كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : الكتروديناميك

المحاضرة: الثالثة/نظري/

القسم: فيزياء
السنة: الثالثة
المادة: الالكتروديناميك

الدكتور: محمد مهود
المحاضرة:
الثالثة نظري

التاريخ: / /

A to Z Library for university services

الكمون السلمي والمتجهي $\hat{H}$:

سندرس بهذا الفصل كيف أن المصادر (المنابع) تشع الحقول الكهربائية والمغناطيسية
بمعنى آخر سنسعى إلى إيجاد الحل العام لمعادلات مكسويل :

(1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

(2) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

(3) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

(4) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

لنفرض أن: $\rho(r,t)$ و $J(r,t)$ معلومان يتطلب إيجاد الحقول الكهربائية
والمغناطيسية بإيجاد قانوني كولوم وبيو سافارت :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J(r')\times r'}{r^2}\,d\tau$$

من قانوني كولوم وبيو سافارت يمكن لنا أن نعممها إلى صيغ معتمدة على
الزمن لدينا في الكهرباء الساكنة $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$

ونعلم من الرياضيات إذا كان دوران متجه معدوم فإنه يمكننا كتابة هذا المتجه كتدرج
لمقدار سلمي $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\vec{\nabla}V$

ولكن هذه القاعدة غير ممكنة في الالكتروديناميك لأن دوران $\vec{E}$ غير معدوم في
الالكتروديناميك كما أخذنا من المعادلة (2) $\vec{\nabla}\cdot B = 0$
أي تباعد المتجه $\vec{B}$ معدوم
وكذلك نعلم من الرياضيات إذا كان تباعد متجه معدوم
فإنه يمكننا كتابة هذا المتجه أي أنه يساوي إلى دوران متجه آخر لنرمز له ب

هذا المتجه بهذه الحالة بالرمز $\vec{A}$ ونكتب $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ بالتعويض في هذه العلاقات

بقانون ماكسويل (3) ينتج أن

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \times \left(E + \frac{dA}{dt}\right) = 0$$

بما أن الدوران لهذا المتجه معدوم حسب ما ذكر سابقاً فيمكن كتابة هذا المتجه بما

يساوي مقدار سلمياً

$$\vec{E} + \frac{dA}{dt} = -\vec{\nabla} . V$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} . V - \frac{dA}{dt} \quad \ldots (3)$$

نحصل من هذه المعادلة على أنه عندما يكون الجهد والكمون A ثابتين على الصيغة

للحقل $E = -\vec{\nabla} . V$ هذه في الكهرباء الساكنة.

تحقق تمثيل الكمون آلياً معادلات ماكسويل (2) و (3) ولكن ماذا عن قانون

غوص من معادلة أولى ومعادلة الرابعة:

نعوض من معادلة (3) من معادلة ماكسويل:

$$\vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla} . V) - \frac{dA}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 . V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \vec{A}) = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

تعبر هذه المعادلة عن معادلة بواسون في الكهروديناميك ويمكن منها الحصول

على صيغة معادلة بواسون في الكهرباء الساكنة $\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon}$

وكذلك بالتعويض في (1) و (3) بمعادلة ماكسويل 4 أن

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 J - \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \frac{dV}{dt} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 A}{dt^2}$$

$$\nabla^2 A - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\mu_0 \vec{J} \quad \dots (5)$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2 A$$

تتضمن (4) و (5) كل المعلومات الموجودة في معادلات ماكسويل.

