



كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الرابعة

المادة : الكترونيات نانوية

المحاضرة : الاولى /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z Facebook Group :

كلية العلوم

39

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

النقل الإلكتروني في أنصاف النواقل والتراكيب النانوية Electron Transport in Semiconductors and Nanostructures

1-6 مقدمة: Introduction

- يعتمد علم الإلكترونيات Electronics على الإشارات الكهربائية، فهو يتعامل مع قياسات التيار والجهد الكهربائيين.
- تكمن الوظائف الأساسية للنبائط الإلكترونية في ضبط الإشارات الكهربائية ومعالجتها.
- ستتركز دراستنا في هذا الفصل على نقل حاملات الشحنة الكهربائية التي تُعدُّ مسؤولةً عن تدفق التيارات الكهربائية في التراكيب النانوية.
- فنُظِّم النقل الممكنة للإلكترونات ترتبط بالعديد من البارامترات والعوامل؛ يمكن شرح وتوضيح بعض الأوجه المهمة لهذه النُظْم من خلال:

→ مقارنة مقاييس الزمن والطول لحاملات الشحنة مع أبعاد النبائط

→ والظواهر الزمنية للنبائط المرتبطة بالترددات العاملة فيها.

- ثم ندرس سلوك الإلكترونات بوجود حقل كهربائي شدته كبيرة بما في ذلك ما يسمى بمفعول الإلكترونات الحارة *Hot-Electron*. وعند تحليل النبائط القصيرة جداً نَصِفُ

→ النقل الإلكتروني التبددي Dissipative Transport

→ مفعول السرعة العابرة *Velocity-Overshoot Effect*.

- وأخيراً، سندرس الحركة الباليستية نصف التقليدية للإلكترونات
- ثمَّ نعرض بعض الأفكار حول النقل الكمومي في النبائط النانوية.

2-6 مقاييس الزمن والطول للإلكترونات في الأجسام الصلبة:

1-2-6 الأطوال الإلكترونية الأساسية في الأجسام الصلبة:

Electron Fundamental Lengths in Solids

■ الطول المميز في الجسم الصلب المتبلور هو ثابت الشبكة البلورية a_0 ولكن المقاييس المرتبطة بحاملات الشحنة عادةً \ll من a_0 ؛

→ إن هذه الحقيقة تسمح لنا بإهمال البنية البلورية الدقيقة ودراسة **الإلكترون**

فيها وكأنه جسيم حر تقريباً، وذلك **من خلال** تعيين **كتلة فعالة** للإلكترون يمكن أن **تختلف** عن كتلته في الخلاء.

■ يُعدُّ **طول موجة دوبروي De-Broglie** للإلكترون في جسم صلبٍ **الطول الأكثر أهمية**؛

→ فمن أجل إلكترون في بنية نانوية نصف ناقلة كتلته الفعالة m^* يكون طول موجة دوبروي λ عادةً أكبر منه من أجل إلكترون حر λ_0 :

$$\lambda > \lambda_0$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m^*E}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\frac{m^*}{m_0}E}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{m_0}{m^*}}; \quad \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0E}}, \quad (1-6)$$

حيث E طاقة الإلكترون

و m_0 كتلة الإلكترون في الخلاء.

■ يوضح **الشكل (1-6)** تابعة قيمة λ للنسبة m^*/m_0 : تُشير النقاط من 1 إلى 4

الظاهرة على المنحني للأطوال الموجية من **أجل الإلكترونات**

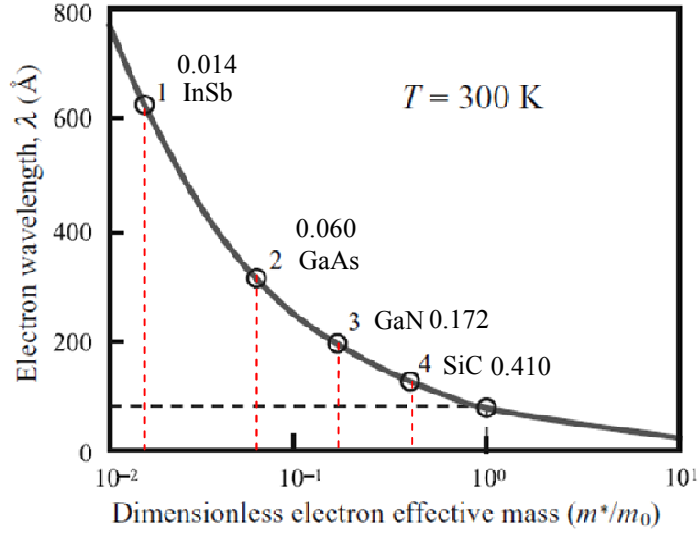
■ في InSb و GaAs و GaN و SiC على الترتيب.

■ لقد استخدمنا من أجل هذه المواد الكتل الفعالة، m^*/m_0 ،

المساوية (0.014) و (0.06) و (0.172) و (0.41) على الترتيب؛

■ وافترضنا أن طاقة الإلكترون تساوي $E = k_B T$ ، حيث $T = 300\text{K}$ درجة حرارة

الوسط المحيط.



الشكل (1-6): علاقة طول الموجة الإلكترونية بالكتلة الفعالة في درجة حرارة الغرفة؛ تشير النقاط 1 و 2 و 3 و 4 إلى المركبات InSb و GaAs و GaN و SiC

الجدول (4-8): ثوابت الشبكة البلورية من أجل مواد نصف ناقلة تكعيبية في درجة الحرارة 300 K

Semiconductor	Lattice constant (Å)
SiC	3.0806
C	3.5668
Si	5.4309
GaP	5.4495
GaAs	5.6419
Ge	5.6461
AlAs	5.6611
InP	5.8687
InAs	6.0584

■ نلاحظ أن **طول موجة دوبروي** للإلكترون في أنصاف النواقل النموذجية ذات الكتلة

الفعّالة m^* الواقعة في المجال $(0.01-1)m_0$ **يساوي** $(730-73)\text{Å}$ ،

→ أي إنه فعلاً أكبر بكثير من a_0 من أجل المواد المُدرجة في الجدول 4-8.

■ **وحالما تنخفض درجة الحرارة إلى 3 K يزداد طول موجة دوبروي بمقدار**

عشر مرات.

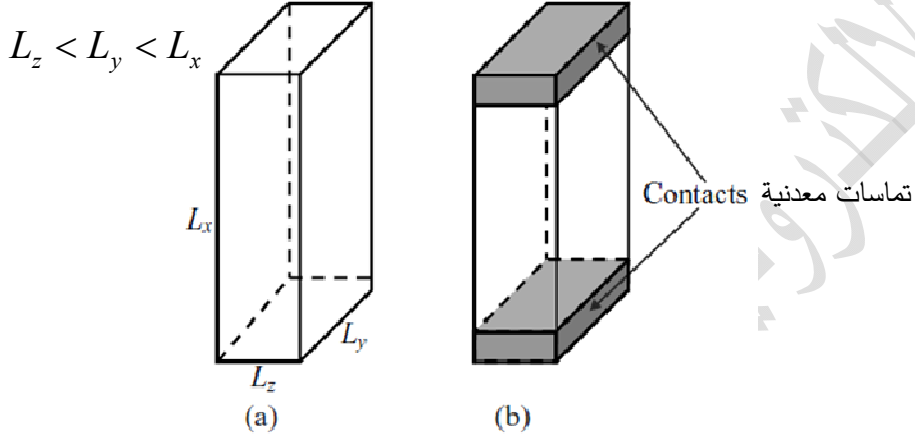
■ وهكذا يُصبح الطول الموجي **قريباً من أبعاد تراكيب** ونبائط نصف ناقلة تم **تحصيلها**

بتكنولوجيا التصنيع النانوية الحديثة.

2-1-6 أبعاد النبيلة وتكمية الطيف الإلكتروني:

Size of a Device and Electron Spectrum Quantization

لندخل بعداً هندسياً لعينة نصف ناقلة $L_x \times L_y \times L_z$ ، كما يوضح الشكل (2-6) تخطيطياً:
ولنفرض أنّ $L_z < L_y < L_x$ ؛



الشكل (2-6): (a) الأبعاد الهندسية لعينة نصف ناقلة و (b) لعينة نصف ناقلة بوجود تماسات توصيل تيار كهربائي؛ يحدث النقل الإلكتروني على طول الاتجاه x .

- فإذا كانت الجملة خالية من العشوائية وآليات التبعثر Scattering الأخرى ضعيفةً كفايةً (أي المطعمات والشوائب والعيوب قليلة جداً لدرجة الإهمال)، تكون الحركة الإلكترونية شبه باليستية Quasi-ballistic والطول الوحيد الواجب مقارنة الأبعاد الهندسية به هو طول موجة دوبروي λ فقط.
- وبما أنّ عدداً صحيحاً فقط من أنصاف أمواج الإلكترونات يمكن أن يلائم أي جملة محدودة، فبدلاً من طيف طاقي مستمر وعدد مستمر من الحالات الإلكترونية يتم الحصول على مجموعة حالات إلكترونية ومستويات طاقة متقطعة توصف كل منها بعدد مناسب من أنصاف الأطوال الموجية. وهذا ما يُعزى إلى ما يسمى بتكمية الحركة الإلكترونية Quantization of Electron Motion عادةً.

■ وتبعاً لأبعاد الجملة المدروسة يمكن التمييز بين الحالات الآتية:

(a) الحالة ثلاثية البعد (شبه الحجمية)؛ عندما لا تكون تكمية الطيف الإلكتروني مهمة على الإطلاق،

→ فإن طول موجة دوبروي يكون أقل بكثير من أبعاد النبيلة كافةً:

$$\lambda \ll L_x, L_y, L_z, \quad (2-6)$$

→ ويسلك الإلكترون عندها سلوكاً مشابهاً لسلوك جسيم حر يتصف بكتلة فعالة m^* ، أي يكون طيفه الطاقي مستمراً.

(b) الحالة ثنائية البعد (بئر كمومي)؛ عندما تحدث تكمية الحركة الإلكترونية في اتجاه واحد،

→ فإن طول موجة دوبروي يكون مساوياً لسماكة النبيلة تقريباً ولكنه أصغر بكثير من بعديها الآخرين (طولها وعرضها، مثلاً):

$$\lambda \cong L_z \ll L_y, L_x. \quad (3-6)$$

→ تُعطى الطاقة الإلكترونية من أجل هذه الحالة على شاكلة عصابات طاقة جزئية ثنائية البعد.

(c) الحالة أحادية البعد (سلك كمومي)؛ عندما تحدث تكمية الحركة الإلكترونية في اتجاهين، فإن طول موجة دوبروي أصغر بكثير من طول النبيلة ويكون من مرتبة البعدين الآخرين:

$$L_z \cong L_y \cong \lambda \ll L_x. \quad (4-6)$$

→ تُعطى الطاقة الإلكترونية من أجل هذه الحالة على شاكلة عصابات طاقة جزئية أحادية البعد.

(d) الحالة صفرية البعد (نقطة كمومية)؛ عندما تحدث تكمية الحركة الإلكترونية في الاتجاهات كافة،

→ فإن طول موجة دوبروي يكون من مرتبة أبعاد النبيلة كافة:

$$L_x \cong L_y \cong L_z \cong \lambda. \quad (5-6)$$

→ وقد تُعطى الطاقة الإلكترونية من أجل هذه الحالة على شاكلة الطيف الطاقي متقطعاً.

ما هي الأسباب التي تجعل حاملات الشحنة تفقد سلوكها الشبيه بالموجة بحيث

يمكن دراستها كجسيمات تقليدية:

السبب الأول هو **عدم** مثالية الجملة الذي **يؤدي** إلى التبعثر الإلكتروني،

السبب الثاني يرتبط بدرجة الحرارة **المحدودة** للجملة وإحصاء الإلكترونات.

→ فيما يخص **السبب الأول تخضع** الإلكترونات في نبائط الحالة الصلبة **للتبعثر** على:

○ العيوب البلورية

○ والشوائب

○ واهتزازات الشبكة البلورية،

○ وخشونة السطح الفاصل، الخ.

إذ تُقسّم عمليات التبعثر هذه إلى مجموعتين:

■ مجموعة **تبعثر مرن**

■ مجموعة **تبعثر لامرن**

في **الفيزياء التقليدية**

→ يؤدي الاصطدام المرن إلى تغيير في زخم الجسيم فقط (أو في المتجه

الموجي للجسيم \vec{k})،

→ في حين إن الاصطدام اللامرن يؤدي إلى تغيير في **زخم** الجسيم وفي

طاقته.

→ **ثمة** خاصية جوهريّة للاصطدام المرن تكمن في كونه **لا يُخرب** طور

الإلكترون المتمثل في مصونية طاقته وزخمه.

أولاً- في الواقع، بعد تبعثر مرّن تبقى **الطاقة محفوظة**

$$e^{-i\Omega t} e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}}$$

فالتابع الموجي $\Psi(\vec{r}, t)$ يتألف من مركبات مختلفة تأخذ الشكل

وتمتلك كل المركبات نفس الطور المتعلق بالزمن $e^{-i\Omega t}$ (Ω التواتر الزاوي للإلكترون).

ولذلك، فإن التوزع المكاني للكثافة الإلكترونية $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = |\Psi(\vec{r})|^2$ يبقى مستقلاً

عن الزمن.

بتعبير آخر، التبعثر المرن لا يُخرب ترابط *Coherence* الحركة الإلكترونية.

يمكننا باستعمال لغة الفيزياء **شبه التقليدية** تعيين طول المسار الحر الوسطي

للإلكترونات بين حوادث **التبعثر المرن** بالعلاقة:

$$l_e = \tau_e v$$

حيث

τ_e الزمن الوسطي بين **حادثتي تبعثر** مرين
 v السرعة الوسطية للإلكترون.

ولذلك، حتى من أجل مسافات تتجاوز l_e ، تكون **الخصائص شبه الموجية** للإلكترونات **مترابطة**.

ثانياً - يؤدي **التبعثر اللامر** إلى نتيجة مغايرة لما سبق؛ حيث يولد

- أمواجاً إلكترونية بطاقات مختلفة
- ويمتلك التابع الموجي الناتج **تابعية مرّبة للمكان والزمان** معاً؛
- إذ يؤدي خفقان المركبات الموجية **المختلفة بالزمن** إلى اضطراب مفاعيل **ترابط الحركة الإلكترونية الموجية**:
- لتكن τ_E الزمن الوسطي بين تصادمين لامرنيين؛ إن المسافة التي ينتقلها الإلكترون بين هذين التصادمين تسمى أحياناً **بطول التبعثر اللامر** l_E .
- **يُحافظ الإلكترون على ترابطه الكمومي** من أجل مسافات أقل من طول التبعثر اللامر l_E **ويفقد** من أجل المسافات الأكبر منه.
- وعموماً، $l_E > \lambda$ طالما لا توجد **شروط** عدم توازنٍ حادٍ.
- وعادةً **طول التبعثر اللامر** l_E **يفوق المسار الحر الوسطي** l_e ($l_E > l_e$)؛
- وفي هذه الحالة، يتعرّض الإلكترون للكثير من التصادمات المرنة قبل أن يفقد طاقته، وتُعرف هذه العملية على أنها **عملية انتشار** *Diffusion Process* للإلكترون ويُعطى انزياحه **(طول انتشاره)** **خلال** الزمن الوسطي τ_E بين تصادمين غير مرنيين بالمساواة:

$$l_E = \sqrt{D\tau_E} \quad (\tau_E \gg \tau_e), \quad (6-6)$$

حيث يُعطى معامل الانتثار D بالمساواة:

$$D = \frac{v^2 \tau_e}{\alpha}$$

- $\alpha=3$ من أجل غاز إلكتروني **ثلاثي** البعد؛
- و $\alpha=2$ من أجل غاز إلكتروني **ثنائي** البعد؛
- و $\alpha=1$ من أجل غاز إلكتروني **أحادي** البعد؛
- عادةً، l_E و τ_E يتناقضان عند ارتفاع درجة حرارة الجملة.

أمَّا السبب الثاني الذي يستوجب إجراء **عملية توسيط** للسلوك الكمومي **على** إحصاء الإلكترونات فيمكن في **التأثير الحراري Temperature Effect**.

- في الواقع، في درجات الحرارة المحدودة تتوافر **إلكترونات بطاقات مختلفة** كفاية ←
- **تباين كبير** Large Spreading في **أطوار التابع الموجي** الموافق لها
- **فيتشوه الترابط** في المنظومة الإلكترونية.

وهنا يمكن تقييم **الطول المميز** L_T المتعلق بهكذا تشوه **مرتبط بدرجة الحرارة**؛

→ فتعرض الطاقة الإلكترونية بمقدارٍ من رتبة $k_B T$ يؤدي لاختلاف الأطوار مع **الزمن** t وفق العلاقة:

$$\Delta\phi = \frac{k_B T}{\hbar} t$$

إذن، يمكن تقييم **التشتت الزمني** t على أنه اللحظة τ_T التي من أجلها $\Delta\phi \approx 1$ ، أي أن

$$\tau_T|_{\Delta\phi \approx 1} = \frac{\hbar}{k_B T}$$

→ إذا كان التبعثر مرناً فقط، فإن الإلكترون ينتشر في الفراغ لمسافة تساوي **نحو** \sqrt{Dt} خلال الزمن t الذي يتجاوز زمن الطيران الحر الوسطي τ_e .

→ وهكذا، يمكن الحصول على طول الانتشار الحراري *Temperature Diffusion*

خلال الفاصل الزمني τ_T :

$$L_T = \sqrt{D\tau_T} = \sqrt{Dh / k_B T} .$$

وعند مسافات تفوق L_T يفقد الإلكترون الترابط.

في حقيقة الأمر، تنتج ظواهر التباين الطوري Dephasing Effects من التصادمات اللامرنة والتشتت الحراري للأطوار التي تحدث بآنٍ معاً؛ ولذلك، يتعيّن المقياس المكاني

Spatial Scale المرتبط بفقدان الترابط الكوموي l_ϕ بأصغر الطولين l_E و L_T :

$$l_\phi \cong \min\{l_E, L_T\}. \quad (7-6)$$

- يتعيّن النقل الإلكتروني بالتابع الموجي أي بتراكب الأمواج الإلكترونية المتبعثرة.
- يمكننا أن نستنتج من الدراسة المذكورة أعلاه أن طول الترابط *Coherence*، l_ϕ ، يُعيّن الحدّ الذي دونه يمتلك النقل الإلكتروني سلوكاً كمومياً Quantum.
- فالنبائط التي أبعادها الهندسية من رتبة طول الترابط لن توصّف بعد الآن بمتحولات مادية جهرية؛ كالناقلية، والسرعة الوسطية، الخ.

→ تسمى مثل هذه المنظومات الفيزيائية بالجمال الميزوسكوبية التي أبعادها

أقل من الميكرومتر ومن رتبة أبعاد الذرات والجزيئات المنفردة.

→ ولذلك، فإن النظرية الدقيقة التي تصف النبائط الميزوسكوبية هي النظرية

الكمومية Quantum.

→ فخصائص مثل هذه الجمال الميزوسكوبية تُعيّن بظواهر شبه- موجية ولهذا

السبب، تتعلق هذه الخصائص بشدة:

→ بهندسة العينة، والتماسات الموصولة بها، ومواقع المبعثرات، الخ.

- أمّا من أجل الحالات التي تكون فيها مسافة النقل الإلكتروني L_T طويلة بالمقارنة

مع طول الترابط l_ϕ فيمكن وصف النبيطة في إطار الفيزياء التقليدية.

3-1-6 نظم النقل الإلكتروني الكمومية والتقليدية:

Quantum and Classical Regimes of Electron Transport

بغرض تبسيط الدراسة، نفرض أن النقل الإلكتروني يجري على **طول بعد واحد**، **ليكن**

الاتجاه x مثلاً. وعليه، فإن **التيار الكلي في كل من الاتجاهين الآخرين y و z يساوي**

الصفر، ولكن هذه الأبعاد العرضانية للنبيطة يمكن أن تكون مهمة جداً.

أولاً- نظم النقل الكمومية ونظم النقل الميزوسكوبية غير التقليديين:

يمكننا تعيين نظامي النقل الإلكتروني الكمومي والميزوسكوبي وفق الآتي:

■ إذا كان طول موجة دوبروي يفوق الطول المفترض للنبيطة L_x ،

$$\lambda \geq L_x , \quad (8-6)$$

فإن المسار الحر الوسطي الإلكتروني يفوق طول موجة دوبروي الموافقة بكثير،

و $l_e \gg \lambda \geq L_x$ ، وعندها **يوصف** النقل الإلكتروني بنظام النقل الباليستي الكمومي.

■ وإذا كان طول الترابط l_ϕ (الذي يُعزى أحياناً إلى **مقدار التباين الطوري**) يفوق L_x

و λ ؛

$$l_\phi > L_x, \lambda , \quad (9-6)$$

فإن النقل الإلكتروني **يوصف** بنظام النقل الميزوسكوبي.

ثانياً- نظام النقل الإلكتروني التقليدي:

■ في الحالة التي يكون فيها البعد L_x أكبر من طول الترابط؛

$$L_x > l_\phi , \quad (10-6)$$

يوصف النقل الإلكتروني بالنظام التقليدي.

■ وإذا كان البعد L_x أقل من المسار الحر الوسطي؛

$$l_e > L_x , \quad (11-6)$$

فيوصف النقل الإلكتروني **بالنظام الباليستي التقليدي** الذي يعني أن بمقدور الإلكترونات الانتقال في النبيلة على طول المساقط التقليدية من دون تصادمات.

إذا كان البعد L_x أكبر بكثير من المسار الحر الوسطي؛

$$L_x \gg l_e, \quad (12-6)$$

فإن النقل الإلكتروني يكون من **طبيعة انتشارية**، أي أن الإلكترونات تعاني العديد من التصادمات لدى انتقالها في النبيلة.

وإذا كان $L_x \sim l_E \gg l_e$ ، فإن الإلكترونات لا تفقد طاقاتها أثناء حركتها عبر المقطعين الآخرين للنبيلة (المسارات العرضانية العمودية على طول النبيلة) - y و z . ويسمى مثل هذا النقل نقلاً **شبه باليستي** *Quasi-ballistic*. إذ غياب الحقل الكهربائي تحافظ الإلكترونات على طاقاتها في النظام شبه الباليستي.

بجمع المتراجحات التي تمت مناقشتها أعلاه مع المتراجحات من (2-6) إلى (4-6) يمكن أن نجد ثلاثة نظمٍ للنقل التقليدي من أجل الإلكترونات؛ في بعدٍ، وبعدين، وثلاثة أبعاد.

