعي نحصل عليه بوضع $Z = 1$ وبالتالي نحصل على طاقة تفاعل صحيحة بين أزواج البروتونات بطرح هذا الحدّ من أجل Z بروتون.

$$E_c = (\Delta B)_c = \frac{3}{5}\frac{Z(Z-1)\, e^2}{R}$$

$$E_c = (\Delta B)_c = \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0}\frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} = a_c \, \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}}$$

نشير إلى أنَّ هذا الحدّ في المعادلة الأساسية لطاقة ارتباط النواة سالب وذلك لأن الطاقة الكولونية الموجبة تساهم في إنقاص طاقة الارتباط النووية.