مثال: أوجد الحقول الكهربائية والمغناطيسية والشحنة الموافقة لـ $V(r,t)=0$

$$A(r,t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{r}$$

الحل:

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} = 0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$$

في الاحداثيات الاسطوانية:

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

في الإحداثيات الكروية:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

مثال: $V=0,\ \vec{A} = A_0 \sin(kx - \omega t)\,\vec{y}$

حيث A_0 ، ω و K ثوابت أوجد $\vec{E}$ و $\vec{B}$ وتأكد أنها تحققان معادلة ماكسويل في الخلاء:

الحل: $E = -\nabla V - \frac{dA}{dt} = 0 - \omega A_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{y}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ 0 & A_0 \sin(kx-\omega t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = 0 + 0 + KA_0 \cos(Kx - \omega t)\,\hat{z}.$$

بما أن $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ و $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ محققة في الفراغ لذلك نتأكد من أن $\vec{E}$ و $\vec{B}$

تحققان معادلة ماكسويل الثالثة نحسب الطرف اليساري منها:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ 0 & -\omega A_0 \cos(Kx-\omega t) & 0 \end{vmatrix} = \omega K A_0 \sin(Kx - \omega t)\,\hat{z} \quad *$$

ثم نحسب من الطرف الأيمن من معادلة (3)

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = -(K\omega_0 A \sin(Kx - \omega t)\,\hat{z}$$

لنتأكد أن الحقل الكهربائي المغناطيسي يحققان ماكسويل الرابعة نحسب أولاً الطرف اليساري:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ 0 & 0 & KA\cos(kx-\omega t) \end{vmatrix} = K^2 A_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{y}$$

بينما الطرف اليميني من معادلة (4) يساوي الجب:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 A_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{y}$$

الفصل الرابع

((إحصاء ماكسويل - بولتزمان))

العدد الإجمالي لحالات التوزع المجهري (الوزن الإحصائي) الموافقة للحالة الماكروية وفق إحصاء ماكسويل - بولتزمان يعطى بالعلاقة:

$$W_{M-B} = N! \underbrace{\prod_i}_{\text{جداء}} \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$$

مثال: جملة معزولة مكونة من جسيمين متمايزين A و B موزعين على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ و $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$ متعددة الشكل $g_1 = 1, g_2 = 2$

المطلوب: (1) أوجد حالات التوازع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها؟

(2) أوجد الوزن الإحصائي لكل حالة ماكروية مع التمثيل واستنتج حالة التوازن؟

الحل (1)

$$N_0 = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!\,(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,.\,1!} = 3$$

(2,0) (0,2) (1,1)

$$U(2,0) = \sum \varepsilon_i N_i = \varepsilon_1 N_1 + \varepsilon_2 N_2 + \varepsilon_3 N_3$$

$$= 2\varepsilon_0 + 0 = 2\varepsilon_0$$

$$U(0,2) = 0 + 2\varepsilon_0(2) = 4\varepsilon_0$$

$$U(1,1) = \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 = 3\varepsilon_0$$

(2) نوجد الوزن الإحصائي

$$W_{M-B}(2,0) = N!\left(\frac{g_1^{N_1}}{N_1!} \times \frac{g_2^{N_2}}{N_2!}\right)$$

$$W_{M-B}(2,0) = 2!\left(\frac{1^2}{2!} \times \frac{2^0}{0!}\right) = 1$$ احتمال واحد

$$W_{M-B}(0,2) = 2!\left(\frac{1^0}{0!} \times \frac{2^2}{2!}\right) = 4$$ أربع احتمالات

$$W_{M-B}(1,1) = 2!\left(\frac{1^1}{1!} \times \frac{2^1}{1!}\right) = 4$$ حالات

نوجد حالة التوازن حالة (١،١) لأن الطاقة الداخلية أقل $3\varepsilon_0$

تعطى معادلة الاتزان الحراري للجملة الموافقة للحالة الأكثر احتمالاً بالعلاقة:

$$d\ln W_{max} + \alpha dV + \beta dU = 0$$

مضروبي لاغرانج

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{m}{2kT} \\ \beta = \dfrac{1}{kT} \end{cases}$$

W_{max}: الوزن الإحصائي الأعظمي للجملة

$$U = \sum \varepsilon_i N_i \quad , \quad N = \sum N_i$$

انتهت المحاضرة