تأثير الأبعاد العرضانية على انتقال الإلكترونات:

إذا كان كل بعدٍ من البعدين العرضانيين $L_z \gg \lambda$ و $L_y \gg \lambda$ أكبر من طول موجة دوبروي ولكنهما من مرتبة أحد الأطوال التقليدية المميزة، فإن نظام النقل الإلكتروني يوصف بما يسمى **بتأثيرات البعد التقليدي العرضاني** *Transverse Classical Size Effects*.

في هذه الحالة، **تؤثر التصادمات مع حدود النبيلة** على النقل الإلكتروني فيها. فمثلاً، إذا كان بعد عرضاني واحد أو كلا البعدين العرضانيين من مرتبة المسار الحر الوسطي؛

$$L_z, L_y \sim l_e,$$

فإن **مقاومة** النبيلة **تتعلق** بخصائص الحدود الجانبية للنبيلة بشدة.

يجدر بالذكر أن خشونة الحدود تُزيد من المقاومة وتُسيطر عليها بشكل كامل إذا تحققت المتراجحة $L_z, L_y \ll l_e$.

إذا أصبحت الأبعاد العرضانية من رتبة أحد أطوال الانتثار (L_T و L_E)، فإننا نتعامل مع نوع آخر من تأثير البعد التقليدي، لاسيما تأثيرات البعد الانتثاري التقليدية؛ فمثلاً، إذا كان البعد L_z أو L_y من مرتبة طول استرخاء الطاقة l_E ، فإن حدود النبيطة تضمن قناة استرخاء طاقة إضافية. يُسيطر تأثير البعد الانتثاري هذا على الطاقة الوسطية للإلكترونات اللامتوازنة ويتحكم بها. وفي هذا السياق من المناسب أن نعرض تصنيفاً لنظم النقل الممكنة، كما يظهر في الجدول (1-6).

الجدول (1-6): تصنيف أنظمة النقل الإلكتروني

المسافة بين التماسات L_x تُقارن بطول الموجة الإلكترونية $L_x \leq \lambda$	النظام الكمومي
المسافة بين التماسات L_x أقل من طول مقدار التباين الطوري: $L_x \leq l_\phi$	النظام الميزوسكوبي
المسافة بين التماسات L_x تفوق طول مقدار التباين الطوري: $L_x > l_\phi$ → النظام البالستي التقليدي، $l_e \geq L_x$ → النظام شبه البالستي (الطاقة - مُصانة): $L_E \geq L_x \geq l_e, l_\phi$ تأثير الأبعاد العرضانية: → التأثير المرتبط بالمسار الحر الوسطي، $L_z, L_y \sim l_e$ → تأثير الانتثار، $L_x, L_y \sim l_E$	النظام التقليدي (النقل الإلكتروني الأحادي - الثنائي - والثلاثي البعد)

4-1-6 مقاييس الزمن والأنظمة الزمنية (أنظمة التردد):

Time Scales and Temporal (Frequency) Regimes

I. تُعيّن **مقاييس الزمن** التي تصف ظواهر النقل الإلكتروني **خصائص المواد والنبايط المتعلقة بالزمن والتردد**.

ثمة زمان رئيسان يُحددان مظهر سلوك النقل الإلكتروني، هما؛

- الزمن الفاصل بين حادثتي تبعثر متتاليتين أو **زمن الطيران الحر** (زمن التبعثر)

$$\tau_e$$

- والزمن الذي يصف **مدة حادثة التبعثر**، τ_s .

- تتحقق في الشروط العادية المتراحة $\tau_e \gg \tau_s$:

1. في الواقع، عادةً ما يُفترض أن حادثة التبعثر حادثة لحظية، أي إن $\tau_s \rightarrow 0$.

في هذه الحالة، يمكن تطبيق إما النظرية التقليدية وإما النظرية الكمومية من أجل توصيف السلوك الإلكتروني، تبعاً لمقاييس الطول.

2. ولكن إذا أمكن مقارنة τ_e مع τ_s (أي إذا كان τ_e من مرتبة τ_s أو أقل منه)،

وهذا ما يمكن حدوثه في شروط **تبعثر الإلكترونات اللامتوازنة** بشكلٍ شديدٍ للغاية،

فإنه لا بد من وصف السلوك الإلكتروني كمومياً **بصرف النظر عن حجم** الجلمة.

II. تُعدُّ **الأزمنة المميزة** وعلاقتها بأبعاد النبيطة مهمةً للغاية في أنظمة النقل التقليدي.

فهي تُحدد النظم الزمنية والترددية لعمل النبيطة؛

■ فمثلاً، يُعيّن **زمن العبور عبور الإلكترونات**، $t_{tr} = L_x / v$ ، المدة التي تستغرقها

إشارة لتعبر **النبيطة** (حيث v السرعة الإلكترونية).

→ إذن يُعيّن **زمن العبور**، t_{tr} **السرعة الحدية** Ultimate Speed من أجل

النبيطة المدروسة:

→ **ليس بمقدور النبيلة العمل** بفعالية في مجال زمني **أقل** من t_{tr} أو بترددات أكبر من t_{tr}^{-1} . وهذا ما يُفسّر ميل الإلكترونيات إلى تصغير أبعاد النبيلة.

إن الأزمنة المتعلقة بالأبعاد العرضانية، $t_b = L_{z,y}/v$ (الموافقة لجوار أنظمة النقل بالطريقة الباليستية)، أو $t_D = (L_{z,y})^2 / D$ (من أجل **تأثيرات البعد الانتشاري**)، تُحدد صفات النقل الإلكتروني عند ترددات من مرتبة t_b^{-1} أو t_D^{-1} .

1. نعلم من ميكانيك الكم، أنه إذا كانت **الحقل الخارجي مستقل عن الزمن DC-Field**، فإن الإلكترونات تكون في **حالات مستقرة Stationary States**.

في هذه الحالة، وبصرف النظر عن التابعية-المكانية المعقدة الممكنة للتابع الموجي، فإن **التطور الزمني لحالة مستقرة يتعيّن** دوماً بعامل أسّي $\exp[-i(E/\hbar)t]$.

2. وإذا طُبّق **حقل خارجي متغيّر AC-Field** بتواتر زاوي ω على جملة إلكترونية مستقرة، **فيمكن وصف استجابتها** بأحد الأنظمة الثلاثة الآتية المختلفة تبعاً لتردد الحقل الخارجي:

أولاً- الترددات العالية جداً (الكمومية) Ultra-High (Quantum) Frequencies

1. إذا كانت $\hbar\omega$ من مرتبة الحالة الطاقية الإلكترونية المستقرة المميزة، E ، فإن طبيعة الاستجابة الإلكترونية ستكون **مكّمة**:

→ فالانتقالات المسموحة بين الحالات هي تلك التي تحقق المساواة $\Delta E = \hbar\omega$ فقط.

→ إذا كانت الحالة E مكّمة، فإن **التفاعل** يكون ممكناً عند ترددات **التجاوب** فقط. ولدى تغيّر أبعاد النبيلة يمكن أن يتغير الطيف الطاقوي، ومن ثمّ تتغير الخصائص الترددية في مجال واسع.

→ تؤدي الأزمنة الحركية؛ τ_e (زمن الطيران الحر)، و τ_E (زمن التبعر

اللامرن)، الخ إلى تعرّض هذه التجاوبات Resonances.

→ وإذا فاق هذا التوسع الفواصل الطاقية بين المستويات المكمّاة، فإن

السلوك الكمومي المتقطع يتغير إلى سلوك الميكانيك التقليدي شبه-

المستمر.

2. أمّا إذا كان $\Delta E \ll \hbar\omega$ ، فإن الاستجابة الإلكترونية لحقلٍ متناوبٍ تكون ذات

طبيعة تقليدية؛

→ فمن المنظور التقليدي سيبب الحقل الخارجي المتناوب تسارعاً وتباطؤاً

إلكترونياً دورياً.

→ غير أن التبعرّ يقطع هذه التسارعات والتباطؤات (يسحقها). وتبعاً لعدد

حوادث التبعرّ التي تجري خلال دور واحد يمكننا التمييز بين نظامين

مختلفين للسلوك الإلكتروني.

ثانياً- الترددات العالية (التقليدية) High (Classical) Frequencies

إذا تحققت المتراحة $1 \gg \omega\tau_e$ ، فإن الحركة الإلكترونية لن تتبعرّ خلال دور واحد للحقل

الخارجي بالمبعرّات. وتبعاً للميكانيك التقليدي يهتز **الزخم** الإلكتروني **بطورٍ مخالفٍ** لطور

الحقل المطبّق (لأن الحركة الإلكترونية لا تستطيع مواكبة اهتزازات الحقل المطبّق السريعة).

ثالثاً- الترددات المنخفضة Low Frequencies

إذا كان $1 \ll \omega\tau_e$ ، فإن الإلكترون يتعرّض للعديد من حوادث التبعرّ خلال دور واحد

للحقل الخارجي. والتبعرّ المتعدد خلال الدور الواحد يجعل الإلكترون في حالة شبه مستقرّة

بحيث يستطيع مواكبة اهتزازات الحقل الخارجي؛ بتعبير آخر، يهتز **الزخم** الإلكتروني **بطورٍ**

مطابقٍ لطور الحقل.

نستنتج في ختام هذه الفقرة، أنه توجد أنظمة نقل إلكتروني مختلفة تبعاً لأبعاد النبيطة، ودرجة الحرارة، وشروط أخرى؛ إذ كل نظام من هذه الأنظمة يعرض بوضوح خصائص مميزة ويستوجب كل منها توصيفاً فيزيائياً متلائماً مع الشروط ذات الصلة.

3-6 إحصاء الإلكترونات في الأجسام الصلبة والتراكيب النانوية:

Statistics of the Electron in Solids and Nanostructure

من أجل التحليل اللاحق للتراكيب النانوية لا بد من عرض موجزٍ للخصائص الأساسية للجمل المتعددة الإلكترونات؛ في الواقع، تتألف أي مادة نصف ناقلة من عدد كبير من **الإلكترونات** أي أنها فعلياً جملة متعددة الإلكترونات *Many-Electron System*، ومن أجل جملة كهذه، ثمة سؤال أساسي يطرح نفسه حول كيفية توزع الجسيمات على الحالات الطاقية المختلفة التي تصف هذه الجسيمات.

→ فمثلاً، إذا كانت **الجسيمات حرة** الحركة، فيمكننا التركيز على المعلومات المتعلقة **بتوزعها على الشُرعات**؛

→ وإذا كانت حركة الجسيمات **مكّمة**، فإن معرفة توزعها على مستويات الطاقة يكون ضرورياً، وهكذا دواليك؛

→ وبمعرفة مثل هذه التوزعات نستطيع إيجاد كل الصفات المميزة المتوسطة للجمل المتعددة الجسيمات.

إن القواعد والمبادئ التي تبعاً لها تسكن الجسيمات الحالات الطاقية للجمل المتعددة الجسيمات **تكوّن** ما يسمى بالإحصاء الفيزيائي *Physical Statistics*: إذن، بهدف **وصف** **إسكان الحالات بالجسيمات**، نستطيع استعمال تابع توزعٍ ما للجسيمات:

■ في حالة التوازن، **يُعيّن** التوزع على المستويات الطاقية **خصائص** الجمل المتعددة الجسيمات بشكل كامل؛ إذ يأخذ تابع التوزع **معنى احتمال** إيجاد الجسيمات بطاقة معينة E ؛

→ ليكن E_i المستوى الطاقى لجسيماتٍ في جملة متعددة- الجسيمات حيث **يُرَقّم الدليل i** المستويات الطاقية. **وعندها**، يمكن عدّ تابع التوزع **تابعاً**

لطاقته، $F(E_i)$. من الواضح أن:

$$\sum_l F(E_l) = N, \quad (13-6)$$

حيث N العدد الكلي للجسيمات.

إذن، المبادئ الإحصائية في الفيزياء التقليدية **والفيزياء الكمومية** مختلفة؛

فالفيزياء الكمومية تواكب الصفات الإحصائية غير المتوفرة في التوصيف التقليدي، وهذه الصفات مرتبطة بحقيقة أن الجسيمات الأولية هنا، بما فيها الإلكترونات، متطابقة ومن غير الممكن، من حيث المبدأ، تحديد إحداثياتها **وتعقب إلكترون بعينه دون سواه**. فضلاً عن أن ثمة "صفة ذاتية" للجسيم، هي السبين Spin، تؤدي دوراً غاية في الأهمية في فيزياء الجسيمات المتعددة.

إحصاء فيرمي للإلكترونات Fermi Statistics of Electrons:

■ **إذن، سبين الجسيمة** يؤدي دوراً حاسماً في الإحصاء الكمومي وهو **درجة حرية إضافية** "داخلية":

→ في الواقع، السبين كمية كمومية صرفة ويختلف جوهرياً عن قرينه التقليدي.

فالخاصية الكمومية الأساسية للسبين هي كمية من دون أبعاد تسمى **العدد السبيني Spin Number** ويرمز لها بالرمز s .

→ وتم الإقرار تجريبياً أن للإلكترون عدداً سبينيًا يساوي النصف $\frac{1}{2}$ ؛ فإذا ثبتنا محوراً في الفراغ، فإن مسقط سبين الإلكترون على هذا المحور يمكن أن يكون إما $+\frac{1}{2}$ وإما $-\frac{1}{2}$: فهو **نصف عدد صحيح**.

→ ويتطلب التوصيف الكامل لحالة إلكترونية ما مجموعة أعداد كمومية: ثلاثة منها توافق حركة الجسيمة في الفراغ؛ كأن تكون $l = \{l_1, l_2, l_3\}$ ، والرابع يوافق سبيناً s .

→ وتبعاً للمناقشة التقليدية **يوافق هذا العدد الكمومي الرابع** تحلاً ثنائياً Tow-

Fold Degeneracy **لكل مستوى** طاقة.

→ في الحقيقة، تخضع الجسيمات التي سببناها تساوي أنصاف أعداد صحيحة

لمبدأ الاستبعاد لباولي Pauli Exclusion الذي يُقرأ بالشكل الآتي:

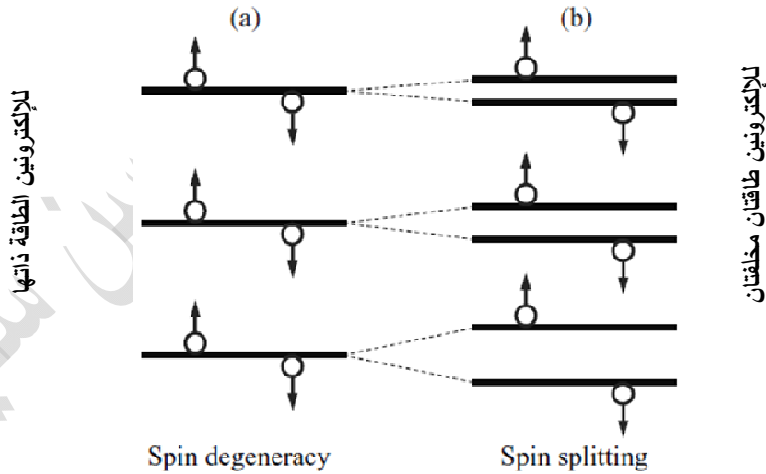
فأي حالة كمومية، $\{l, s\}$ ، يمكن أن يسكنها جسيم وحيد فقط.

→ بتعبير آخر، لا يمكن لإلكترونين في جملة أن يتواجدا بأن معاً في الحالة الكمومية ذاتها.

→ أو يمكن القول أنه بمقدور إلكترونين أن يكونا في الحالة الطاقية ذاتها إذا اختلف عددهما الكموميان السببانيان (أي لدينا ما يسمى الحالة المتحللة *Degenerate State*)؛

→ فإذا كان عدد كمومي سببيني مساوياً $+\frac{1}{2}$ ، فإن العدد الآخر يجب أن يساوي $-\frac{1}{2}$.

→ يُزال التحلل إذا توافر تآثر Interaction بين السبين الإلكتروني والحركة الانسحابية (المدارية) الإلكترونية يُعرف بالتآثر (السبين - المداري) *Spin-Orbital*.



الشكل (3-6): يوضح إنشغال سويات طاقةية بالإلكترونات؛ (a) مستويات متحللة سببياً و (b) مستويات غير متحللة (مستويات الانشطار السببيني).

→ وفي هذه الحالة يؤثر السبين الإلكتروني على الخصائص الفراغية الإلكترونية وعندها

تمتلك الإلكترونات ذات السبين $+\frac{1}{2}$ والسبين $-\frac{1}{2}$ طاقات مختلفة.

الشكل (3-6) يوضح الإسكانات الممكنة للمستويات الطاقية بالإلكترونات من أجل حالتين؛ مستويات طاقة متحللة ومستويات طاقة لامتحللة.

من الواضح، أن مبدأ استبعاد باولي يؤدي إلى إحصاء جديد - غير تقليدي،

للإلكترونات. يسمى مثل هذا الإحصاء **إحصاء فيرمي** *Fermi Statistics*.

في شروط التوازن يوصف إسكان المستويات الطاقية بتابع توزع فيرمي:

$$F_F(E_{l,s}) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E_{l,s} - E_F}{k_B T}}} \quad (18-6)$$

حيث T درجة حرارة الجملة،

و $(E_{l,s})$ طاقة الحالة الكمومية الموصوفة بمجموعة أعداد كمومية؛ l و s ، و بما يسمى

بطاقة (مستوى) فيرمي، E_F .

→ يجدر بالذكر أن طاقة فيرمي يمكن أن ترتبط بالعدد الكلي للإلكترونات من خلال

شرط التنظيم، المعادلة (6-13). إذا أخذنا بالحسبان المجموع على السبين نحصل

على المساواة

$$\sum_{l,s} F_F(E_{l,s}) = N, \quad (19-6)$$

التي تُعطي $E_F = E_F(N, T)$.

يمكن أن نرى من المعادلة (6-18)، تبعاً لمبدأ الاستبعاد، أن احتمال إسكان أي حالة طاقية

$\{l, s\}$ ، معرّفة بالمعادلة (6-18)، أقل من الواحد أو يساويه.

→ يتحول التابع F_F في حدود درجات الحرارة المنخفضة، $T \rightarrow 0$ ، إلى تابع الخطوة

:Step

$$F_F(E) = \begin{cases} 1, & E_F > E, \\ 0, & E_F < E, \end{cases} \quad (22-6)$$

أي أن:

■ $F_F(E) = 1$ من أجل المستويات الطاقية الواقعة تحت طاقة فيرمي E_F ، طالما أن كل المستويات ذات الطاقات $E < E_F$ مشغولة؛

■ و $F_F(E) = 0$ من أجل الطاقات الواقعة فوق E_F طالما أن هذه المستويات فارغة.

■ إذن، ضمن حدود درجة الحرارة المنخفضة هذه، تُعزى الجملة الإلكترونية أحياناً إلى

ما يسمى **بالغاز الإلكتروني الشديد التحلل** *Highly Degenerate Electron Gas*.

والآن بمقدورنا **تطبيق إحصاء فيرمي على الإلكترونات في عصابة الناقلية**.

أولاً- ليكن n تركيز الإلكترونات الحجمي في عصابة ناقلية تتصف بتبديدٍ طاقي $E(\vec{k})$. نقبل

هنا أن الطيف الطاقي مستقل عن السبين. ولهذا السبب، فإن مجموعة الأعداد الكمومية، l ،

مطابقة لمجموعة المتجهات- الموجية \vec{k} .

وتبعاً لتوزع فيرمي فإن **احتمال** إيجاد إلكترون يمتلك المتجه الموجي \vec{k} **يساوي** إلى

$$F_F(E(\vec{k})) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E(\vec{k}) - E_F}{k_B T}}}, \quad (23-6)$$

حيث يظهر العامل 2 من التحلل السبيني Spin Degeneracy.

يرتبط التركيز الإلكتروني n وطاقة فيرمي E_F بالمعادلة الآتية:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{2}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{1 + e^{(E(\vec{k}) - E_F)/(k_B T)}}, \quad (24-6)$$

حيث V حجم البلورة المدروسة.

يمكن تحويل المجموع في العلاقة الأخيرة إلى تكامل؛

في الواقع، تبعاً للتحليل المعطى في **ميكانيك الكم والمعادلة (10-4)** التي توصلنا إليها في

مقرري علم النانو وتطبيقاته وفيزياء الحالة الصلبة (2) الآتية:

$$\vec{k} \cdot \vec{a}_i N_i = 2\pi n_i, \quad n_i = 1, 2, 3, \dots, N_i$$

يأخذ المتجه الموجي للإلكترون القيم الآتية:

$$k_x L_x = 2\pi l_1$$

$$k_y L_y = 2\pi l_2$$

$$k_z L_z = 2\pi l_3$$

حيث l_1 و l_2 و l_3 أعداد صحيحة.

لقد أدخلنا في العلاقات الأخيرة أبعاد البلورة L_x و L_y و L_z . **تصحيح**
ترتبط الأبعاد البلورية L_i بالمتجهات الأساسية للشبكة البلورة a_i وبعدها الخلايا الأولية N_i ؛
بعلاقات من الشكل:

$$L_x = a_x N_x \quad \text{و} \quad L_y = a_y N_y \quad \text{و} \quad L_z = a_z N_z$$

ولهذا السبب، يكافئ الجمع على \vec{k} الجمع على l_i . ويمكن حساب العملية الأخيرة بشكل تقريبي من خلال التكامل:

$$\sum_{l_1, l_2, l_3, \dots} (\dots) \approx \iiint dl_1 dl_2 dl_3 (\dots)$$

وبما أن تابع التوزع يتعلق بالتبدد الطاقى $E(\vec{k})$ فمن المناسب التعبير عن التكامل الأخير بدلالة التكامل على \vec{k} . إذ يمكننا في هذا السياق استعمال العلاقات الآتية:

$$\Delta l_1 = \frac{l_x}{2\pi} \cdot \Delta k_x, \quad \Delta l_2 = \frac{l_y}{2\pi} \cdot \Delta k_y, \quad \Delta l_3 = \frac{l_z}{2\pi} \cdot \Delta k_z.$$

وطالما أن $L_x \times L_y \times L_z = V$ ، فيمكننا كتابة العلاقة النهائية الآتية:

$$\sum_{\vec{k}} (\dots) = \frac{l_x \cdot l_y \cdot l_z}{2\pi \cdot 2\pi \cdot 2\pi} \iiint dk_x dk_y dk_z (\dots).$$

ومن ثمَّ

$$\sum_{\vec{k}} (\dots) = \frac{V}{(2\pi)^3} \iiint dk_x dk_y dk_z (\dots). \quad (25-6)$$

يُعدُّ هذا الإجراء، المتمثِّل في استبدال الجمع على \vec{k} المتقطع بالتكامل على \vec{k} المستمر، مفيداً من أجل حساب كميات وسطية.

وبمثابة مثال، لنحسب طاقة فيرمي E_F لجملة إلكترونية واقعة في درجات حرارة منخفضة ($T \rightarrow 0$) على فرض أن الطيف الطاقي للإلكترونات **متماثل المناحي** أي إنه متعلق بالطويلة $|\vec{k}| = k$ فقط:

$$E(\vec{k}) = E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*},$$

حيث m^* الكتلة الفعالة للإلكترون.

- ليكن n التركيز الإلكتروني؛ فتبعاً لإحصاء فيرمي، ستشغل الإلكترونات كل الحالات الطاقية الواقعة تحت طاقة فيرمي. وبما أن $E(k)$ تابع متزايد بالنسبة للعدد الموجي k ، فينتج، عندما $T \rightarrow 0$ ، أن **كل الحالات** التي تحقق الشرط $k \leq k_F$ **تكون مسكونةً بالإلكترونات**،

→ حيث تسمى الكمية $k_F = k_F$ **بمتجه فيرمي - الموجي Fermi Wave-vector** المعرّف بالمساواة $E(k_F) = E_F$ ؛

- **وعند حساب التركيز n** من خلال المعادلة (24-6) يجب أن نُجري الجمع (التكامل) **على كل الحالات المشغولة**، أي على الحالات $k \leq k_F$. فمن أجل **هذه** الحالات - k ، لدينا $F_F = 1$ ومن ثم:

$$n = \frac{2}{V} \sum_{k \leq k_F} 1 = \frac{2}{V} \frac{V}{(2\pi)^3} \iiint_{|\vec{k}| \leq k_F} d^3k.$$

تُعطي قيمة التكامل في المعادلة الأخيرة حجم كرة نصف قطرها k_F ، أي $\frac{4}{3} \pi k_F^3$.

وعندها نستطيع الحصول على علاقة بين متجه فيرمي الموجي k_F والتركيز الإلكتروني n :

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \quad \text{أو} \quad n = \frac{2}{2 \times 4\pi^3} \frac{4}{3} \pi k_F^3 = \frac{k_F^3}{3\pi^2}$$

وأخيراً نجد أن طاقة فيرمي للإلكترونات المتحللة في بلورة حجمية تساوي:

$$E_F = E|_{k=k_F} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3}}{2m^*};$$

ومن ثمَّ نحصل على العلاقة الآتية التي تربط بين **طاقة فيرمي والتركيز الإلكتروني المتحلل في درجات الحرارة المنخفضة جداً:**

$$E_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m^*}, \quad \text{at } T \rightarrow 0. \quad (26-6)$$

في هذه الحالة، تزداد طاقة فيرمي E_F بازدياد التركيز الإلكتروني ولكن ليس بشكلٍ خطي، بل وفق قانون القوة $\frac{2}{3}$. وبما أن تابع فيرمي يحوي عاملاً أسياً، فإن حد درجات الحرارة المنخفضة يوافق الشرط $E_F \gg k_B T$.

• يبقى الغاز الإلكتروني في الفلزات وأنصاف النواقل المطعّمة بشدة متحللاً حتى درجة حرارة الغرفة.

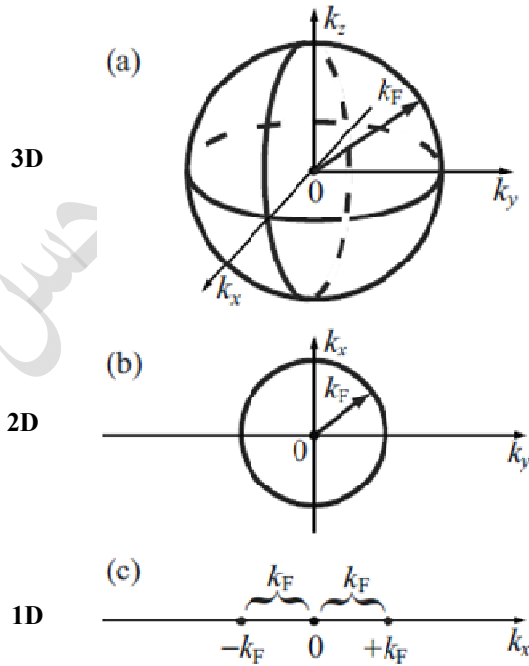
→ فمثلاً، في حالة بلورة **زرنكسيد الغاليوم GaAs** حيث تبلغ الكتلة الإلكترونية الفعّالة $m^* = 0.067 m_0$ (m_0 كتلة الإلكترون الحر)، وتركيز الإلكترونات $n = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ نجد أن $k_F = 1.43 \times 10^6 \text{ cm}^{-1}$ و $E_F = 11.6 \text{ meV}$ ؛ توافق هذه القيمة للطاقة لدرجة حرارة تساوي 135 K.

→ ولهذا السبب، يمكن في درجات الحرارة الأقل من الدرجة $T < 135 \text{ K}$ دراسة تركيز الغاز الإلكتروني $n = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ في GaAs؛ **تركيز متحلل**، ومن الممكن استعمال هذه التقديرات من أجل طاقة فيرمي E_F ومتجه فيرمي الموجي k_F أيضاً.

• تُعدُّ جملة الغاز الإلكتروني المتحلل جملةً فيزيائيةً رائعةً ومهمةً جداً؛ إذ تُسهّل هذه الحالة **المحدودة** فهم العديد من الظواهر المعقدة بطريقة بسيطة.

في الواقع، وكما أكدنا سابقاً، إن كل الحالات الواقعة تحت E_F ، في غاز إلكتروني متحلل، تكون مسكونة؛

- لنفترض الآن أن اضطراباً خارجياً صغيراً طُبِقَ على هكذا جملة متعددة الإلكترونات:
 - يُسببُ الاضطراب إعادة توزع الإلكترونات بين الحالات الطاقية، ولكن كل الحالات الواقعة تحت مستوى فيرمي ممتلئة تماماً، مما يعني أن إعادة التوزع غير ممكنة، وعوضاً عن ذلك، يمكن لتلك الإلكترونات الواقعة في مستوى فيرمي فقط، أي التي تملك طاقةً تساوي E_F تماماً، أن تتأثر بالاضطراب؛
 - وهذا يؤدي إلى أن جزءاً صغيراً فقط من الإلكترونات يمكن أن يُسهم في استجابة البلورة للاضطراب.
 - إذ يمكن القول إنَّ هذه الإلكترونات "النشطة" تقع على ما يسمى سطح فيرمي



الشكل (5-6): سطوح فيرمي من أجل ثلاثة غازات إلكترونية

Fermi Surface في الفراغ- \vec{k} وأن **أبعاد Size** هذا السطح هو الذي يُحدد

الخصائص الأساسية للغاز الإلكتروني المتحلل؛

→ فسطح فيرمي من أجل البلورات شبه الحجمية ذوات الطيف الطاقي البسيط المدروس أعلاه هو **مجرد كرة** نصف قطرها k_F .

→ يُمَثَّل الشكل (5a-6) سطح فيرمي لغاز إلكتروني 3D.

→ ويمكن أن نبيّن بسهولة، باستخدام **المعادلة** $\vec{v} = dE/d\vec{p}$ ، أن إلكترونات واقعاً على سطح فيرمي يمتلك السرعة $v_F = \hbar k_F / m^*$.

ثانياً- يمكننا دراسة جملة إلكترونية منخفضة- البعد بصورة مشابهة تماماً لما سبق؛ إذ

من الممكن باستعمال تراكيب متغايرة Heterostructure، تصنيع **بئر كمون** تحصر إلكترونات، **من عصابة الناقلية**، في طبقاتٍ ضيقة بحيث تصبح الحركة الإلكترونية عبر هذه الطبقات **مكّمة**. وهذا ما يجعل الطاقات الإلكترونية على هيئة عصابات جزئية منخفضة-

البعد تُعطى **بالمعادلة** (49-3)؛ $E_{n, \vec{k}_{||}} = \varepsilon_n + \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2)$ ، من أجل ما يسمى **خُفَر**

كمومية. إذن:

$$E_{l_3}(\vec{k}_{||}) = \varepsilon_{l_3} + \frac{\hbar^2 k_{||}^2}{2m^*}, \quad (27-6)$$

حيث $(l_3 = 1, 2, \dots)$ و $k_{||}$ (المتجه-2D) يُعَيّنان الحركة الإلكترونية في مستوي الطبقة.

→ **يمكن** استخدام تابع توزع فيرمي الذي يأخذ شكل المعادلة (18-6) **لحساب** التركيز

الإلكتروني-2D (**التركيز الطبقي** Sheet Concentration) وفق العلاقة الآتية:

$$n_{2D} = n \times d = \frac{2}{S} \sum_{l_3, \vec{k}_{||}} \frac{1}{1 + e^{\frac{E_{l_3}(\vec{k}_{||}) - E_F}{k_B T}}}, \quad (28-6)$$

يدخل في هذه المعادلة **التركيز السطحي** للإلكترونات n_{2D} ،

وسماكة طبقة الحصر d ومساحتها S .

من الواضح هنا، أن الحجم يساوي $V = d \times S$

تُحدّد المعادلة (28-6) العلاقة بين التركيز السطحي للإلكترونات n_{2D} وطاقة فيرمي k_F .

■ يمكن وبشكل واضح حساب **التركيز السطحي للإلكترونات** في إطار الغاز الإلكتروني المتحلل:

→ لنفرض مثلاً، أن درجة الحرارة منخفضة وأن العصابة الجزئية الأخفض فقط

مشغولة بالإلكترونات؛ في هذه الحالة، **يجب أن نحافظ** (في المجموع على l_3 في

المعادلة الأخيرة (28-6)) **على حد واحد** يوافق $l_3 = 1$ فقط:

$$n_{2D} = n \times d = \frac{2}{S} \sum_{k_{||}} \frac{1}{1 + e^{\frac{E_1(\bar{k}_{||}) - E_F}{k_B T}}}, \quad (29-6)$$

يمكن تبسيط حساب الطرف الأيمن من هذه المعادلة باستبدال المجموع على $\bar{k}_{||}$ بالتكامل، بشكل مشابه للمعادلة (25-6)، فنجد:

$$\sum_{k_{||}} (\dots) = \frac{S}{(2\pi)^2} \iint dk_x dk_y (\dots), \quad (30-6)$$

حيث k_x و k_y مركبتا المتجه-2D، $\bar{k}_{||}$.

→ تُعطي قيمة التكامل في المعادلة الأخيرة مساحة قرص نصف قطره k_F ، أي πk_F^2 .

■ ويمكن في حدود درجة الحرارة المنخفضة $T \rightarrow 0$ حساب التركيز السطحي n_{2D}

من خلال تعيين متجه فيرمي الموجي $\bar{k}_{||,F}$ بوساطة العلاقة:

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_{||,F}^2}{2m^*}. \quad (31-6)$$

يُعدُّ "سطح" فيرمي من أجل حاملات شحنة ببعدين "قرصاً" نصف قطره $k_{||,F}$ في الفراغ $k_{||}$ ، كما يوضح الشكل (6-5b). ونجد من تكامل المعادلة (6-30) على "القرص" على العلاقتين الآتيتين، وذلك عندما $T \rightarrow 0$:

$$n_{2D} = \frac{2}{S} \sum_{\vec{k}_{||}} 1 = \frac{2}{S} \frac{S}{(2\pi)^2} \iint_{|\vec{k}_{||} \leq k_{F}} d^2 k = \frac{2}{S} \frac{S}{4\pi^2} (\pi k_{||,F}^2) = \frac{1}{2\pi} k_{||,F}^2 = \frac{2m^* E_F}{2\pi \hbar^2}$$

ومن ثمَّ

$$E_F = \frac{\hbar^2 \left(\sqrt{2\pi n_{2D}} \right)^2}{2m^*} = \frac{\pi \hbar^2}{m^*} n_{2D} \quad \text{و} \quad k_{||,F} = \sqrt{2\pi n_{2D}} \quad (32-6)$$

هذا يعني أن **طاقة فيرمي**، k_F ، **تزداد مع التركيز السطحي الإلكتروني** n_{2D} **خطياً**.

ثالثاً- يُعطى الطيف الطاقي من أجل بنية نانوية تنحصر فيها الحركة الإلكترونية ببعدين وحرّة في البعد الثالث، أي من أجل **سلك كمومي**، بالعلاقة الآتية:

$$E_{l_2, l_3}(k_x) = \varepsilon_{l_2, l_3} + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*}, \quad (33-6)$$

حيث أفترض أن الاتجاه x هو الاتجاه الوحيد للحركة الحرة. وبتطبيق إجراء مشابه للإجراء الذي أجريناه أعلاه يمكننا أن نرى أنه من أجل درجات الحرارة المنخفضة **ينكمش ويتقلص** Shrink "سطح" فيرمي **إلى نقطتين** في الفراغ- k أحادي البعد:

$$k_x = \pm k_F$$

ثمَّ إنّ التركيز الخطّي الإلكتروني الذي يمكن تعيينه بالعلاقة $n_{1D} = N/L$ ، حيث N العدد الكلي للإلكترونات في السلك و L طوله، يساوي:

$$n_{1D} = \frac{2}{L} \sum_{k_F} 1 = \frac{2}{L} \frac{L}{2\pi} \int_{|\vec{k}_{||} \leq k_F} dk = \frac{2}{L} \frac{L}{2\pi} (2k_F) = \frac{2}{\pi} k_F$$

ومن ثمَّ نحصل على العلاقة الآتية التي تربط بين **التركيز الخطّي الإلكتروني** وطويلة متجه فيرمي الموافق:

$$k_F = \frac{1}{2} \pi n_{1D}$$

توضح الأشكال (5a-6) و (5b-6) و (5c-6) التحوّل المتتالي لسطح فيرمي وتطوره مع

تخفيض الأبعاد؛ حيث نحصل على طاقة فيرمي للإلكترونات ببعد واحد من أجل $T \rightarrow 0$

بالشكل الآتي:

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2 \left(\frac{1}{2} \pi n_{1D}\right)^2}{2m^*} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m^*} n_{1D}^2. \quad (34-6)$$

يمكننا أن نستنتج من مقارنة طاقات فيرمي الحاصلة من أجل أبعاد مختلفة للغاز الإلكتروني

أن تخفيض أبعاده يؤدي إلى زيادة E_F بشكل متسارع عند زيادة تركيز الإلكترونات من

أجل جمل منخفضة- البعد.

4-6 كثافة الحالات الطاقية من أجل الإلكترونات في التراكيب النانوية:

The Density of States of Electrons in Nanostructures

لإتمام تحليل إسكان المستويات الطاقية بالإلكترونات في التراكيب النانوية لا بد من دراسة كمية فيزيائية أخرى تصف الإسكان الإلكتروني؛ تُعرف **بكثافة الحالات** *Density of States* (DOS). **يكمن سبب إدخال هذه الكمية في الآتي:**

- إنَّ الأطياف الطاقية الإلكترونية في الهياكل النانوية الحاوية على إلكترونات ناقليّة معقدة وتتألف من سلسلة من **العصابات الجزئية** Sub-bands؛
- إذ تُعيّن **الفواصل الطاقية** بين **العصابات الجزئية** بشكل كمون الحصر في حين يكون الطيف ضمن كل عصابة مستمراً،
- فضلاً عن أن هذه الأطياف المستمرة تكون **متداخلة**.

ولتوصيف هذه الأطياف المعقدة من المناسب أن نُدخل **تابعاً طيفياً** يُعرف باسم DOS ونرمز له بالرمز $\rho(E)$ ؛ إذ يعطي هذا التابع عدد الحالات الكمومية $dN(E)$ في مجالٍ صغيرٍ يقع بجوار طاقة ما E :

$$\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE} \Rightarrow dN(E) = \rho(E) dE. \quad (35-6)$$

إذا رمّزنا **مجموعة** الأعداد الكمومية الموافقة لحالة كمومية محددة **بالرمز** v ، فإن العلاقة العامة لكثافة الحالات تُعرف بالمساواة

$$\rho(E) = \sum_v \delta(E - E_v), \quad (36-6)$$

حيث E_v الطاقة ذات الحالة الكمومية v .

ومن المفيد في هذا السياق إدخال تابع δ ديراك الشهير:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x \neq 0, \\ \infty, & \text{for } x \rightarrow 0, \end{cases} \quad (37-6)$$

علماً بأن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (38-6)$$

يُستعمل تابع δ -ديراك عند إجراء تكامل. والقاعدة الرئيسية لمثل هذا التكامل هي:

$$\int_a^b \delta(x - x_0) \Phi(x) dx = \Phi(x_0), \quad \text{if } a < x_0 < b, \quad (39-6)$$

حيث $\Phi(x)$ تابع اختياري موصوف جيداً.

■ **وكمثال بسيط حول حساب كثافة الحالات $\rho(E)$ ، سنحسب باستخدام التعريف المتمثل بالمعادلة (36-6)، هذه الكمية من أجل الإلكترونات المتوافرة في بلورة حجمية.**

الأعداد الكمومية من أجل حالة كهذه، كما رأينا سابقاً، هي $\{\bar{k}, s\}$. إذا فرضنا أن الطاقة

مستقلة عن السبين $E(\bar{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$ واستبدلنا الجمع بتكامل في المعادلة (25-6)،

$$\sum_{\bar{k}} (\dots) = \frac{V}{(2\pi)^3} \iiint dk_x dk_y dk_z (\dots)$$

نحصل على المعادلة الآتية:

$$\rho_{3D}(E) = \frac{2V}{(2\pi)^3} \iiint \delta(E - E(\bar{k})) d\bar{k}. \quad (40-6)$$

→ وبما أن الطاقة $E(\bar{k})$ ترتبط بطويلة \bar{k} ، فمن الممكن استعمال الإحداثيات الكروية؛

→ يُعطي التكامل على زاويتين القيمة 4π فيختزل التكامل الثلاثي إلى تكامل أحادي:

$$\rho_{3D}(E) = \frac{2V}{(2\pi)^3} \times 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(E - E(\bar{k})) k^2 d\bar{k}. \quad (41-6)$$

→ نستبدل الآن التكامل على k بالتكامل على الطاقة $E(\bar{k}) = \varepsilon$ ونأخذ بالحسبان أن

$$k^2 = (2m^* / \hbar^2) E(\bar{k}) = (2m^* / \hbar^2) \varepsilon \quad \text{و} \quad dk = \frac{1}{2} \sqrt{2m^* / \hbar^2} \varepsilon^{-1/2} d\varepsilon$$

فنحصل باستعمال المعادلة (39-6) على المعادلة الآتية:

$$\rho_{3D}(E) = \frac{2V}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty \delta(E - \varepsilon) (2m^* / \hbar^2) \varepsilon \frac{1}{2} \sqrt{2m^* / \hbar^2} \varepsilon^{-1/2} d\varepsilon ;$$

$$\rho_{3D}(E) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty \delta(E - \varepsilon) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}_{\sqrt{E} = \Phi(E)} = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \Phi(E). \quad (42-6)$$

ومن ثم:

$$\rho_{3D}(E) = \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{2E}. \quad (43-6)$$

يوضح الشكل (6a-6) كثافة الحالات هذه التي تم الحصول عليها من أجل إلكترونات-3D.

■ **ومن أجل الإلكترونات الموجودة في بئر كمومي (2D) يُعطى طيفه الطاقى**

بالمعادلة (6-27)، تشمل مجموعة الأعداد الكمومية عدداً كمومياً سبينياً، s ، وعدداً

كمومياً، l_3 ، يصف التكمية العرضانية Transverse للحالات الإلكترونية **ومتجهاً**

موجياً مستمراً ثنائي - البعد $\vec{k}_{||}$. ولهذا السبب، فإن $v = \{s, l_3, \vec{k}_{||}\}$.

يوجد **تحلل سبيني ثنائي** لكل حالة، $(s = \pm \frac{1}{2})$ ، ولذلك، فإن:

$$\rho_{2D}(E) = 2 \sum_{l_3, k_x, k_y} \delta \left(E - \varepsilon_{l_3} - \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)}{2m^*} \right). \quad (44-6)$$

ومن أجل حساب المجموع على k_x و k_y يمكننا تطبيق المعادلة (6-30) مع استبدال S

لتكون مساحة سطح البئر الكمومي؛ حيث $S = L_x \times L_y$ و L_y بعدا البئر الكمومي في

الاتجاهين x و y على الترتيب. وتُعطى حسابات التكاملات العلاقة الآتية:

$$\rho_{2D}(E) = \frac{S m^*}{\pi \hbar^2} \sum_{l_3} \int_0^\infty \delta(E - \varepsilon_{l_3} - \varepsilon) d\varepsilon = \frac{S m^*}{\pi \hbar^2} \sum_{l_3} \Theta(E - \varepsilon_{l_3}). \quad (45-6)$$

حيث $\Theta(x)$ تابع الدزجة لهيفيسايد Heaviside Step-Function:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } x > 0, \\ 0, & \text{for } x < 0. \end{cases} \quad (46-6)$$

يشيع كثيراً استخدام كثافة الحالات في وحدة المساحة $\rho_{2D}(E)/S$ وليس كثافة الحالات بهدف التخلص من أبعاد العينة؛

→ **يوافق كل حدٍ في المجموع الوارد في المعادلة (6-45) مساهمة عصابة جزئية واحدة**

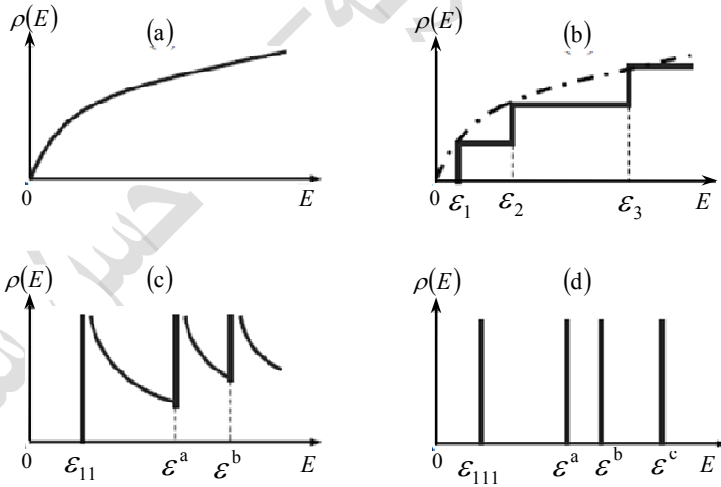
ثم إن مساهمات كل العصابات الجزئية واحدة ومستقلة عن الطاقة.

→ وبالنتيجة، **تُظهر كثافة الحالات للإلكترونات-2D تابعة طاقية لها شكل دَرَجٍ،**

→ **تتعلق كل دَرَجَةٍ فيها بحالة طاقية واحدة من الحالات ε_i ؛** وارتفاع كل دَرَجَةٍ في هذا

الدرج عامٌ **ويتعلق بالكتلة الفعّالة** الإلكترونية فقط.

يوضح الشكل (6b-6) **كثافة الحالات-2D**: إذ بمقارنة كثافات الحالات من أجل



الشكل (6-6): كثافة الحالات من أجل الإلكترونات في أنظمة مختلفة الأبعاد: (a) بلورة

حجمية، (b) حفرة كمون، (c) سلك كمومي، (d) نقطة كمومية. تُمثّل المقادير ε_1 و ε_{11} و ε_{111}

الحالات الأرضية في حفرة كمون و سلك كمومي ونقطة كمومية على الترتيب؛ ε_2 و ε_3

الحالات الطاقية الأعلى (المهيجة) في حفرة كمون و ε^a و ε^b و ε^c الحالات الأعلى في

سلك كمومي ونقطة كمومية.

الإلكترونات في بلّوراتٍ حجميةٍ في وحدة الحجم، وبئرٍ كموميةٍ في وحدة المساحة يمكننا أن نرى أن الفوارق بين الحالتين؛ ثنائية البعد-2D و ثلاثية البعد-3D تكون جليّةً في المناطق الطاقية للعصابات الجزئية الأخفض ويكون التابع الدّرَجِي من أجل قيم l_3 الكبيرة قريباً جداً من المنحني الحجمي $\rho_{3D}(E)$ ويُصبح مقارباً له Asymptotically.

وبشكلٍ مشابهٍ، يمكننا إيجاد كثافة الحالات لغازٍ إلكترونيٍّ أحادي البعد-1D يُعطى طيفه الطاقِي بالمعادلة (6-33)، $E_{l_2, l_3}(k_x) = \varepsilon_{l_2, l_3} + \hbar^2 k_x^2 / 2m^*$ ؛ وبنتيجة الحساب تكون من الشكل الآتي:

$$\rho_{1D}(E) = \sum_{l_2, l_3} \rho_{l_2, l_3}(E),$$

حيث:

$$\rho_{l_2, l_3}(E) = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2}} \frac{1}{\sqrt{E - \varepsilon_{l_2, l_3}}} \Theta(E - \varepsilon_{l_2, l_3}), \quad (47-6)$$

حيث L طول السلك.

يُظهر الشكل (6c-6) رسماً تخطيطياً $\rho_{1D}(E)$ من أجل إلكترونات-1D؛ حيث **تكمن الصفة**

المميزة لكثافة الحالات-1D في:

- **تباعدها بجوار** قاع كلٍ من العصابات الجزئية أحادية- البعد.
- ثم إنَّ كثافة الحالات الإلكترونية **تتناقص** حالما **تزداد الطاقة الحركية** للإلكترونات؛
- ويُعدُّ هذا السلوك مهماً جداً لكونه يؤدي إلى مفاعيل كهربائية وبصرية جديدة تمتاز بها الأسلاك الكمومية.

بمقدورنا الآن دراسة **حالة حديثة لكثافة الحالات من أجل إلكترونات صفرية البعد (0D)**،

أي من أجل إلكترونات تقع في **نقطٍ كموميةٍ Quantum Dots**؛ فتبعاً لتعريف المعادلة (6-36) تكون الأطياف الطاقية في حالة النقط أو الصناديق الكمومية متقطعةً، وبالتالي، فإن كثافة

الحالات ببساطة هي **مجموعة قمم** لها شكل التابع δ ، كما يوضح الشكل (6d-6). تكون القمم من أجل جملةٍ مثاليةٍ **ضيقة جداً** وارتفاعاتها لانهائية:

- في الواقع، إنَّ التآثرات (التفاعلات المتبادلة) بين الإلكترونات والشوائب، فضلاً عن التصادمات مع اهتزازات الشبكة البلورية **تؤدي إلى تعرّض المستويات المتقطعة**،
- وبنسبة ذلك، فإنَّ القمم الموافقة من أجل جمل فيزيائية قابلة للتحقق تمتلك مطالات وتعرّضات محدودة (وليست لانهائية)؛
- غير أنَّ النزعة الرئيسة المتمثلة في حِدَّة Sharpening تابعيات الكثافة الطيفية نتيجةً لتخفيض أبعاد الجملة المدروسة **هي مفعولٌ سائدٌ في درجات الحرارة المنخفضة** من أجل **التركيب المثالية** Perfect Structures تقريباً.

إنَّ **التغيرات الحادة** في كثافة الحالات الإلكترونية التي تحصل في بلورات محدودة الأبعاد (**بلّورات حاصرة للحاملات**) **تُظهر نفسها** في مختلف التعديلات الرئيسة التي تطرأ على الناقلية، والخصائص البصرية، الخ. في الحقيقة، وكما سنرى **لاحقاً**، فإنَّ هذه التغيرات التي تطرأ على كثافة الحالات تؤدي إلى ظواهر فيزيائية جديدة أيضاً.

5-6 النقل الإلكتروني في التراكيب النانوية Electron Transport in Nanostructure:

لقد أشرنا في الفقرة 2-6 إلى وجود أنظمة مميزة للحركة الإلكترونية في التراكيب النانوية. سندرس في هذه الفقرة بعض الأمثلة حول النقل الإلكتروني المتحرّض تحت تأثير انحياز كهربائي. نبدأ بأبسط نقل إلكتروني تقليدي - تبديدي يتحقق **عند المسافات الكبيرة بين التماسين العلوي والسفلي (الشكل 2-6)** تبعاً للمعادلتين (6-10) و (6-12)، **وذلك لدى تطبيق** حقول كهربائية ضعيفة. يمكن أن يحدث نظام النقل هذا في عينات حجمية، وبئر كمومية، وتراكيب الأسلاك الكمومية.

النقل التبددي التقليدي Classical Dissipative Transport:

تكون الإلكترونات في الجسم الصلب في حركة دائمة ولكنها عشوائية بسبب تبعثر عشوائي يحدث على كل من الشوائب، واهتزازات الشبكة البلورية، وخشونة السطح الفاصل، الخ؛ ومن ثم لا يوجد اتجاه مفضّل للحركة الإلكترونية؛ وعليه، يساوي التدفق الإلكتروني الإجمالي والتيار الكهربائي الصفر.

إذا طُبّق الآن حقل كهربائي، \vec{F} ، على الجسم الصلب، فإن قوة كهربائية، $-e\vec{F}$ ، تؤثر في كل إلكترون من الإلكترونات المتوقّرة فيه (نفرض هنا أن الشحنة الكهربائية تساوي $-e$).

على الرغم من أن السلوك العشوائي للحركة الإلكترونية يمكن أن يبقى، إلا أن انسياقاً إجماليّاً موجهاً للإلكترونات ينتج من القوة الكهربائية المطبقة على الجسم الصلب.

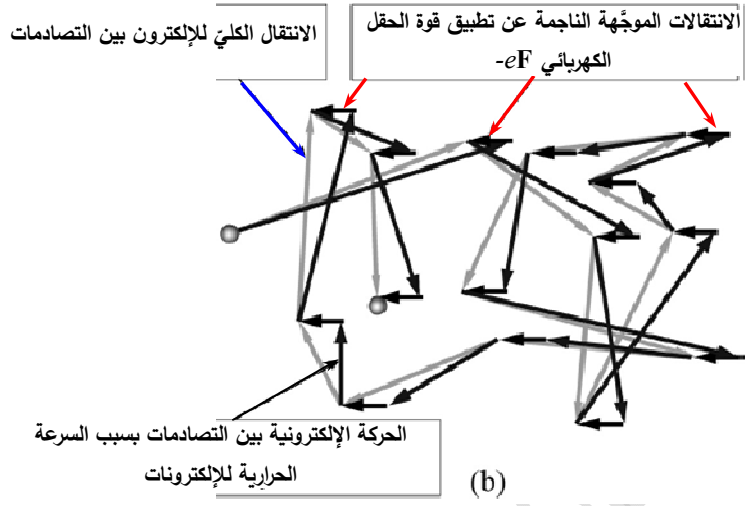
يوضح الشكل (6-7) حركة إلكترونية عشوائية من دون تطبيق حقل كهربائي وبوجوده: لوصف هذه الحركة يمكننا تطبيق معادلة نيوتن من أجل السرعة الوسطية للإلكترونات، \vec{v} . وبهدف الأخذ بالحسبان عمليات التبعثر التي تؤدي إلى فقد في المركبة الموجهة للسرعة، نُدخل حداً إضافياً يُعبر عن قوة الاحتكاك:

$$m^* \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m^*}{\tau_e} \vec{v} - e\vec{F}, \quad (48-6)$$

حيث يمكن تفسير τ_e على أنه **استرخاء الاندفاع الإلكتروني أو زمن الطيران الحر**. ومن الواضح، أن الحركة الإلكترونية الموصوفة بالمعادلة المذكورة أعلاه تبديدية بطبيعتها.

نحصل من أجل الحالة المستقرة على المعادلة الآتية:

$$\vec{v} = -\frac{e\tau_e}{m^*} \vec{F} = -\mu \vec{F}, \quad (49-6)$$



الشكل (7-6): حركة انتشارية عشوائية لإلكترون في حالة التوازن وعند تطبيق حقل كهربائي \vec{F} .

حيث أدخلنا الوسيط μ إلى هذه المعادلة الذي يسمى **الحركية الإلكترونية Electron Mobility** ووحدة قياسها هي $m^2 \cdot V^{-1} \cdot s^{-1}$ ؛ إنَّ الحركية الإلكترونية هي إحدى الصفات الأساسية المميزة للنقل الإلكتروني في حالة تطبيق حقول منخفضة القيمة.

يُظهر تعريف μ الآتي

$$\mu = \frac{e\tau_e}{m^*} \quad (50-6)$$

أنَّ الحركية الإلكترونية تكون أكبر من أجل مواد بكتلٍ فعالةٍ m^* صغيرةٍ وتبعثرٍ مسحوقٍ، أي من أجل قيمٍ كبيرةٍ لـ τ_e .

→ تعكس الإشارة السالبة في المعادلة (49-6) حقيقة أن الإلكترونات تنتقل في اتجاه معاكس لاتجاه الحقل الكهربائي، لأن شحناتها سالبة.

يمكننا لدى اكتساب الإلكترون سرعة (انسياق) وسطية، \vec{v} ، وتركيز إلكتروني، n ،

حساب كثافة التيار الكهربائي بالعلاقة الآتية:

$$\vec{J} = -e\vec{v}n = e\mu n\vec{F} = \sigma\vec{F}. \quad (51-6)$$

حيث يسمى المقدار

$$\sigma = e\mu n \quad (52-6)$$

الناقلية الكهربائية النوعية (الناقلية النوعية باختصار) *Specific Conductivity*، ويتعلق، كما سنرى، بكل من تركيز الإلكترونات n وحركيتها μ . وتُعرف النتيجة المعطاة بالمعادلة (51-6) بقانون أوم. إذا كانت الناقلية النوعية والأبعاد الهندسية لعينة معلومة، يمكننا حساب التيار الكهربائي الإجمالي بسهولة:

$$\bar{I} = \vec{J} \cdot S = \sigma S \vec{F}, \quad |\bar{I}| = \frac{\Phi_0}{R}, \quad (53-6)$$

حيث أدخلنا في هذه المعادلة المقطع العرضي للعينة S ، وهبوط الجهد بين طرفيها، $\Phi_0 = L_x \cdot F$ ، وطولها L_x . تساوي مقاومة العينة إلى:

$$R = \frac{L_x}{\sigma \cdot S}. \quad (54-6)$$

إن المعادلات (49-6)-(51-6) صالحة من أجل جملٍ فيزيائيةٍ أياً تكن أبعادها حيث يحدث النقل التبددي؛ إذ تشمل جماً ثلاثية البعد، وثنائية البعد، وأحادية البعد؛ وتُعدُّ الحركية الإلكترونية من أجلها جميعاً **صفة تمثيلية مميزة** Representative Characteristic **نظام النقل التقليدي**.

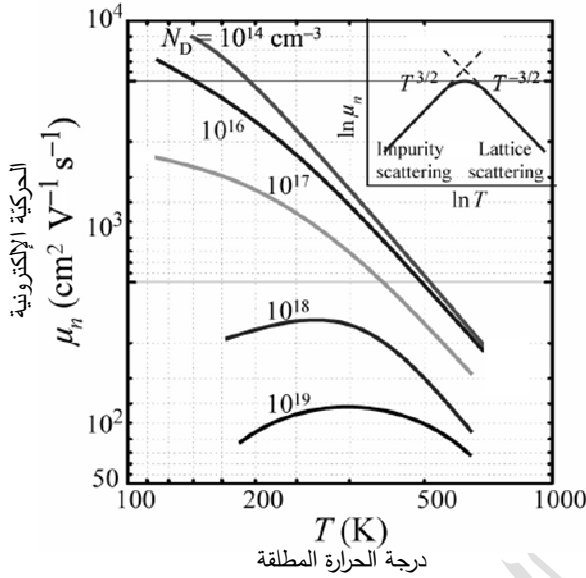
يجب أن نؤكد من خلال العودة إلى مناقشة الحركية أن قيمتها تتعلق بنوع المادة وآليات التبثر في هذه المادة؛ تشمل هذه الآليات في أنصاف النواقل عادةً على:

- الشوائب، والنواقص (العيوب النقطية والانخلاعات وغيرها)، واهتزازات الشبكة البلورية.

إذا أمكن تقادي آليتي التبثر الأوليتين في عينات نقية وعالية الجودة، فيمكن من حيث المبدأ تقادي التبثر على الشبكة، أو كما يُقال أحياناً **التبثر الفونوني**. يساوي المعدل الإجمالي للتبثر مجموع معدلات التبثر بسبب الآليات الخاصة المختلفة؛ إذ تتناسب كل آلية من هذه الآليات طردياً مع احتمال التبثر وعكسياً مع الزمن الحر الوسطي. وهذا يقودنا إلى استنتاج مفاده، أنه لا بد أيضاً من جمع مقاليب الحركيات الناجمة عن آليتي تبثر أو أكثر:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_{ph}} + \frac{1}{\mu_{im}} + \dots, \quad (55-6)$$

حيث μ_{im} و μ_{ph} حركيات جزئية تُعَيَّن بتبثر فونوني وتبثر شوائبي، على الترتيب.



الشكل (8-6): تابعة الحركة الإلكترونية لدرجة الحرارة في السيلكون Si من أجل جملة فيها نظاما تبعثر؛ التبعثر على الشبكة البلورية والتبعثر على الشوائب. تمت الإشارة إلى تركيز الشوائب، N_D ، بجوار كل منحنى

GaAs، في درجة حرارة الغرفة، محدودتان بالقيمتين $1350 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ و $8500 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ **على الترتيب**؛ ويمكن بلوغ قيم حركية μ من نفس المرتبة في جملٍ منخفضة الأبعاد في درجة حرارة الغرفة.

وعند تناقص درجة الحرارة تزداد الحركية ويُصبح التبعثر على النواقص والشوائب عاملاً مسيطراً، كما يوضح الشكل (8-6). يمكن تقادي آليات التبعثر هذه في جملٍ منخفضة الأبعاد حيث يمكن أن تبلغ الحركية قيماً تفوق القيمة $(10^5 - 10^6) \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. يصلح التيار الإلكتروني الذي له شكل المعادلة (6-51) من أجل النواقل المنتظمة، ولكن إذا ارتبط التركيز الإلكتروني n بالإحداثيات المكانية، فإن الإلكترونات تنتشر، تلقائياً وبشكل طبيعي، من منطقة التركيز العالي إلى منطقة التركيز الأخفض، مما يسبب تدفقاً إلكترونياً **معاكساً** لتدرج التركيز الإلكتروني، $\sim -dn/d\vec{r}$: يمكن كتابة المساهمة الانتشارية في التيار بالعلاقة الآتية:

$$\vec{J}_D = eD \frac{dn}{d\vec{r}} \equiv eD \vec{\nabla}_{\vec{r}} n, \quad (56-6)$$

يتعلق التبعثر الفونوني بدرجة الحرارة بشكل واضح؛ إذ في درجات الحرارة المنخفضة، عند سحق اهتزازات الشبكة البلورية، يكون معدّل هذا النوع من التبعثر صغيراً، ولكنه يرتفع بازدياد درجة الحرارة. وهذا ما يؤدي إلى قيمة محدودة **للحركية حتى في البلورات النقية**؛

فمثلاً، الحركيتان الإلكترونيتان من أجل بلورات حجمية من Si و

حيث D معامل الانتثار الذي تمت مناقشته في الفقرة 6-2.

إذن، يتألف التيار الكلي في ناقل غير منتظم من كلتا المساهمتين؛ الانسيابية والانتشارية:

$$\vec{J} = e\mu \vec{F} n + eD \vec{\nabla}_{\vec{r}} n \quad (57-6)$$

يمكننا الحصول على العلاقة الأساسية بين المعاملين الحركيين؛ الحركية μ والانتشار D بسهولة، ولتحقيق ذلك نطبق المعادلة (57-6) في شروط التوازن: في هذه الحالة، لا يوجد تيار كهربائي، أي أن $\vec{J} = 0$.

وعندها يمكن التعبير عن التركيز الإلكتروني، $n(\vec{r})$ ، من خلال الكمون الكهربائي، $\Phi(\vec{r})$ ، تبعاً لتوزع بولتزمان:

$$n(\vec{r}) = n_0 e^{\frac{e\Phi(\vec{r})}{k_B T}}$$

وبالتعويض عن هذه العلاقة والحقل الكهربائي، $\vec{F}(\vec{r}) = -d\Phi / d\vec{r}$ ، في المعادلة (57-6) ثم مساواة التيار بالصفر نحصل على ما يسمى **بعلاقة اينشتاين** المألوفة كما وجدنا في أكثر من مكان:

$$\frac{D}{\mu} = \frac{k_B T}{e} \quad (58-6)$$

وهكذا، نستطيع بمعرفة الحركية الإلكترونية μ حساب معامل الانتثار D بسهولة.

تُعد النتائج التي تمت مناقشتها للتو مناسبة للنقل الإلكتروني في الحالة المستقرة

$$m^* \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m^*}{\tau_e} \vec{v} - e\vec{F}, \quad (48-6)$$

وصف سلوك الإلكترونات في حقل كهربائي اختياري متغير مع الزمن، $\vec{F}(t)$. طالما أنه يمكن تمثيل أي تابعة للزمن، $\vec{F}(t)$ ، باستخدام تحويل فورييه، فيمكننا تحليل حالة التابعة الهارمونية للحقل الكهربائي:

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_\omega \cos(\omega t), \quad (59-6)$$

حيث \vec{F}_ω قيمة الحقل و ω تواتر اهتزازات الحقل.

نستخدم من أجل التحليل اللاحق العلاقة المعروفة جيداً، $\cos(\omega t) = \text{Re} [\dots]$ ، حيث

يعني $\text{Re} [\dots]$ حساب القسم الحقيقي للمقدار الموجود ضمن القوسين المتوسطين.

إذن، شكل الحقل الفيزيائي هو

$$\vec{F}(t) = \text{Re} \left[\vec{F}_\omega e^{-i\omega t} \right].$$

يجدر بالذكر أن الحسابات بوجود توابع أسية من الشكل $e^{-i\omega t}$ أبسط دوماً من تلك بوجود توابع جيبية وتجيبية. ولهذا السبب، تُستخدم الطريقة الآتية على نحو شائع: عوضاً عن الشكل التجيبي للحقل المستعمل في المعادلة (6-59) في معادلة نيوتن يُستعمل **التمثيل العقدي** للحقل الكهربائي:

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_\omega e^{-i\omega t}.$$

لدى إيجاد حل للمعادلة (6-48) التي تحوي حقلاً عقدياً يمكن حساب القسم الحقيقي بسهولة من الحل الذي يمتلك معنى فيزيائياً. لتطبيق هذه الطريقة **نبحث عن حل** للمعادلة (6-48) بحقل عقدي من الشكل الأسّي $\vec{v}_\omega e^{-i\omega t}$. وبالتعويض عن هذا الشكل في المعادلة (6-48) نحصل مباشرةً على العلاقة:

$$\vec{v}_\omega = -\frac{e}{m^*} \frac{\tau_e}{1 - i\omega\tau_e} \vec{F}_\omega. \quad (60-6)$$

في هذه الحالة، يجب أن تُحسب السرعة الإلكترونية وفق الشكل

$$\vec{v}(t) = \text{Re} [\vec{v}_\omega e^{-i\omega t}] = \vec{v}_\omega \text{Re} (\cos \omega t - i \sin \omega t);$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= -\frac{e\tau_e}{m^*} \vec{F}_\omega \frac{\tau_e}{1 - i\omega\tau_e} e^{-i\omega t} \\ &= -\frac{e\tau_e}{m^*} \vec{F}_\omega \frac{\tau_e}{1 - i\omega\tau_e} (\cos \omega t - i \sin \omega t) \end{aligned}$$

ولفعل ذلك، نضرب بسط ومقام الطرف الأيمن من العلاقة (60-6) بمرافق المقام، $1 + i\omega\tau_e$ ، فنحصل على علاقة تحوي جزأين؛ حقيقي وتخيلي

$$\vec{v}_\omega = -\frac{e\tau_e}{m^*} \vec{F}_\omega \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_e^2} + i \frac{\omega \tau_e \sin(\omega t)}{1 + \omega^2 \tau_e^2} \right)$$

الشكل:

$$\vec{v}(t) = -\frac{e\tau_e}{m^*} \vec{F}_\omega \left[\left(\frac{\cos(\omega t)}{1 + \omega^2 \tau_e^2} + \frac{\omega \tau_e \sin(\omega t)}{1 + \omega^2 \tau_e^2} \right) + i \left(\frac{\omega \tau_e \cos(\omega t)}{1 + \omega^2 \tau_e^2} - \frac{\sin(\omega t)}{1 + \omega^2 \tau_e^2} \right) \right].$$

وبعد ذلك، نأخذ القسم الحقيقي فقط بما ينسجم مع المعادلة (59-6) ونُهمل القسم التخيلي، فنجد أن:

$$\vec{v}(t) = -\frac{e\tau_e}{m^*} \vec{F}_\omega \left(\frac{\cos(\omega t)}{1 + \omega^2 \tau_e^2} + \frac{\omega \tau_e \sin(\omega t)}{1 + \omega^2 \tau_e^2} \right). \quad (61-6)$$

وهكذا، نجد أن تجيب الحقل الكهربائي في المعادلة (59-6) يُنتج حركة إلكترونية بمساهمتي الجيب والتجيب معاً. ومن المناسب إعادة كتابة المعادلة الأخيرة (61-6) بالشكل الآتي بعد فرض، $\tan \varphi = \omega \tau_e$ والأخذ بالحسبان أن $\sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = 1 / \cos \varphi = \sqrt{1 + \omega^2 \tau_e^2}$ نجد:

$$\vec{v}(t) = -\frac{e\tau_e}{m^*} \vec{F}_\omega \frac{\cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_e^2}}, \quad (62-6)$$

حيث أدخلنا الانزياح الطوري φ للسرعة الإلكترونية بالنسبة لطور الحقل الكهربائي (59-6).
نلخص الاستنتاج الأول الذي يرشح من هذه الدراسة بالشكل الآتي:

يمكن إيجاد الانزياح الطوري من المعادلة $\tan \varphi = \omega \tau_e$. وهنا $\varphi > 0$ ، مما يفترض، حسب المعادلة (62-6)، أن الإلكترونات تتأخر بالطور بالنسبة لتغيرات الحقل الكهربائي. ومن الواضح، أن التأخر موجود من أجل الترددات ω اللاصفريّة فقط (والأسيّندم الجزء التخيلي المعبر عن فقد الطاقة) ويزداد بسبب وجود حدّ قوة الاحتكاك في معادلة نيوتن.

أما الاستنتاج الآخر الذي يرشح من المعادلة (62-6) فيمكن في أن قيمة اهتزازات السرعة تتناقص عند ازدياد تردد الحقل الكهربائي؛ إذ في حدود الترددات العالية جداً، $\omega \tau_e \gg 1$ ، تتلاشى السرعة الإلكترونية المتناوبة.

والآن إذا كان لدينا معلوماً كل من السرعة الإلكترونية $\vec{v}(t)$ وتركيز الإلكترونات n ، فإننا نستطيع حساب التابعية الزمنية لتيار كهربائي يتدفق عبر العيّنة المدروسة بشكلٍ مشابهٍ للمعادلتين (51-6) و (52-6)؛ غير أنه يشيع أكثر استخدام التمثيل العقدي لكثافة التيار:

$$\vec{J}(t) = e\vec{v}n = e\mu n\vec{F} \equiv \sigma(\omega) \vec{F}_\omega e^{-i\omega t}, \quad (63-6)$$

حيث أدخلنا الناقلية العقدية Complex Conductivity $\sigma(\omega)$ الآتية:

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2 \tau_e n}{m^*} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_e^2} + i \frac{\omega \tau_e}{1 + \omega^2 \tau_e^2} \right). \quad (64-6)$$

(علاقة درودي)

• وفي حدود $\omega\tau_e \rightarrow 0$ تنخفض هذه الناقلية إلى قيمتها الموافقة للحالة المستقرة $\sigma(0)$ ، ومن ثمَّ القسم التخليبي للناقلية مهملاً، $\text{Im}[\sigma] \rightarrow 0$ ؛

$$\sigma(\omega)|_{\omega=0} = e^2\tau_e n / m^*$$

• ومن أجل الترددات المحدودة تكون كلتا المساهمتين؛ $\text{Re}[\sigma]$ و $\text{Im}[\sigma]$ مهمتين من أجل تيارٍ متناوبٍ؛ وعلى وجه الخصوص، تكون المساهمتان متساويتين عددياً عندما

$$\omega = 1/\tau_e \quad (\omega\tau_e = 1)$$

→ وهذه الخاصية تُستعمل عادةً لتعيين زمن التبعر الإلكتروني، τ_e ، عبر تعديل التردد ω ؛

→ ومن المهم الإشارة إلى أن الزمن τ_e يُحدِّد خصائص المادة في حالة الترددات العالية.

→ وبالتحديد، إذا تحقق الشرط $\omega\tau_e \gg 1$ ، فإن الناقلية تتلاشى والجملة الجزئية الإلكترونية للمادة لن تستجيب لحقلٍ تردده عالٍ. تُعرف العلاقة المعطاة بالمعادلة (64-6) **بعلاقة درودي**.

يوضح الشكل (9-6) تابعة كل من $\text{Re}[\sigma(\omega)]$ و $\text{Im}[\sigma(\omega)]$ للتردد ω .

تُعدُّ الناقلية $\sigma(\omega)$ صفة مميزة للمادة؛ فإذا كانت متجانسةً ومتحولاتها الهندسية معلومةً، فيمكننا استعمال σ لربط التيار المتناوب الكلي \tilde{I} بالجهد الكلي $\tilde{\Phi} = \Phi_\omega e^{-i\omega t}$ (كلاهما ممثلٌ عقدياً):

$$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_\omega e^{-i\omega t}, \quad I_\omega = \frac{\Phi_\omega}{Z(\omega)}, \quad Z(\omega) = \frac{L_x}{\sigma(\omega)S}. \quad (65-6)$$

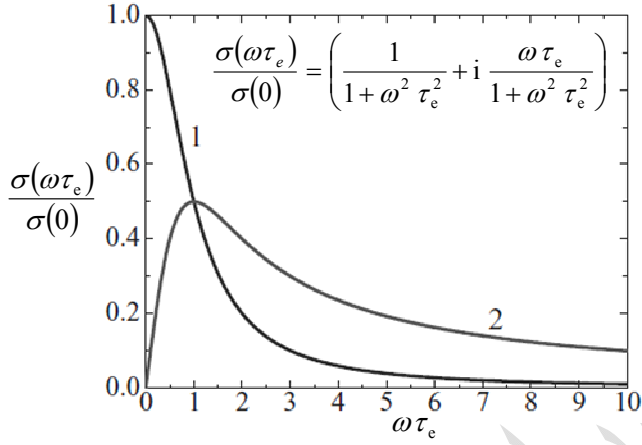
حيث L_x المسافة بين تماسي العينة و S مقطعها العرضي.

لقد أزلنا إشارة المتجه في العلاقة الثانية من المعادلة الأخيرة.

بمقارنة هذه النتائج مع قريناتها في الحالة المستقرة والمعطاة بالمعادلتين (53-6) و (54-6)

يمكن أن نلاحظ أنه بدلاً من **المقاومة** R يوجد متحول آخر مرتبط بالتردد، رُمز بالرمز $Z(\omega)$ ، ويسمى **المانعة** *Impedance*؛ وهي تابع عقدي يصف الخصائص الكهربائية

لكامل العينة ويمكن إدخالها من أجل أي عينة غير متجانسة.



الشكل (9-6): تابعة القسمين الحقيقي (المنحني 1) والتخيلي (المنحني 2) للناقلية الكهربائية العقدية للتردد ω ؛ $\sigma(0) = \sigma(\omega = 0)$.

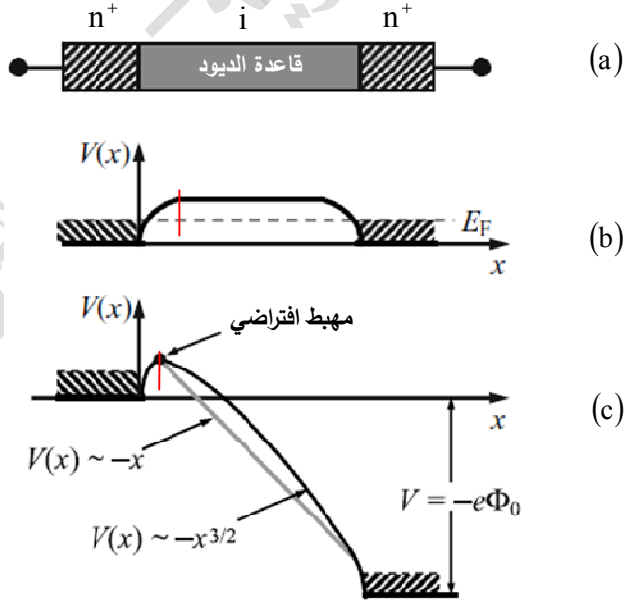
النقل التبديدي في التراكيب القصيرة Dissipative Transport in Short Structures

تُعَدُّ الحركية صفة مميزة للمادة الناقلة المنتظمة؛ إذ أن الحقل الكهربائي في عينة، بُعدها الممتد L_x ، يكون منتظماً على الأغلب، ويمكن تقييمه من العلاقة $F = \Phi_0/L_x$ حيث Φ_0 هو الجهد المطبق على العينة؛ فالحركية تُحدَّد بصورة أساسية المقاومة الكهربائية والتيار الكهربائي وفقاً للمعادلة (53-6)، $I = \Phi_0/R$.

■ **في العينات القصيرة ثمة تأثير كهربائي آخر** يمكن أن يُسهم في النقل الإلكتروني والتيار الكهربائي بشكل كبير جداً. **ينشأ** هذا التأثير بسبب **إعادة التوزع اللامتظم للإلكترونات**، ومن ثم **إعادة توزع الشحنة الكهربائية** بين طرفي العينة القصيرة.

→ **فالشحنة المتحصنة بالتيار** (تيار حقن الإلكترونات من باعث الديود نحو قاعدته) **تؤثر** على توزع الكمون على طول العينة **جاعلةً هذا التوزع شديد عدم الانتظام ومرتبباً** بالتيار ارتباطاً وثيقاً؛ **وبنتيجة ذلك، لم تعد** تابعة التيار الكلي للجهد المطبق **خطيةً**؛

→ **يسمى** النقل الإلكتروني في هذا النظام **النقل المحدود بالشحنة الفراغية**



الشكل (10-6): (a) رسم تخطيطي لديود n⁺-i-n⁺؛ (b) و (c) منحني الطاقة الكامنة، V(x)، من أجل ديود ذي ناقلية تبديدية ناتجة عن الشحنة الفراغية في حالتي عدم الانحياز والانحياز على الترتيب.

.Space-Charge-Limited Transport

■ **طالما** أننا ركزنا في هذه الفقرة على التراكيب القصيرة جداً على وجه الخصوص، فمن المناسب تقديم عرض موجز عن النقل المحدود بالشحنة الفراغية عند تحقق الشرط $\lambda \ll L_x, L_y, L_z$ (راجع المعادلة 6-2)، حيث **نستطيع إدخال** الحركة في الدراسة.

لندرس عينة قصيرة بتماسين، كما في الشكل (6-2b): تسمى النبيلة ثنائية التماس ديوداً وجسم العينة الواقع بين التماسين قاعدة الديود The Diode Base.

- **لنفرض** بغرض التبسيط، أن القاعدة ليست مطعمة (لا تحوي شوائب)، أي أنها خالية من إلكترونات الناقلية.
- يمكن تصنيع التماسين بتطعيم منطقتي التماس بشدة بمطعمات من النوع- n ؛ حيث نحصل على ما يسمى منطقتين من النوع- n^+ .
- وفي حالة كهذه، تكون هذه النبيلة بمثابة ديود من الشكل $n^+ - i$ (insulator) - n^+ ، كما يظهر في الشكل (6-10a).
- لنرمز للكمون الكهرساكن بالرمز Φ ؛ وعندها تساوي الطاقة الكامنة للإلكترونات $V = -e\Phi$.

→ يوضح الشكل (6-10b) الطاقة الكامنة لديود غير منحاز (أي لم يُطبَّق بين طرفيه فرق كمون خارجي): في هذه الحالة، **تتفصل** الإلكترونات في منطقتي التماس اليسارية واليمينية **بحاجز كمون عالٍ** موجود في القاعدة (على اعتبار أن المنطقة الوسطى للديود مادة عازلة للتيار الكهربائي).

→ **إذا طُبِّق الآن** جهد كهربائي Φ_0 بين طرفي الديود، فإن منحنى الكمون يتغير، كما يوضح الشكل (6-10c)؛ **فالتاقة الكامنة**، $V(x) = -e\Phi(x)$ **تنخفض**، ويصبح بمقدور بعض الإلكترونات تجاوز الحاجز الكموني، والعبور من القطب الباعث (المهبط) إلى قاعدة الديود، والمساهمة في التيار.

→ **يُنظر إلى هذا المفعول المتحرِّض** بالانحياز الكهربائي على أنه **حقن** Injection للإلكترونات من القطب الباعث إلى القاعدة. **ومن الواضح**، أنه بازياد جهد الانحياز تتزاح القيمة القصوى للكمون (ذروة الكمون) باتجاه المهبط **وتُصبح أخفض** مما سبق، وتيار الحقن يزداد بطبيعة الحال.

يمكن وصف هذه الظاهرة الفيزيائية بالنموذج البسيط الآتي الذي يكون صالحاً من أجل الانحيازات الكهربائية الكبيرة؛ يمكن كتابة علاقة كثافة التيار بدلالة الحركة المميزة من أجل قاعدة غير مُطعّمة، μ ، وتركيز الإلكترونات المحقونة، $n(x)$ ، والحقل الكهربائي،

$$F(x) = -d\Phi/dx \quad \text{كما في المعادلة (6-51):}$$

$$J = e\mu n(x)F(x). \quad (66-6)$$

- من أجل هيكل الديود الذي تمّ اختياره في الشكل (6-10a)، تجدر الإشارة إلى أن المهبط يقع من جهة اليسار والمصدر من جهة اليمين:
- يزداد الكمون Φ بازدياد البعد x ثمَّ إنّ **الحقل الكهربائي F وكثافة التيار J سالبان.**
- وبنتيجة شرط الاستمرارية، في الحالة المستقرة، تُصان **كثافة التيار المتدفقة عبر الديود: $J = -J_0 = \text{constant}$** حيث J_0 القيمة المطلقة لكثافة التيار.

يمكننا تعيين تركيز الإلكترونات المحقونة $n(x)$ من الباعث من العلاقة الأخيرة (6-66) فنكتب:

$$n(x) = -\frac{J_0}{e\mu F(x)}. \quad (67-6)$$

ونستطيع تطبيق معادلة بواسون من أجل الحقل الكهربائي:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\frac{dF}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon} = \frac{e}{\epsilon_0\epsilon} \left(-\frac{J_0}{e\mu F(x)} \right), \quad (68-6)$$

حيث ϵ ثابت العزل الكهربائي لمادة القاعدة و ϵ_0 السماحية الكهربائية للخلاء. بعد التعويض عن $n(x)$ بقيمته من المعادلة (67-6) يمكننا إعادة كتابة المعادلة (68-6) بدلالة الحقل F :

$$F \frac{dF}{dx} = \frac{J_0}{\epsilon_0\epsilon\mu} \quad \text{or} \quad FdF = \frac{J_0}{\epsilon_0\epsilon\mu} dx. \quad (69-6)$$

لا بد من تدعيم هذه المعادلة بشرطٍ حديّ يخصُّ الحقل؛ إذ يمكننا الاعتماد على حقيقة أنّ المساواة الآتية محققة **عند ذروة الحاجز الكموني**:

$$-\frac{d\Phi}{dx} = F = 0. \quad (70-6)$$

تنزاح هذه الذروة عند انحيازٍ كهربائيٍّ كبيرٍ مقتريةً جداً من المهبط؛ إذ نستطيع أن نضع $F(x=0) \approx 0$.

تَهْمِلُ هذه الطريقة العمليات التي تجري في **منطقة ضيقة جداً بين المهبط الحقيقي وذروة الكمون**، ولذلك، تسمى الطريقة المتبعة في هذه الدراسة تقريب المهبط الافتراضي-*Virtual-Cathode Approximation* الذي يُستخدم على نطاق واسع من أجل هكذا تحليل مبسط. إذن، نحصل على الحل المنشود من المعادلة (69-6):

$$\frac{1}{2} F^2(x) = \frac{J_0}{\epsilon_0 \in \mu} x \quad \text{or} \quad F(x) = - \left(\frac{2J_0}{\epsilon_0 \in \mu} \right)^{1/2} x^{1/2}, \quad (71-6)$$

حيث اختيرت القيمة السالبة للجذر التربيعي من أجل الحل المنشود تبعاً لإشارة الحقل الكهربائي التي تمت مناقشتها أعلاه. وهكذا، نجد أن توزع الكمون يُعطى بالعلاقة الآتية:

$$\Phi(x) = - \int_0^x F(x) dx = \left(\frac{8J_0}{9 \epsilon_0 \in \mu} \right)^{1/2} x^{3/2}. \quad (72-6)$$

بمقدورنا إيجاد العلاقة بين الكثافة التيارية J_0 والانحياز Φ_0 ، أي الخاصية المميزة (أمبير - جهد) للديود التي تُمثّل تغيّر التيار بتغيّر الجهد، وذلك من الهبوط الكلي للجهد $\Phi(x = L_x) = \Phi_0$ ، حيث نربّع طرفي العلاقة (72-6)، فنجد:

$$\Phi_0^2 = \frac{8J_0}{9 \epsilon_0 \in \mu} L_0^3;$$

ومن ثمّ

$$J_0 \equiv J_{0,d} = \frac{9 \epsilon_0 \in \mu}{8} \frac{\Phi_0^2}{L_0^3}. \quad (73-6)$$

وهذا ما يسمى **قانون موت - غيرني** من أجل الديود الذي يتصف بنقل إلكتروني تبديدي. إذن، لقد وجدنا أن الخاصية المميزة (أمبير - جهد) تُصبح **غير خطية** ($J_0 \sim \Phi_0^2$) تماماً **بسبب** مفعول الشحنة الفراغية Space-Charge Effect. يمكن وصف مفعول الشحنة الفراغية، على وجه الخصوص، **بالتركيز الوسطي للإلكترونات المحقونة**، \bar{n} حيث نستفيد هنا من العلاقتين (71-6) و (73-6)، فنجد:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} n(x) dx = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} -\frac{J_0}{e\mu F(x)} dx = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} -\frac{J_0}{-e\mu \left(\frac{2J_0}{\epsilon_0 \epsilon \mu}\right)^{1/2} x^{1/2}} dx = \\ &= \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} \frac{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon J_0}}{e\sqrt{2\mu}} x^{-1/2} dx = \frac{1}{L_x} \sqrt{\frac{9\epsilon_0 \epsilon \mu \Phi_0^2}{8L_x^3}} \int_0^{L_x} x^{-1/2} dx \end{aligned}$$

ومن ثمَّ

$$\int_0^{L_x} x^{-1/2} dx = 2\sqrt{L_x} \quad \text{حيث} \quad \bar{n} = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon}{eL_x^2} \Phi_0, \quad (74-6)$$

والذي يزداد بازدياد الجهد المطبَّق خطياً.

إن المعادلة (49-6) والحقل $F(x)$ الممثل بالمعادلة (71-6) يُسهّلان حساب الزمن

الوسيطي للنقل الإلكتروني عبر الديود، $t_{tr,d}$ حيث نجد باتباع الأسلوب الموضح أعلاه أنّ:

$$\begin{aligned} t_{tr,d} &= \int_0^{L_x} \frac{1}{v(x)} dx = \int_0^{L_x} \frac{1}{\mu F(x)} dx = \int_0^{L_x} \frac{x^{-1/2} dx}{\mu \left(\frac{2J_0}{\epsilon_0 \epsilon \mu}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\mu \left(2 \frac{9\epsilon_0 \epsilon \mu \Phi_0^2}{8} \frac{1}{L_x^3 \epsilon_0 \epsilon \mu}\right)^{1/2}} \int_0^{L_x} x^{-1/2} dx \end{aligned}$$

ومنه:

$$t_{tr,d} = \frac{4}{3} \frac{L_x^2}{\mu \Phi_0} \quad \text{ومن ثمَّ}$$

$$t_{tr,d} = \frac{4}{3} t_{0,d}, \quad (75-6)$$

علمًا بأن المقدار

$$t_{0,d} = \frac{L_x^2}{\mu \Phi_0}. \quad (76-6)$$

يمثل زمن العبور Transit Time الإلكتروني الإنسيافي أي الزمن الذي يستغرقه انتقال الإلكترونات المنسّاقة تحت تأثير الحقل الكهربائي الوسطي، Φ_0/L_x ، والموافق لإهمال مفعول الشحنة- الفراغية.

وكما ينتج من المعادلة (6-75)، فإن هذه المفعول يُزيد من زمن نقل الإلكترونات بمقدار العامل 4/3.

وبشكل عام، تتصف الخصائص الكهربائية اللامستقرة لنبيطة بالتيار المتحرّض فيها استجابةً لتطبيق جهد انحياز خارجي- متغير مع الزمن؛ فإذا كان الانحياز بتردد ω ، فإن الاستجابة التيارية تُعطى بالممانعة تبعاً للمعادلة (6-65). ومن أجل ديود Mott-Gurney المنحاز بجهدٍ مستقرٍ، Φ_0 ، يمكن حساب الممانعة العقدية بدقة:

$$Z(\omega) = \frac{6R_d}{\Omega^3} \left[(\Omega - \sin \Omega) + i \left(\frac{\Omega^2}{2} - 1 + \cos \Omega \right) \right], \quad (77-6)$$

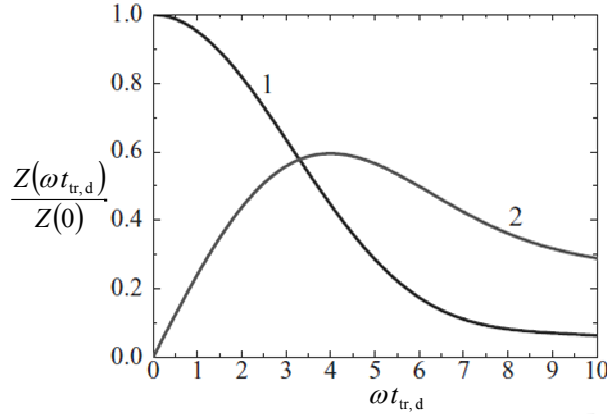
حيث

$$R_d = \frac{d\Phi_0}{dJ_0} = \frac{4L_x^2}{9\epsilon_0\epsilon\mu S\Phi_0}$$

المقاومة التفاضلية للديود في الحالة المستقرة المحسوبة من المعادلة (6-73)، و $I_0 = J_0 S$ ، و المقطع العرضي للعينة، $S = L_y \times L_z$ ، و $\Omega = \omega t_{tr,d}$ الطور؛ أي أن الممانعة تُعَيّن بالزمن الوسطي للنقل الإلكتروني عبر الديود، راجع المعادلة (6-75).

يوضح الشكل (6-11) التابعيتين $Re[Z(\Omega)]$ و $Im[Z(\Omega)]$ ؛ تختلف الممانعة الممثلة بالمعادلة (6-77) بشكل ملحوظ عن ممانعة مادة تتصف بسلوك الترددات العالية- الشبيه بسلوك درودي؛

- فحالما يزداد جهد الانحياز تتناقص الممانعة وترتفع الاستجابة التيارية متناسبة مع هذا الجهد، $\infty \Phi_0$ ،
- ثمَّ أنّ عرض مجال الترددات (العرض الطيفي) للاستجابة يُصبح أكبر $(\infty 1/t_{tr,d} \infty \Phi_0)$.



الشكل (11-6): تابعة القسمين الحقيقي (المنحني 1) والتخيلي (المنحني 2) للممانعة الكهربائية العقدية للتردد ω ; $Z(0) = Z(\omega = 0)$.

يؤكد كلا الاستنتاجين أن ديوداً قصيراً ذا نقلٍ تبديديٍّ محدودٍ بشحنة- فراغية وواقعاً تحت تأثير انحيازٍ عالٍ يمكن أن يعمل عند ترددات أعلى من الترددات التي يعمل عندها ديودٌ آخر مُطعَّمٌ يتصف بناقلية درودي.

يُستحسن في ختام هذا التحليل للنقل الإلكتروني التبددي في العينات القصيرة الإشارة إلى أن النتائج الرئيسية الحاصلة صالحة من أجل الانحيازات الكبيرة أي لدى تطبيق فروق كمون بقيم كبيرة؛ حيث يمكن عندها إهمال المساهمة الانتشارية في التيار:

$$\mu \left| \bar{F}(x) \right| \gg D \left| \frac{dn(x)}{dx} \right|. \quad (78-6)$$

→ ومن أجل هكذا شروط يتحدد النقل الإلكتروني إلى حدٍ كبيرٍ بمفعول الشحنة- الفراغية،

→ ثم إنَّ الحقل الكهربائي يكون غير منتظمٍ للغاية،

→ وتيار الحقن الإلكتروني يزداد مع مربع الانحياز الكهربائي المطبَّق بين طرفي الديود،

$$J_0 \equiv J_{0,d} = \frac{9 \epsilon_0 \mu \Phi_0^2}{8 L_0^3}, \quad (73-6)$$

→ وعندما يكون الانحياز كبيراً ينخفض زمن النقل الانسيابي للإلكترونات عبر الديود

وتبقى النبيطة نشطةً كهربائياً في مجالٍ تردديٍّ يتوسع بازدياد الانحياز طردياً.

دراسة مفهوم الإلكترونات الحارة Concept of Hot Electrons:

نعود الآن إلى **البلورات الكبيرة المنتظمة** لدراسة تأثير الحقول الكهربائية عالية القيم على السرعة الانسيابية فيها والخصائص المميزة (تيار - جهد) لها. لقد تم الحصول على المعادلات (6-49)-(6-51) **شريطة ثبات زمن الاسترخاء**، τ_e ؛ أي إنه لا يتعلق بقيمة الحقل الكهربائي المطبق. لدى ازدياد قيمة الحقل المطبق على البلورة المدروسة يبتعد الغاز الإلكتروني عن حالة التوازن. وعلى وجه الخصوص، تزداد الطاقة الإلكترونية الوسطية للغاز؛ يمكن فهم ذلك من الدراسات الوصفية الآتية:

$$\frac{dE}{dt} = e(\vec{v} \cdot \vec{F}) - \frac{E - E_{eq}}{\tau_E} \quad (79-6)$$

- يوافق **الحد الأول** في الطرف الأيمن من المعادلة (79-6) الاستطاعة التي يكتسبها الإلكترون من الحقل الكهربائي؛
 - ويُمثّل **الحد الثاني** معدّل ضياعات الطاقة الإلكترونية Electron-Energy Losses. **تناسب** هذه الضياعات تناسباً طردياً مع **انحراف** الطاقة الإلكترونية، E ، عن قيمتها في حالة التوازن، E_{eq} ، **وعكسياً** مع زمن استرخاء الطاقة، τ_E ، الذي تمت دراسته في الفقرة 6-2.
 - تزداد الطاقة الإلكترونية في الحقل الكهربائي وتستمر بذلك إلى أن يترسّح التوازن الطاقوي الإجمالي.
- وفي الحالة المستقرة، عندما $dE/dt = 0$ ، نحصل من المعادلة (79-6) على طاقة الإلكترون، E ، التي تُعطى بالمعادلة الآتية:

$$E = E_{eq} + e(\vec{v} \cdot \vec{F})\tau_E \quad (80-6)$$

وتبعاً للمعادلة (6-49)، $\vec{v} = -\mu \vec{F}$ ، تتناسب السرعة، \vec{v} ، تناسباً خطياً مع الحقل الكهربائي \vec{F} .

بناءً على ما تقدم **تناسب الطاقة الإلكترونية الوسطية مع مربع الحقل الكهربائي** **وتفوق** قيمتها المتوازنة، E_{eq} . ومن الملائم هنا دراسة درجة الحرارة الإلكترونية الفعّالة، T_e ، بدلاً من الطاقة الإلكترونية الوسطية؛ مثل هذه الدراسة شائعة في إلكترونات أنصاف النواقل؛ إذ يمكن إيجاد العلاقة بين درجة الحرارة والطاقة الوسطية في حالة التوازن: $E = \frac{1}{2} \alpha k_B T_e$

حيث يُمثّل العامل α أبعاد البنية المدروسة. من الواضح، أن درجة الحرارة الإلكترونية، T_e ، تتطابق في شروط التوازن الحراري مع **درجة حرارة الشبكة البلورية** T ، وفي شروط عدم التوازن يمكن أن تختلف. يُعبّر عن درجة الحرارة الإلكترونية الفعّالة من خلال الطاقة الإلكترونية الوسطية التي تُستخدم؛ كمعيارٍ لحالة عدم التوازن.

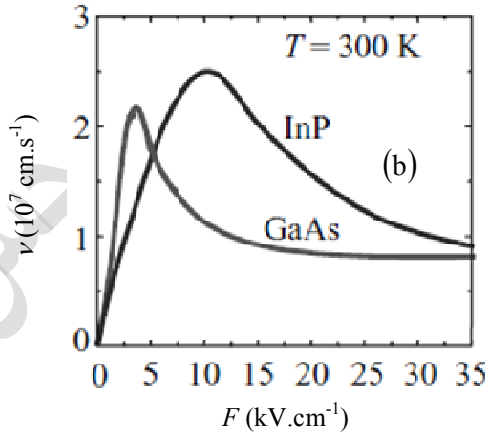
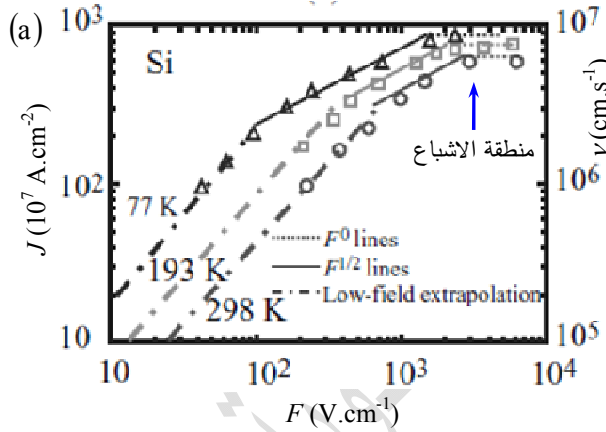
- فإذا **تجاوزت** درجة الحرارة الإلكترونية الفعّالة T_e درجة حرارة الشبكة البلورية T بشكلٍ طفيف فقط، و**بقي** النقل الإلكتروني خاضعاً لقانون أوم، يكون لدينا ما يسمى بالإلكترونات "الساخنة" *Warm*.
- وإذا **تفوقت** درجة الحرارة الإلكترونية الفعّالة على درجة حرارة الشبكة بشكلٍ كبيرٍ، $T_e \gg T$ **فحصل** على حالة تبعد فيها الإلكترونات عن حالة التوازن؛ وعندها يمكن تسمية الإلكترونات بالإلكترونات "الحارة" *Hot*.
- يمكن لدرجة الحرارة الإلكترونية أن تبلغ قيماً من **رتبة بضعة آلاف درجات الكلفن**، في حين إن الشبكة البلورية تبقى باردة.

وضمن تقديرات بسيطة؛ من المتفق عليه أن **الانتقال من نظام الإلكترونات الساخنة إلى نظام الإلكترونات الحارة** يحدث عند الحقل الكهربائي $F = F_{he}$ ، عندما $e(\vec{v} \cdot \vec{F})\tau_E$ يساوي $E_{eq} = \alpha k_B T$. يمكن بسهولة تقدير **حقل التسخين الكهربائي**، F_{he} ، Heating Electric Field. في الواقع، يمكن تقدير سرعة الانسياب، \vec{v} ، الداخلة في المعادلة (6-80) من المساواة $\vec{v} = -\mu \vec{F}$. إذن، $\alpha k_B T = e(-\mu F_{he})(F_{he})\tau_E$ ، ومن ثمّ يساوي **حقل التسخين المعياري**:

$$F_{he} = \sqrt{\frac{\alpha k_B T}{e\mu\tau_E}}. \quad (81-6)$$

ومن أجل الإلكترونات الحارة تُصبح عمليات التبعثر **بحد ذاتها متعلقةً بالحقل**. وفي هذا السياق، فإن العلاقة الخطية لقانون أوم المُمثّل بالمعادلة (6-51)، لم تعدّ صالحةً والخصائص المميزة (تيار - جهد)، $J = J(F)$ ، و**تابعية** سرعة الانسياب للحقل، $v = v(F)$ ، **يمكن** أن تُبدي وبشدة سلوكاً غير خطيٍ يتعلّق ببنية عصابات الطاقة للإلكترونات Electron Band-structure وآليات التبعثر النوعي؛ وعلى وجه الخصوص، تكون هذه التابعيات مختلفة الشكل في أهم مادتين؛

→ في المواد نصف الناقلة العائدة للمجموعة الرابعة IV من الجدول الدوري تُظهر التابعتان $J = J(F)$ و $v = v(F)$ مفعول الإشباع Saturation Effect عند تطبيق حقول كبيرة، كما يوضح الشكل (12a-6)،
 → في حين يتعرّض منحني التيار والسرعة من أجل مركبات المجموعتين III-V، بعد جزء متزايد بشكل غير خطّي، لتناقصٍ في مجالٍ ما للحقل الكهربائي، كما يوضح



..... الخطوط المنقطعة للدلالة على أنّ كثافة التيار لا تتعلق بالحقل المطبق F^0
 ————— الخطوط المستمرة للدلالة على أنّ كثافة التيار تتعلق بالحقل المطبق وفق التابع $F^{1/2}$
 - - - - - الخطوط المتقطعة- المنقطعة للدلالة على علاقة الاستقراء في منطقة الحقول الضعيفة

الشكل (12-6): المنحنيات المميزة (تيار - جهد) من أجل حقول كهربائية كبيرة: (a) من أجل Si و (b) من أجل GaAs و InP.

الشكل (12b-6).

→ وكما ينتج من التحليل الذي أُجري على أنظمة النقل الإلكتروني المختلفة في الفقرة

2-6، من أجل النبائط عالية السرعة، **يتمثل المتحول الأساسي لمادة النبیطة في**

القيمة القصوى لسرعة الانسياب التي يمكن بلوغها بوجود الحقول الكهربائية الكبيرة.

يشمل الجدول (2-6) مقارنةً بين السرعات المشبعة والسرعات القصوى من أجل مواد ذات صلة: يمكننا أن نرى أن بعض المركبات III-V (بما فيها GaAs، و InP، و InSb) تمتلك

سرعات أكبر بعددٍ من المرات من تلك

التي تمتلكها مواد Si، و GaP، و

AlAs؛

→ فمن أجل Si تُقيّد سرعة الانسياب

بقيمة تساوي نحو 10^7 cm/s والتي

يمكن بلوغها من أجل حقول

كهربائية تتجاوز بضعة

كيلوفولطيات لكل سنتيمتر

، (kV/cm)

→ ومن أجل GaAs تبلغ ذروة سرعة

الانسياب القيمة 2×10^7 cm/s

والتي يمكن بلوغها عند الحقول المساوية 3.5 kV/cm.

دراسة ظاهرة السرعة العابرة (السرعة الانتقالية) Transient Overshooting Effects:

يمكن تجاوز الحدود المفروضة على سرعة الانسياب المميزة لمادة معيّنة باستخدام

مفعول الإلكترون الحار المعروف بإسم **ظاهرة السرعة العابرة Velocity Overshoot**؛ بهدف

شرح هذه الظاهرة لنتذكر الاستنتاجات التي حصلنا عليها من أجل مسألة الحالة المستقرة،

التي يكون فيها توزّع الإلكترونات مستقرًا؛ بتعبير آخر، **نسبنا** التحليل السابق إلى **الخصائص**

الإلكترونية المتوسطة على أزمنةٍ أطول بكثير من الأزمنة المميزة للجمل المدروسة؛

• كزمن الطيران الحر الوسطي، وزمن استرخاء الطاقة وزمن استرخاء الاندفاع، الخ.

اسم المادة	السرعة القصوى (10^7 cm/s)
Si	1
SiC	2
SiO ₂	1.9
AlAs	0.65
GaP	1.1
GaAs	2
InP	2.5
InAs	4.4
InSb	6.5

سندرس الآن العمليات التي تحدث في الجملة الإلكترونية بعد انحرافها عن حالة التوازن **مباشرةً**؛ إذ **سنركز** في هذه الحالة الخاصة **على استجابتها للحقل الكهربائي النبضي** الذي له شكل تابع - الخطوة (الدَّرَجَة) Step-Function.

- إن زمن استرخاء الاندفاع، τ_e ، الداخِل في المعادلة (6-49)، بشكل عام، **أقصر** من زمن استرخاء الطاقة، τ_E ، الذي يُحدد الطاقة الإلكترونية؛ راجع المعادلة (6-79)؛ ولهذا السبب، فإن استجابة السرعة لخطوة الحقل الكهربائي **أسرع** من استجابة الطاقة لها من أجل الحالة الموصوفة بالمعادلة (6-79).
- وعادةً، إذا ازداد معدّل التبعرث بزيادة الطاقة الإلكترونية، فيمكن للسرعة الإلكترونية أن تفوق السرعة المستقرة خلال فاصلٍ زمنيٍّ من رتبة τ_E ؛ بتعبير آخر، **السرعة العابرة Transient Velocity** ليست مجرد تابعٍ للحقل الكهربائي وحسب، بل للطاقة الإلكترونية أيضاً:
- فعلياً، "تُكَيِّف Adjusts" **السرعة نفسها، بسرعةٍ**، مع التغيرات البطيئة جداً للطاقة و"تواكبها Follows"، بمعنى تتعقبها، حتى تبلغ هذه الطاقة الحالة المستقرة؛ إذ في البداية، عندما لا تبلغ الطاقة الإلكترونية القيمة المستقرة تكون السرعة الإلكترونية الموافقة **للطاقة العابرة** أعلى من السرعة الموافقة للطاقة المستقرة.

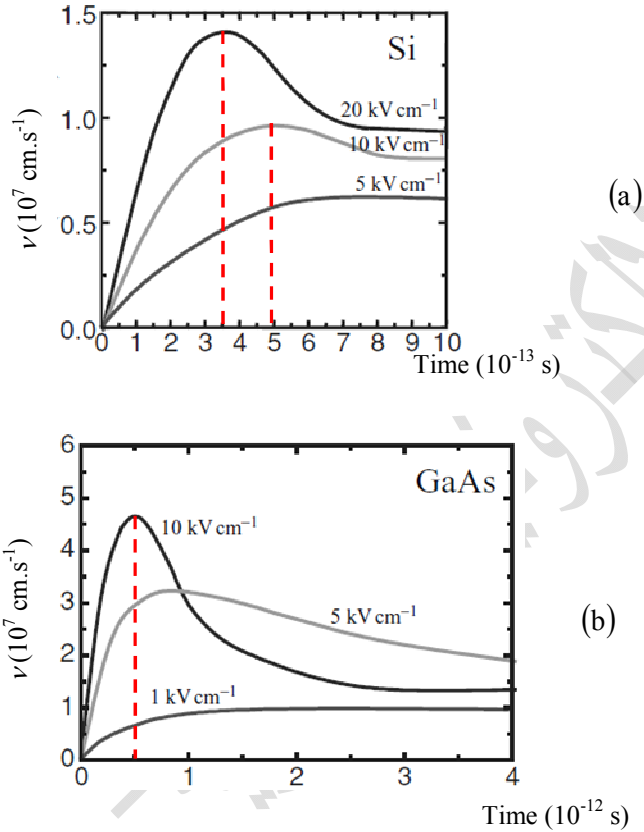
يوضح الشكل (6-13) ظاهرة السرعة العابرة من أجل Si و GaAs:

تُمثّل سرعة الانسياب كتابعٍ للزمن من أجل بضعة حقول كهربائية؛ إذ يُفترض تطبيق الحقل الكهربائي بين طرفي العينة المدروسة في اللحظة $t = 0$ ؛ تبرز ظاهرة السرعة العابرة عند توفّر حقول كهربائية عالية القيمة ويمكن لذروة السرعة العابرة أن تتجاوز سرعة الإشباع-المستقرة بمرتين إلى أربع مرات.

يمكننا من خلال الشرح الفيزيائي لظاهرة السرعة العابرة أن نُدرك ما هي إمكانية الاستفادة منها:

- لنتصور أن **إلكترونات باردة دخلت** منطقة نشطة **لنبيطة** نصف ناقلة (Device) نصف ناقل) من أحد تماساتها؛

فإذا توفّر في المنطقة النشطة **حقلً كهربائيً كبيرً**، فإن الإلكترونات ستتسارع؛ وعلى مسافة ما من التماس الحاقن ستبلغ الإلكترونات **السرعة العابرة القصوى**، وبعد ذلك، ستتناقص سرعتها تدريجياً نحو القيمة المستقرة.



الشكل (13-6): مفعول السرعة العابرة- الاستجابة الانتقالية لسرعة الانسياب الإلكترونية لنبضات حقل كهربائي لها شكل الدَّرَجَة في درجة حرارة الغرفة. أُشير لقيمة الحقل بجانب كل رسم: (a) من أجل Si و (b) من أجل GaAs.

- فإذا كانت المنطقة النشطة للنبيطة قصيرةً وأمكن مقارنتها بالمسافة التي تحصل فيها **الظاهرة العابرة**، فإن نقلاً إلكترونياً يحدث عبر هذه المنطقة النشطة بسرعة أعلى من السرعة المستقرة ويصبح زمن النقل الإلكتروني الإجمالي أقصر، ومن ثمّ ستكون النبيطة قادرةً على العمل بمعدل سرعةٍ وترددٍ أعلى.
- يساوي الزمن المميز للظاهرة العابرة من أجل GaAs، كما يبدو من الشكل (13-6)، نحو $\tau_{tr} = 0.5 \times 10^{-12}$ s. وعند تقدير السرعة الوسطية، في شروط العبور، بالقيمة $v_m = (2-4) \times 10^7$ cm/s يمكننا الحصول على تقديرٍ لطول النبيطة اللازم لتحقيق ظاهرة السرعة العابرة قيد الدراسة:

$$L_x \leq v_m \tau_{tr} = (2-4) \times 10^7 \text{ cm/s} \times 0.5 \times 10^{-12} \text{ s}$$

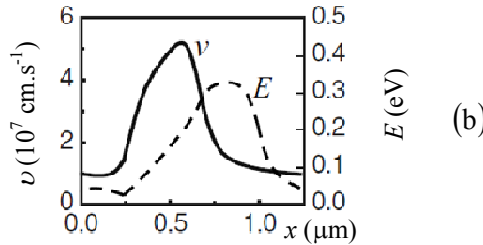
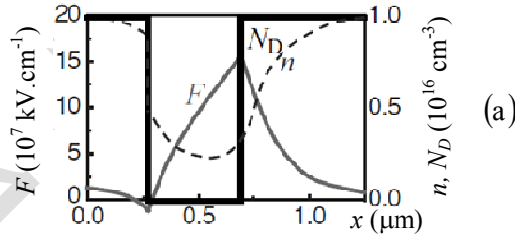
ومن ثمَّ

$$L_x \leq (0.1-0.2) \mu\text{m}$$

وهذا يعني أنه يمكن بلوغ ظاهرة السرعة العابرة والحصول على إلكترونات فائقة السرعة Ultra-High-Speed Electrons في عينات قصيرة (من رتبة أجزاء من واحد ميكرون).

عند توقُّر انحيازات وتيارات عالية لا بد من الأخذ بالحسبان مفعول الشحنة- الفراغية وكذلك ظاهرة السرعة العابرة. **يعرض الشكل (14-6) حسابات النقل الإلكتروني المحدود بالشحنة- الفراغية في ديود قصير $n^+ - i - n^+$ من مادة GaAs، حيث:**

- يرمز n^+ إلى تماسات شديدة التطعيم
 - و i إلى قاعدة الديود الخالية من التطعيم.
 - يُشار إلى التطعيم الشبيه بتابع- الخطوة لمناطق التماس بالرمز N_D ؛
- إذ يوضح الشكل (14-6) كلاً من الحقل، وتركيز الإلكترونات المحقونة وسرعات انسياقها الوسطية، وطاقتها الوسطية:



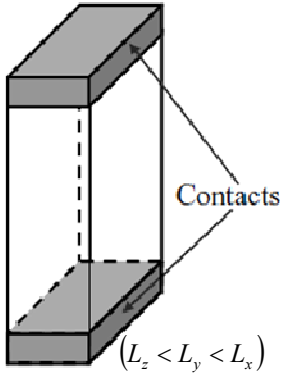
الشكل (14-6): النقل الإلكتروني المحدود بالشحنة الفراغية تبعاً للظاهرة العابرة في ديود $n^+ - i - n^+$ مصنوع من GaAs في الشروط $L_x = 0.37 \mu\text{m}$, $T = 77 \text{ K}$, $\Phi_0 = 0.5 \text{ V}$ يوضح الشكل (a) كلاً من مناطق التطعيم، والحقول الكهربائية، F ، وتركيز الإلكترونات المحقونة، n ، والشكل (b) يوضح سرعة الانسياب، v ، والطاقة الوسطية للإلكترونات المحقونة، E ، من أجل GaAs.

- إنَّ الحقل الكهربائي وتركيز الإلكترونات المحقونة **غاية في عدم الانتظام** بصورة مشابهة لحالة النقل الإلكتروني التبددي التي تم تحليلها سابقاً.
 - **ولكن** من أجل ديود قصير، تُرصد السرعة العابرة بوضوح في قاعدة الديود.
 - حيث تزداد الطاقة الوسطية في القاعدة **وتهبط فقط** في التماس المُستقبل للإلكترونات بسبب التبعثر الشديد الذي يحدث لها في المنطقة شديدة التطعيم.
 - وتجدر الإشارة إلى أن سرعة الانسياب تبلغ قيمةً تفوق 4×10^7 cm/s والطاقة الإلكترونية تتجاوز الـ 3500K في بلورة درجة حرارتها 77 K.
- إنَّ عمليات التبدد Dissipation Processes من أجل أنظمة النقل المدروسة إلى الآن؛ نظام النقل في حقول ضعيفة، ونظام نقل الإلكترونات الحارة، ونظام النقل تبعاً للظاهرة العابرة، تؤدي دوراً رئيساً في التحكم بسرعة انسياب الإلكترونات. **وبتخفيض أبعاد العينة تدريجياً يمكن بلوغ نقل إلكتروني عديم التصادم - وفائق السرعة.**

The relations between the various units are: $1 \text{ eV} = 8065.5 \text{ cm}^{-1} = 2.418 \times 10^{14} \text{ Hz} = 11,600 \text{ K}$.

Also 1 eV corresponds to a wavelength of $1.2398 \text{ } \mu\text{m}$, and $1 \text{ cm}^{-1} = 0.12398 \text{ meV} = 3 \times 10^{10} \text{ Hz}$.

دراسة النقل الباليستي التقليدي Classical Ballistic Transport:



الشكل (2b-6)

يحدث النظام الباليستي التقليدي (بدون تصادم)، تبعاً للمعادلة (11-6)، $l_e > L_x$ ، في العينات القصيرة جداً حيث لا تتعرض الإلكترونات أثناء طيرانها لأي تبعثر. فالتيار والمقاومة الكهربائية المحدودان يحدثان في حالة كهذه - بصورة استثنائية - بسبب تأثيرات الشحنة الفراغية.

بمقدورنا تفسير هذه التأثيرات في ديود باليستي يوضح الشكل (2b-6) شكله الهندسي؛ إذ بصورة مشابهة لحالة الديودات القصيرة المذكورة أعلاه التي تعمل بنظام النقل التبددي Dissipative ونظام السرعة العابرة Overshoot **لا بد من تعيين** توزع الكمون الكهربائي، $\Phi(x)$ ، وتركيز الإلكترونات،

$n(x)$ ، والسرعة، $v(x)$ ، في شروط طيران الإلكترونات من دون تصادم.

سنستفيد هنا من **معادلة بواسون** (68-6)، $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\frac{dF}{dx} = \frac{en(x)}{\epsilon_0\epsilon}$ ، ونستعمل علاقة كثافة

التيار ذات الشكل الآتي:

$$\vec{J} = -en(x)\vec{v}(x). \quad (82-6)$$

يمكننا إيجاد السرعة، \vec{v} ، من **قانون نيوتن** في التحريك الأساسي المؤلف (8-2)؛ إلا أننا سنستعمل قانون انحفاظ الطاقة (مجموع الطاقين الحركية والكامنة ثابت) الذي يكتب كالاتي:

$$\frac{1}{2}m^*v^2(x) - e\Phi(x) = \frac{mv_c^2}{2} - e\Phi_c = \text{constnt}, \quad (83-6)$$

حيث v_c و Φ_c وسيطان يوافقان القطب الحاقن (المهبط Cathode).

يمكننا تبسيط المعادلة الأخيرة، في حالة تطبيق انحياز كهربائي كبير، باعتبار أن الإلكترونات تُحقن من فوق الحاجز بسرعة صغيرة $0 \rightarrow v_c$ ؛ وعندها، نستعمل تقريب المهبط الافتراضي الذي تمت مناقشته سابقاً؛ إذ من الملائم في هذه الحالة وضع $\Phi_c = 0$ والحصول على العلاقات الآتيتين:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2e\Phi(x)}{m^*}}, \quad (84-6)$$

$$n(x) = \frac{J_0}{e\nu(x)}, \quad (85-6)$$

حيث J_0 القيمة المطلقة لكثافة التيار المتدفق عبر الديود؛ $J = -J_0 = -en(x)\nu(x)$.
وكما أشرنا في الفقرة المكرسة للنقل التبددي، تكون الكثافة J سالبة، ومن ثمّ من الملائم إدخال قيمة مطلقة لكثافة التيار، J_0 ، التي تكون ثابتة خلال كامل العينة.
ونحصل بجمع المعادلة الأخيرة مع معادلة بواسون، المعادلة (68-6)، على معادلة من أجل الكمون الكهربائي $\Phi(x)$:

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = \frac{J_0}{\epsilon_0\epsilon} \sqrt{\frac{m^*}{2e\Phi(x)}}. \quad (86-6)$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة بالمقدار $d\Phi(x)/dx$ نحصل على معادلة يمكن تكاملها؛ إذ إن نتيجة التكامل تكون من الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(x)}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d\Phi(x)}{dx} &= \frac{J_0}{\epsilon_0\epsilon} \frac{d\Phi(x)}{dx} \sqrt{\frac{m^*}{2e\Phi(x)}} \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Phi(x)}{dx} \right)^2 &= \frac{J_0}{\epsilon_0\epsilon} \sqrt{\frac{m^*}{2e}} \Phi^{-1/2}(x) \frac{d\Phi(x)}{dx} \\ \frac{1}{2} \int d \left(\frac{d\Phi(x)}{dx} \right)^2 &= \frac{J_0}{\epsilon_0\epsilon} \sqrt{\frac{m^*}{2e}} \int \Phi^{-1/2}(x) d\Phi(x) \end{aligned}$$

ومن ثمّ

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi(x)}{dx} \right)^2 = \frac{2J_0}{\epsilon_0\epsilon} \sqrt{\frac{m^*\Phi(x)}{2e}} + C. \quad (87-6)$$

يمكن وضع ثابت التكامل، C ، مساوياً للصفر، طالما أن $d\Phi/dx \rightarrow 0$ و $\Phi \rightarrow 0$ عندما $x \rightarrow 0$ في دراستنا التقريبية. إذن، بمقدورنا إعادة كتابة النتيجة الأخيرة، (87-6)، وفق الشكل الآتي:

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \sqrt{\frac{4J_0}{\epsilon_0\epsilon} \sqrt{\frac{m^*\Phi(x)}{2e}}}.$$

ومن ثمّ

$$\frac{1}{\Phi^{1/4}} \frac{d\Phi(x)}{dx} = 2 \sqrt{\frac{J_0}{\epsilon_0\epsilon} \sqrt{\frac{m^*}{2e}}}. \quad (88-6)$$

ويعطي التكامل اللاحق للمعادلة الأخيرة شكلاً نهائياً لتوزع الكمون الكهربائي:

$$\int \Phi^{-1/4} d\Phi(x) = 2 \sqrt{\frac{J_0}{\epsilon_0 \epsilon}} \sqrt{\frac{m^*}{2e}} \int dx ;$$

$$\frac{4}{3} \Phi^{3/4}(x) = 2 \left(\frac{J_0}{\epsilon_0 \epsilon} \left(\frac{m^*}{2e} \right)^{1/2} \right)^{1/2} x ;$$

ومن ثمَّ

$$\Phi(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{J_0}{\epsilon_0 \epsilon} \right)^{2/3} \left(\frac{m^*}{2e} \right)^{1/3} x^{4/3} . \quad (89-6)$$

وبالأخذ بالحسبان أن، $\Phi(L_x) = \Phi_0$ ، يمكننا إيجاد الصفة المميزة (تيار - جهد) للديود الباليستي:

قانون تشايلد

$$J_{0,b} = \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \frac{\epsilon_0 \epsilon}{L_x^2} \sqrt{\frac{2e}{m^*}} \Phi_0^{3/2} . \quad (90-6)$$

تُعرف هذه المعادلة بـ **قانون تشايلد Child Law**. وتم التحقق منها في البداية من أجل الديودات الخلائية (الصمامات المفرغة من الهواء) Vacuum Diodes حيث غابت تصادمات الإلكترونات فيها تماماً. يختلف قانون تشايلد كثيراً عن الصفة المميزة (تيار - جهد) للديود

$$\text{التبديدي التي تم التعبير عنها بـ **قانون موت - غيرني**، } J_0 \equiv J_{0,d} = \frac{9 \epsilon_0 \epsilon \mu}{8} \frac{\Phi_0^2}{L_0^3} .$$

بمقدورنا حساب وسطاء أخرى للديود الباليستي من خلال تطبيق المعادلة (89-6)؛

فعلى سبيل المثال، يساوي زمن انتقال الإلكترونات:

$$t_{tr,b} = \frac{3}{2} t_{0,b} , \quad t_{0,b} = L_x \sqrt{\frac{2m^*}{e\Phi_0}} , \quad (91-6)$$

حيث $t_{0,b}$ زمن انتقال الإلكترونات المقذوفة بغياب مفعول الشحنة - الفراغية؛ إذ يُزيد هذا المفعول زمن انتقال الإلكترونات، $t_{tr,b}$ ، بمقدار العامل 3/2.

من المناسب هنا مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها من أجل **الانتقال الإلكتروني المحدود بالشحنة - الفراغية في كلا الديودين التبديدي والباليستي**.

ولفعل ذلك، نفرض أن طولي الديودين، L_x ، متساويان وأتّهما منحازان بجهدين

متساويين؛ وعندها، نحصل على نسبة أزمنة النقل الموافقة لها من المعادلتين (75-6)،

$$t_{tr,d} = \frac{4}{3} t_{0,d} = \frac{4}{3} \frac{L_x^2}{\mu \Phi_0} \quad \text{و (91-6):}$$

$$\frac{t_{tr,b}}{t_{tr,d}} = \frac{9 \sqrt{m^* \Phi_0} \mu}{4 \sqrt{2e} L_x} = \frac{9 \tau_e \sqrt{e \Phi_0}}{4 \sqrt{2m^*} L_x} = \frac{9 l_e}{8 L_x} \ll 1, \quad (92-6)$$

حيث استعملنا العلاقة $\mu = e \tau_e / m^*$ وأدخلنا المسار الحر الوسطي الأعظمي، $l_e = \tau_e v_m$ ،
والسرعة الإلكترونية القصوى، $v_m = \sqrt{2e \Phi_0 / m^*}$ ،

• إن النسبة التي تم الحصول عليها صغيرة القيمة وتتسجم مع شرط النقل التبددي، الممثل بالمعادلة (12-6)، $L_x \gg l_e$ ، وهذا يعني أن **الديودات الباليستية تستطيع تأمين منظومات عمل أسرع بكثير من تلك التي يمكن أن تؤمنها الديودات التبددية.**

• وبشكل مشابه، يمكن أن نجد، أنه من أجل انحياز كهربائي معطى، تكون التيارات في **الديود الباليستي أكبر بكثير منها في الديود التبددي:**

$$\frac{J_{0,b}}{J_{0,d}} = \frac{8}{9} \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \frac{L_x}{l_e} \gg 1.$$

ولهذا السبب، يتصف **النقل الإلكتروني الأعظمي - الخالي من التصادمات** The Ultimate Collisinless Transport **بعدي من المزايا** يتفوق فيها على النقل الإلكتروني التبددي، وذلك، بفضل سرعة الإلكترونات الأعلى في النقل الباليستي.

في الواقع، في الحالة الحقيقية ثمة تصادمات تحدث دوماً؛ وعندها يمكن معالجة هذه الحالة "الوسطية" "Intermediate" (بين النقل الإلكتروني الباليستي والنقل الإلكتروني التبددي) **عددياً** باستعمال نموذج أكثر تعقيداً: يوضح الشكلان (15a-6) و (15b-6) نتائج مثل هذا النموذج العددي **من أجل ديود GaAs** طوله $L_x = 0.4 \mu m$ وفي درجة الحرارة $T = 300K$ ، حيث تمّ تحصيل النتائج الآتية:

→ تساوي القيمة النموذجية للحركية الإلكترونية من أجل مادة GaAs عالية النقاوة إلى $\mu = 7500 \text{ cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$.

→ ومن أجل هذه الحركية يساوي زمن الطيران الحر القيمة: $\tau_e = 2.9 \times 10^{-13} \text{ s}$.

→ وتبلغ السرعة الحرارية للإلكترونات في درجة الحرارة المعطاة

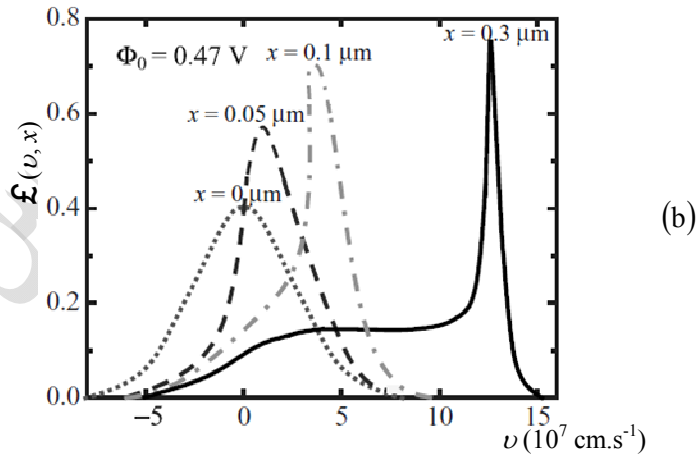
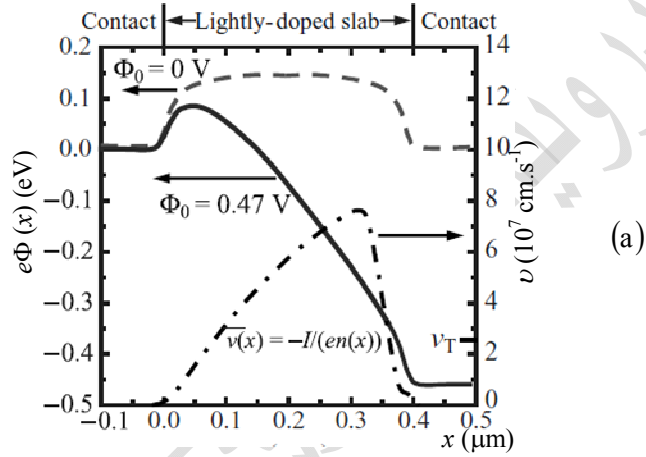
$$v_T = \sqrt{k_B T / m^*} \approx 2.6 \times 10^7 \text{ cm/s}$$

→ ومن ثمّ يبلغ المسار الحر الوسطي للإلكترون القيمة $l_e = 0.075 \mu m$ ، ومن ثمّ

$$L_x / l_e \approx 5$$

→ وهذا يعني الإلكترونات التي سرعاتها الحرارية تساوي v_T تتعرض أثناء طيرانها عبر عينة منتظمة بطول اختياري، L_x لعددٍ من التصادمات تبلغ وسطياً حتى الخمسة تصادمات. ومن أجل عينة كهذه، سيكون النقل تبددياً على الأغلب.

→ أمّا من أجل ديودٍ واقعٍ تحت تأثير انحيازٍ شديدٍ بمقدورنا التوصل لاستنتاجات مختلفة تماماً؛



الشكل (6-15): نتائج النمذجة العددية لديود مصنوع من GaAs: (a) توزع الطاقة الكامنة للإلكترونات، $e\Phi_x$ ، والسرعة الوسطية، $\bar{v}(x)$ ، بين طرفي الديود؛ والشكل (b) يوضح توزع التابع $\mathcal{L}(v, x)$ عند المسافات $0.05, 0.1, 0.3 \mu\text{m}$

الجهد المطبق $\Phi_0 = 0.47 \text{ V}$ ؛ والسرعة الحرارية، v_T ، تساوي $2.6 \times 10^7 \text{ cm/s}$

إذ يعرض الشكل (15a-6) الشكل العام للطاقة الكامنة للإلكترونات والسرعة الإلكترونية الوسطية من أجل جهد مُطبق قيمته $\Phi_0 = 0.47 \text{ V}$ ، وبغرض المقارنة، تمت الإشارة إلى السرعة الحرارية في هذا الشكل أيضاً: يمكننا أن نرى هنا أن السرعة الوسطية القصوى **تزيد عن** $7 \times 10^7 \text{ cm/s}$. فضلاً عن أن المسار الحر الوسطي الفعلي يُقدَّر بقيمة أكبر، $0.07 \mu\text{m} \leq l_e \leq 0.2 \mu\text{m}$.

وهكذا نجد أن هذا المثال يوافق حالة وسطية بين نقل باليستي صرف ونقل تبديدي. ومن أجل هكذا حالة، **ثمة إلكترونات مختلفة تمتلك سرعات مختلفة** ومن المحتمل توصيف هذه الإلكترونات بتابع توزع، f ، على السرعات v : يتعلق التوزع بالمسافة على طول الديود أيضاً، x : $f(v, x)$.

يوضح الشكل (15b-6) تابع التوزع من أجل مسافات مختلفة، x . يُشار إلى التوزع الحراري للإلكترونات في المهبط **بالخط المتقطع**؛ إذ من الواضح، أن توزع مكسويل الممثل بالمعادلة (16-6) يوافق درجة الحرارة $T = 300 \text{ K}$.

فعلياً، يُحدِّد هذا التوزع سرعات الإلكترونات المحقونة. ويُعدُّ "التناثر Spreading" الأولي للإلكترونات على السرعات في المهبط أحد الفوارق الرئيسية عن النموذج البسيط الذي جرى تحليله سابقاً والذي تكون **الإلكترونات فيه محقونة بسرعة قريبة من الصفر**. ويُصبح التوزع داخل الديود **شديد التناحي (الأنزوتروبية) Anisotropic**:

- **فالإلكترونات ذات السرعات السالبة تغيب بمعظمها.**
- **ومع ازدياد المسافة يُصبح التوزع التناحي أكثر فأكثر مترافقاً بقيمة قصوى (ذروة) Maximum أكثر وضوحاً.** إذ من أجل مسافات أكبر توافق هذه الذروة - تقريباً - قيمة أُعطيت في نموذج النقل الباليستي الصرف الذي تمت مناقشته سابقاً.

يُبرزُ هذا المثال الطبيعة الحقيقية لديود باليستي تقريباً: تُسهِم بعض الإلكترونات في النقل ويحدث بعض الانتثار على السرعة. ولكن الخصائص الوسطية للديود قريبة جداً من الخصائص التي تم الحصول عليها في النموذج البسيط الذي تأسس على معادلات نيوتن وبواسون التقليدية.

يسمح النموذج البسيط الذي تمت مناقشته سابقاً بالتحري عن خصائص الديود الباليستي في حالة الترددات العالية وحساب ممانعته. إذ يُعطى الجزآن الحقيقي Real والتخيلي Imaginary للممانعة بالمعادلتين الآتيتين:

$$\text{Re} [Z(\Omega)] = \frac{12R_d}{\Omega^4} [2(1 - \cos \Omega) - \Omega \sin \Omega], \quad (93-6)$$

$$\text{Im} [Z(\Omega)] = \frac{12R_d}{\Omega^4} \left[2 \sin \Omega - \Omega (1 + \cos \Omega) - \frac{\Omega^3}{6} \right], \quad (94-6)$$

حيث $R_d = d\Phi_0 / dJ_0$ المقاومة التفاضلية المحسوبة عبر استخدام الخاصة المميزة (تيار - جهد) في الحالة المستقرة، المعادلة (90-6)، و $\Omega = \omega t_{tr,b}$ ، أي التردد المُقاس بوحدة قياس **مقلوب زمن النقل الإلكتروني** المُعرّف بالمعادلة (91-6).

يوضح الشكل (16-6) كلتا التابعيتين $\text{Re} [Z(\Omega)]$ و $\text{Im} [Z(\Omega)]$ ؛ فتبعاً للمعادلتين (93-6) و (94-6) وتعريف المقاومة التفاضلية R_d ، **تتناقص قيمتا الممانعتين الحقيقية والتخيلية $\text{Re} [Z(\Omega)]$ و $\text{Im} [Z(\Omega)]$ بازياد جهد الانحياز Φ_0** ، لأن:

$$R_d = \frac{d\Phi_0}{dJ_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3m^*}{e\Phi_0} \frac{L_x^2}{\epsilon_0 \epsilon}}$$

→ هذا يعني أن استجابة التيار تُصبح أكبر عند الانحيازات الأكبر بحكم التبعية $(R_d \propto 1/\sqrt{\Phi_0})$.

→ وبنفس الوقت تتوسع المنطقة الترددية، التي يبقى ضمنها الديود نشطاً، مع **الانحياز بحكم التبعية $\omega = t_{tr,b}^{-1} \propto \sqrt{\Phi_0}$** .

→ إن هذه الصفات تشابه تلك التي تم تحصيلها من أجل ديود موت - غيرني التبددي Dissipative Mott-Gurney Diode تماماً، راجع المعادلة (6-77).

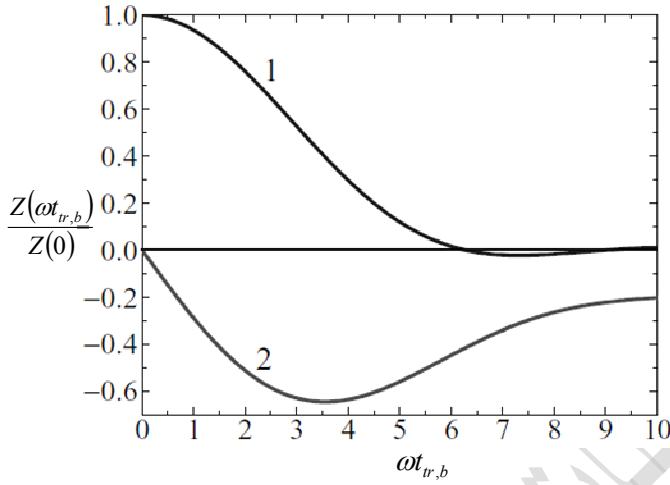
→ ومن حيث المبدأ، **ثمة صفة جديدة** تكمن في الاهتزازات الممكن رصدتها للكيميتين $\text{Re} [Z(\Omega)]$ و $\text{Im} [Z(\Omega)]$ مع التردد ω وتبرز "النوافذ الترددية Frequency Windows" **بقيم سالبة** للكمية الحقيقية $\text{Re} [Z(\Omega)]$ ؛

→ "فالنافذة" الأولى الموافقة لـ $\text{Re} [Z(\Omega)] < 0$ تحدث من أجل الترددات ω الواقعة

بين $6.3/t_{tr,b}$ و $9/t_{tr,b}$ ، ومن المعلوم أن **الكمية $\text{Re} [Z(\Omega)]$ السالبة توافق**

عدم استقرار كهربائي عند التردد ω . ويمكن استعمال عدم الاستقرار هذا في توليد

اهتزازات كهروطيسية عالية التواتر.



الشكل (6-16): تابعة القسمين الحقيقي (المنحني 1) والتخيلي (المنحني 2) للممانعة الكهربائية العقدية للتردد ω المعرفين بالمعادلتين (93-6) و (94-6)؛ $Z(0) = Z(\omega = 0)$.

يجدر بالذكر في الختام أن النبيلة النانومترية الباليستية هي أسرع النبائط التي تستند إلى النقل الإلكتروني التقليدي في آلية عملها؛ إذ ينشأ تيار كهربائي محدود ومقاومة كهربائية محدودة من دون تبعثر إلكتروني بفضل المفاعيل الكهراكدة المتحرّضة نتيجة إعادة توزع الإلكترونات المشحونة في النبيلة؛ وهذا هو السبب، الذي يجعل هذه الحالة مرتبطة بالنقل المحدود بالشحنة. وتمتاز الديودات الباليستية أيضاً "بنوافذ ترددية" تكون فيها المقاومة الديناميكية للنبيلة سالبة مما يؤدي إلى تقوية الاستقرار الكهربائي واحتمال توليد إشعاع كهرومغناطيسي فائق التردد.

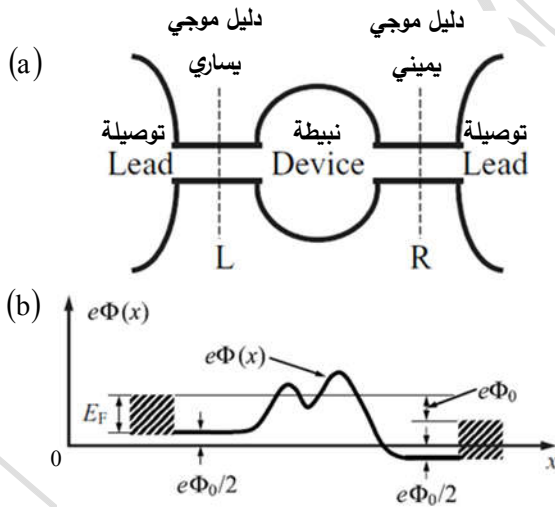
دراسة النقل الباليستي الكومومي وعلاقة لاندوير:

Quantum Ballistic Transport: the Landauer Formula

يُعدُّ الوصف النظري العام لأنظمة النقل الكومومي المختلفة مسألة معقدة جداً، يصعب عرضها هنا. و عوضاً عن ذلك ندرس أبسط حالة للنقل الإلكتروني المستقل عن الزمن وفي درجة حرارة منخفضة حيث يمكن إهمال العمليات اللامرنة.

إذن، تبعاً للتصنيف المعطى في الجدول 6-1 سندرس الآن النظام الميزوسكوبي للنقل الإلكتروني. فكما أشرنا سابقاً يتعلق النقل في النماذج الميزوسكوبية نانوية البنية بكل من هندسة البنية النانوية و"وسائط التوصيل Leads" (مساري، وتماسات، وأسلاك توصيل، ووصلات بينية، الخ) التي تربط النبضة بدارة كهربائية خارجية، ولذلك، سندرس الجملة كاملةً: (جملة النبضة - توصيلات).

يوضح الشكل (6-17) الصفات الجوهرية للنموذج المبسط؛ فالجملة تتألف من:



الجدول (6-17): (a) رسم تخطيطي لنبضة ميزوسكوبية نانوية البنية شكل الطاقة الكامنة، $e\Phi(x)$ ، في نبضة ميزوسكوبية منحازة.

→ توصيلتين يُطبَّق عليهما جهد انحياز،

→ و"دليلي موجة إلكترونيين؛ L و R (يمكن عدُّهما بمثابة سلكين كوموميين)،

→ والنبضة بحد ذاتها.

يهدف تقادي ضرورة التوصيف المفصل للتوصيلات نعدّها خزانات إلكترونية حيث تكون عمليات استرخاء الطاقة والاندفاع فعالةً إلى درجة تبقى عندها الإلكترونات في حالة توازن حتى في شروط الانحياز بالجهد المطبق المعطى.

إن، يُفترض أن تكون الشروط الحديّة عند السطح الفاصل بين التوصيلات والنبیطة معینةً بتابع **توزّع فيرمي المتوازن**، الممثل بالمعادلة (6-18). إنَّ التركيز الإلكتروني في التوصيلات كبيرٌ جداً لدرجة أن الكمون الكهرلكدي في كل توصيلة يجب عدّه ثابتاً، كما في **حالة فلز**.

- لیکن E_F طاقة فيرمي للإلكترونات في التوصيلات بغياب الانحياز؛
- وبتطبيق جهد انحياز Φ_0 ، يُصبح مستوى فيرمي مساوياً في إحدى التوصيلتين

$$E - \frac{1}{2}e\Phi_0$$

وفي التوصيلة الأخرى $E + \frac{1}{2}e\Phi_0$ ، كما يوضح الشكل (6-17b).

- ولذلك، تكون توابع التوزّع الإلكتروني في التوصيلتين اليسرى واليمنى من الشكل

$$F_F\left(E - \frac{1}{2}e\Phi_0 - E_F\right) \quad \text{و} \quad F_F\left(E + \frac{1}{2}e\Phi_0 - E_F\right) \quad (95-6)$$

على الترتيب، حيث E الطاقة الحركية للإلكترونات.

وجدنا في مقرر علم النانو أثناء دراسة **الأسلاك الكمومية** أن الطيف الإلكتروني يتألف

من سلسلة عصابات - جزئية أحادية البعد بطاقات مساوية:

$$E_{k_x, n, m} = \varepsilon_{n, m} + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*}. \quad (96-6)$$

حيث n و m عددان صحيحان و k_x متجه موجي أحادي البعد يتجه على طول محور السلك الكمومي.

يمكن كتابة التابع الموجي الإلكتروني بالشكل الآتي:

$$\psi(x, y, z) = \psi_{\perp}(y, z) \psi_{\parallel}(x). \quad (97-6)$$

→ تصف مُركبة التابع الموجي $\psi_{\perp}(y, z)$ التوزّع العرضاني للإلكترونات في السلك الكمومي،

→ في حين تصف المُركبة $\psi_{\parallel}(x)$ الحركة الانسحابية للإلكترونات على طول أسلاك

التوصيل الكمومية، وهي تتألف بشكل عام من أمواج مستوية $e^{\pm ik_x x}$.

بما أن النقل الإلكتروني يحدث على طول الأسلاك، فلا بد من تحليل التابع الموجي $\psi_{||}(x)$:
 إذ بمقدورنا كتابة التابع الموجي للإلكترونات، $\psi_{||}(x)$ ، عند السطوح الفاصلة بين التوصيلات
 والنبیطة.

أشير إلى هذه السطوح الفاصلة في الشكل (6-17) بالمقطعین العرضیین المُرْمَزين بالحرفین
 L و R.

يُعبّر عن التابع الموجي، $\psi_{||,l}(x)$ ، للإلكترونات القادمة من السلك اليساري بالعلاقة الآتية:

$$\psi_{||,l}(x) = \begin{cases} e^{ik_1(x-x_1)} + r_1 e^{-ik_1(x-x_1)}, & x \sim x_1 \\ t_r e^{ik_r(x-x_r)}, & x \sim x_r \end{cases}, \quad (98-6)$$

حيث يرمز الرمز x_1 لإحداثية المقطع العرضي اليساري L
 و x_r إحداثية المقطع العرضي اليميني R،
 وهذا يعني أن التابع الموجي عند المقطع العرضي -L يتألف من أمواج واردة ومنعكسة،
 في حين تتوقّف عند المقطع العرضي -R فقط تلك الموجة التي ستعبر النبیطة (النافذة):
 ويُمثّل المعامل t_r مطال الأمواج النافذة و المعامل r_1 مطال الأمواج المنعكسة.
 يتعلق هذان المعاملان **بشكل الكمون الخاص Potential Profile** في النبیطة، **وبأبعاده
 الهندسية، الخ.**

وبشكلٍ مشابهٍ نستطيع كتابة التابع الموجي للإلكترونات القادمة من السلك اليميني،
 $\psi_{||,r}(x)$ ، بالشكل الآتي:

$$\psi_{||,r}(x) = \begin{cases} t_l e^{-ik_1(x-x_1)}, & x \sim x_1 \\ e^{-ik_r(x-x_r)} + r_r e^{ik_r(x-x_r)}, & x \sim x_r \end{cases}. \quad (99-6)$$

تمثّل الكميتان k_r و k_1 في المعادلتين (98-6) و (99-6) المتجهين الموجيين في المقطعين
 العرضيين اليساري واليميني على الترتيب.

إن المعاملات t_r ، و r_1 ، و t_l ، و r_r تتربط فيما بينها ببعض العلاقات الأساسية
 التي بدورها لا ترتبط بتصميم معيّن للنبیطة. يُعطي شرط استمرارية التيار من أجل كلا
 التابعين الموجيين $\psi_{||,l}(x)$ و $\psi_{||,r}(x)$ بالعلاقتين الآتيتين:

$$k_r(1 - |r_r|^2) = k_1 |t_1|^2 \quad \text{و} \quad k_1(1 - |r_1|^2) = k_r |t_r|^2 \quad (100-6)$$

وثمة علاقات مهمة أخرى هي:

$$t_r^* t_1 = t_r t_1^* \quad \text{و} \quad |r_1|^2 = |r_r|^2 \quad (101-6)$$

وعندها نحصل باستخدام المعادلة (100-6) على المساواة الآتية:

$$k_r^2 |t_r|^2 = k_1^2 |t_1|^2. \quad (102-6)$$

وبعد التعويض عن التوابع الموجية من المعادلتين (98-6) و (99-6) في **المعادلة**

$$i = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

التي تُعرّف **تدفق الجسيمات**، يمكننا حساب التدفقات الإلكترونية القادمة إلى النبيطة، i_{in} ، والخارجة منها، i_{out} :

$$i_{out} = v_r |t_r|^2 \quad \text{و} \quad i_{in} = v_1 \quad (103-6)$$

حيث $v_1 = \hbar k_1 / m^*$ سرعة الإلكترونات عند المقطع العرضي L

و $v_r = \hbar k_r / m^*$ سرعة الإلكترونات عند المقطع العرضي R.

تُعرّف نسبة هاتين الكميتين **معامل النفوذ** من أجل الإلكترونات المنتقلة عبر النبيطة من اليسار نحو اليمين:

$$T_{1 \rightarrow r}(E) = \frac{i_{out}}{i_{in}} = \frac{k_r}{k_1} |t_r|^2. \quad (104-6)$$

كما يساوي **معامل النفوذ** الموافق للإلكترونات المنتقلة عبر النبيطة من اليمين نحو اليسار إلى:

$$T_{r \rightarrow 1}(E) = \frac{i_{out}}{i_{in}} = \frac{k_1}{k_r} |t_1|^2. \quad (105-6)$$

وهكذا يمكننا أن نجد من المعادلات (102-6) و (104-6) و (105-6) العلاقة الآتية:

$$T_{1 \rightarrow r}(E) = T_{r \rightarrow 1}(E) = T(E_{||}), \quad (106-6)$$

حيث

$$E_{||} = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} \quad (107-6)$$

الطاقة الحركية الموافقة للمركبة الطولانية للاندفاع الإلكتروني.

نستنتج مما سبق أن معاملات النفوذ هي نفسها من أجل كلا الاتجاهين للإلكترونات القادمة. تُعرّف نسبة التدفقات الإلكترونية المنعكسة والواردة معامل الانعكاس الآتي:

$$R(E) = \frac{i_r}{i_{in}} = |r_1|^2 = |r_r|^2. \quad (108-6)$$

ومن الواضح هنا أن:

$$T(E) + R(E) = 1. \quad (109-6)$$

بمقدورنا الآن أن نأخذ بالحسبان مساهمات كل الإلكترونات الداخلة إلى النبيلة من كلتا التوصيلتين في التيار الكهربائي.

لندرس حالة طاقة للإلكترونات الواقعة في التوصيلة اليسارية مثلاً، ذات الأعداد الكمومية k_x ، و n ، و m :

يُعطى عدد الإلكترونات في هذه الحالة الطاقةية بالمقدار $(2F_F(E(k_x, n, m) + \frac{1}{2}e\Phi_0 - E_F))$ ، حيث ينشأ العامل 2 من التحلل السبيني. إذا كان L_c **طول الوصلة**، فإن عدد الإلكترونات في وحدة طول الوصلة يساوي $2F_F/L_c$ ، ومن ثمّ تساوي المساهمة الإجمالية للإلكترونات **الداخلة من جهة اليسار** في التيار الكهربائي:

$$I_1 = -\frac{2e}{L_c} \sum_{n,m} \sum_{k_x > 0} \nu_{||} T(E_{||}) F_F(E(k_x, n, m) + \frac{1}{2}e\Phi_0 - E_F). \quad (110-6)$$

وبشكلٍ مشابهٍ، نحصل على المساهمة الإجمالية للإلكترونات **الداخلة من جهة اليمين** في التيار الكهربائي:

$$I_r = \frac{2e}{L_c} \sum_{n,m} \sum_{k_x < 0} \nu_{||} T(E_{||}) F_F(E(k_x, n, m) - \frac{1}{2}e\Phi_0 - E_F). \quad (111-6)$$

$$I = I_1 - I_r \quad \text{ومن ثمّ يساوي التيار الكليّ المار في النبيلة:} \quad (112-6)$$

$$I = \frac{-2e}{L_c} \sum_{n,m} \sum_{k_x > 0} \nu_{||} T(E_{||}) \Delta F_F = \frac{-2e}{L_c} \sum_{n,m} \sum_{k_x > 0} \nu_{||} T(E_{||}) [F_F(E(k_x, n, m) + \frac{1}{2}e\Phi_0 - E_F) - F_F(E(k_x, n, m) - \frac{1}{2}e\Phi_0 - E_F)].$$

بما أن السرعة الإلكترونية، $v_{||}$ ، ومعامل النفوذ، T ، من أجل النموذج المدروس هنا، مستقلتان عن الأعداد الكمومية العرضانية، n و m ، فإننا نستطيع حساب المجموع بالعددين n و m : وبالأخذ بالحسبان الشكل المبسط لتابع **توزع فيرمي**، F_F ، فمن المناسب إدخال تابع التوزع المرتبط بالطاقة الحركية $E_{||}$ فقط:

$$F_F(E_{||}) = 2 \sum_{n,m} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_{||} + \varepsilon_{n,m} - E_F}{k_B T}\right)}. \quad (113-6)$$

وبعد ذلك، كما في المعادلة (30-6)، يمكن استبدال المجموع على k_x في المعادلة (112-6) بالتكامل:

$$\sum_{k_x} \{ \dots \} \rightarrow \frac{L_c}{2\pi} \int dk_x \{ \dots \} = \frac{L_c}{2\pi} \int \frac{dE_{||}}{\hbar v_{||}} \{ \dots \}. \quad (114-6)$$

وأخيراً، نحصل على علاقة التيار الكلي الآتية:

$$I = -e \int \frac{1}{2\pi \hbar} T(E_{||}) \left[F_F(E_{||} + \frac{1}{2}e\Phi_0 - E_F) - F_F(E_{||} - \frac{1}{2}e\Phi_0 - E_F) \right] dE_{||}, \quad (115-6)$$

حيث يشمل مجال التكامل الطاقة الحركية للحركة الطولية $E_{||}$ ؛ نلاحظ هنا، أن السرعة الإلكترونية لا تظهر في العلاقة النهائية للتيار الكلي، I . يمكن تطبيق هذه النتيجة العامة على مجموعة متنوعة من الحالات المختلفة، ندرس اثنتين منها؛

أولاً- حالة نبيطة كبيرة ماكروسكوبياً في الاتجاهات العرضانية:

A Device Macroscopically Large in the Transverse Directions

الأعداد الكوانتية في هذه الحالة هي المتجهات الموجية $n = k_y$ و $m = k_z$ ؛ ثم إن:

$$\varepsilon_{n,m} = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_y^2 + k_z^2).$$

ويمكن حساب التابع الممثل بالمعادلة (113-6) بسهولة؛

$$F_F(E_{||}) = S \frac{m^* k_B T}{\pi \hbar^2} \ln \left[1 + \exp\left(\frac{E_F - E_{||}}{k_B T}\right) \right], \quad (116-6)$$

حيث S مساحة المقطع- العرضي.

إنَّ الحد $F_F(E_{||})$ يحمل معنى عدد الإلكترونات التي طاقاتها تساوي $E_{||}$. وهكذا، نجد أنَّ كثافة التيار الكلية، $J = I/S$ ، تساوي:

$$J = -e \frac{m^* k_B T}{\pi \hbar^2} \int \frac{dE_{||}}{2\pi \hbar} T(E_{||}) \ln \left[\frac{1 + \exp \left(\frac{E_F - E_{||} + \frac{1}{2} e \Phi_0}{k_B T} \right)}{1 + \exp \left(\frac{E_F - E_{||} - \frac{1}{2} e \Phi_0}{k_B T} \right)} \right]. \quad (117-6)$$

وهذه النتيجة مفيدة فعلياً، طالما أن المعادلة (117-6) تسمح لنا بحساب الخاصية المميزة (تيار - جهد) لنبيطة نانوية البنية، وإيجاد تابعيتها لتركيز الإلكترونات، ودرجة الحرارة، الخ؛ ومن المفيد الحصول على تيارٍ محدودٍ Finite Current في هذه النبيطة الواقعة تحت تأثير جهد انحيازٍ حيث لا يوجد تبعثرٍ، مما يعني أنَّ النبيطة تمتلك مقاومة كهربائية يمكن تفسيرها بمعاملين؛

الأول بالانعكاس الكوموي للموجات الإلكترونية داخل النبيطة،

والثاني بعدد الإلكترونات المحدود الذي يمكن حقه في النبيطة.

يجدر بالذكر أنَّ إعادة توزُّع الشحنة الكهربائية لم تُدرس هنا، مما يعني أنَّها فُرضت تيارات صغيرة نسبياً.

ثانياً- حالة نبيطة ناقلة للتيار في درجات الحرارة المنخفضة؛ علاقة لاندواير:

Device Conductance at Low Temperatures - The Landauer Formula

نعود هنا إلى النتيجة العامة المتمثلة بالمعادلة (112-6)، $I = I_1 - I_r$ ؛ إذ يمكن تبسيطها بشكلٍ كبيرٍ من أجل النقل الإلكتروني شبه المتوازن في درجات الحرارة المنخفضة: نعلم الآن أن تابع توزُّع فيرمي، F_F ، يُصبح في حدود درجة الحرارة الصفرية تابع -خطوة:

$$\lim_{T \rightarrow 0} F_F(E - E_F) = \Theta(E_F - E). \quad (118-6)$$

وإذا كان الجهد المطبَّق، Φ_0 ، بين طرفي النبيطة صغيراً، فإن الفارق بين تابعي التوزُّع الموجودين في المجموع، في المعادلة (112-6)، يساوي:

$$F_F(E(k_x, n, m) + \frac{1}{2} e \Phi_0 - E_F) - F_F(E(k_x, n, m) - \frac{1}{2} e \Phi_0 - E_F) = e \Phi_0 \delta(E_F - E), \quad (119-6)$$

ومن ثمَّ تصبح المعادلة (112-6) من الشكل الآتي:

$$I = -\frac{2e}{L_c} \sum_{n,m} \sum_{k_x > 0} v_{||} T(E_{||}) [e \Phi_0 \delta(E_F - E)].$$

حيث أخذنا بالحسبان حقيقة أن مشتق تابع توزع فيرمي الشبيه بالخطوة يُعد تابع δ . إذن، يتناسب التيار مع جهد الانحياز، Φ_0 ، تناسباً طردياً.

نستطيع أن ندخل في هذه الدراسة ناقليّة $Conductance$ نبيطة نانوية البنية، تُعرّف بالنسبة:

$$G = \frac{I}{\Phi_0} = -\frac{2e^2}{L_c} \sum_{n,m} \sum_{k_x} v_{||} T(E_{||}) \delta(E_F - E). \quad (120-6)$$

نحصل من المعادلات (112-6)، و(114-6)، و(119-6)، و(120-6) على الناقليّة في درجات الحرارة المنخفضة التي تأخذ الشكل الآتي:

$$G = \frac{e^2}{h} \sum_{n,m,s} T(E_F, n, m) = 2 \frac{e^2}{h} \sum_{n,m} T(E_F, n, m), \quad (121-6) \text{ (علاقة لانداوير)}$$

حيث يمتد المجموع على الحالات الطاقية الإلكترونية (n, m) ذات الطاقات $E < E_F$ فقط. يسمى المعامل الواقع أمام إشارة المجموع في المعادلة (121-6)؛

$$G_0 = \frac{e^2}{h} \quad (122-6)$$

كمّ الناقليّة الكهربية *Quantum of Conductance*.

إن كمّ الناقليّة يساوي $G_0 = 39.6 \mu S$ ، $(1 \text{ siemens} = 1 S)$ ، ومقلوب هذا الكمّ يساوي

$1/G_0 = 25.2 \text{ k}\Omega$. تسمى المعادلة (121-6) عادةً **علاقة لانداوير** *Landauer Formula*.

من الملائم أحياناً دراسة حالات إلكترونية توافق أعداد كمومية (n, m) مختلفة في إطار قنوات منفصلة لنقل الإلكترونات؛ **وفي هذا السياق**، يمكن إعادة كتابة العلاقة الأخيرة، (121-6)، بالشكل الآتي:

$$G = 2 G_0 \sum_{n,m} T_{n,m} \quad \text{with } T_{n,m} = T(E_F, n, m), \quad (123-6)$$

حيث تُسهم كل قناة (n, m) في الناقليّة، G ، بالمقدار $G_0 T_{n,m}$.

فإذا كانت القناة الموافقة للحالة الكمومية (n, m) **شفافةً** للإلكترونات، فإن $T_{n,m} = 1$ ،

ومساهمة هذه القناة تساوي كمّ الناقليّة الممثل بالمعادلة (122-6).

يُعزى هذا النظام- نظام النقل الإلكتروني المدروس أعلاه إلى ما يسمى **النقل**

الباليستي الكمومي أيضاً. وهكذا نجد أن نبيطة نانويةً تتصرف بنقلٍ باليستي كموميّ **تُبدي**

ناقليّة محدودة (وبطبيعة الحال مقاومة محدودة). وعموماً، تتعلق الناقليّة بكل من:

• معامل النفوذ للنيبطة

• وتوابع توزع فيرمي في التوصيلات؛

وعلى وجه الخصوص، حتى وإن كانت النيبطة شفافةً للموجة الإلكترونية تماماً، $T=1$ ، فإن الناقلية تبقى محدودة وتساوي كمّ الناقلية G_0 . إنَّ أي زيادة في إسكان العصابات- الجزيئية العلوية منخفضة البعد، تؤدي إلى سلوكٍ غير اعتيادي للناقلية: في الواقع، في درجة الحرارة المنخفضة، لاسيما عندما $k_B T \ll E_F$ ، فإن العصابات- الجزيئية التي من أجلها طاقة قيعانها Bottoms أقل من طاقة فيرمي، $\epsilon_{n,m} < E_F$ ، تكون هي المشغولة دون سواها بالإلكترونات. وإذا بدأت عصابة- جزيئية جديدة بالانشغال، بنتيجة تغير طاقة فيرمي F_F ، فإن ناقلية النيبطة تزداد بأسلوبٍ شبيهٍ بتابع- الخطوة بصورة مستقلة عن كمية الإلكترونات التي تشغل هذه العصابة- الجزيئية الجديدة.

وفي الختام، يجدر بالذكر أن علاقة لاندواير تصف نقلاً كمومياً للإلكترونات في نبائط ميزوسكوبية؛ وهي صالحة من أجل درجة حرارة منخفضة وعند تطبيق جهد انحيازٍ صغيرٍ.