كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : بصريات موجية

المحاضرة : الثانية/نظري/د .اصف

الترابط الزماني الجزئي :

تداخل موجتين وحيدتي اللون متقاربتين في تواترهما:

نصدر منبعاً ضوئياً موجتان لهما السعة نفسها و متقاربتين جداً في تواترهما فتشكل كل موجة مجموعة من الأهداب فإذا رمزنا بـ l لفرق السير الهندسي بين الموجتين الصادرتين من المنبعين S_1 ، S_2 فإن فرق السير الضوئي بين الأمواج ذات الطول λ_1 يكون

فرق السير الضوئي $\delta_{\lambda_1} = \overset{\text{السير الهندسي}}{l}\ \underset{\text{قرينة الانكسار}}{n_{\lambda_1}} \xRightarrow{\text{فرق طور}} \varphi_1 = \frac{2\pi l n_{\lambda_1}}{\lambda_1}$

أما فرق السير ذات الطول λ_2

$$\delta_{\lambda_2} = l\, n_{\lambda_2} \xRightarrow{\text{فرق طور}} \varphi_2 = \frac{2\pi l n_{\lambda_2}}{\lambda_2}$$

$n_{\lambda_1} = n_{\lambda_2}$ لأن تغير قرينة الانكسار بتغير طول الموجة هو تغير ضعيف وبالتالي علينا إهماله وبالتالي

$$\delta = l n_{\lambda_1} = l n_{\lambda_2}$$

تشكل الموجات الصادرة من المنبعين S_1 ، S_2 ذات الطول λ_1 عند التقائهما في النقطة M مجموعة من الأهداب شدة إضاءتها

$$I_1 = E_0(1+\cos\varphi_1)$$

وذات الطول λ_2 مجموعة من الأهداب

$$I_2 = E_0(1+\cos\varphi_2)$$

فتشاهد العين مجموع الشدتين

$$I = I_1 + I_2 = E_0[2+\cos\varphi_1+\cos\varphi_2]$$
$$= 2E_0\left[1+\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right]$$

حيث

$$\cos\varphi_1+\cos\varphi_2 = 2\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$$

$$\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = \pi\delta\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right) = \pi\delta\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}$$

و $\varphi_1 = \frac{2\pi l n_{\lambda_1}}{\lambda_1}$

$$\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = \pi\delta\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}$$

$\varphi_2 = \frac{2\pi l n_{\lambda_2}}{\lambda_2}$

وبما أن λ_1 تقترب من λ_2 فإننا نقبل الفرضيات التالية $\lambda_1\lambda_2 = \lambda^2$ ، $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = \lambda$ ، $\Delta\lambda = \lambda_2-\lambda_1$

$$\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = \pi\delta\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \quad و \quad \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = \pi\delta\frac{2}{\lambda}$$

بالتعويض في شدة الإضاءة

$$I = I_0\left[1+\cos\left(\pi\delta\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\right)\cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)\right] \quad و \quad I_0 = 2E_0$$

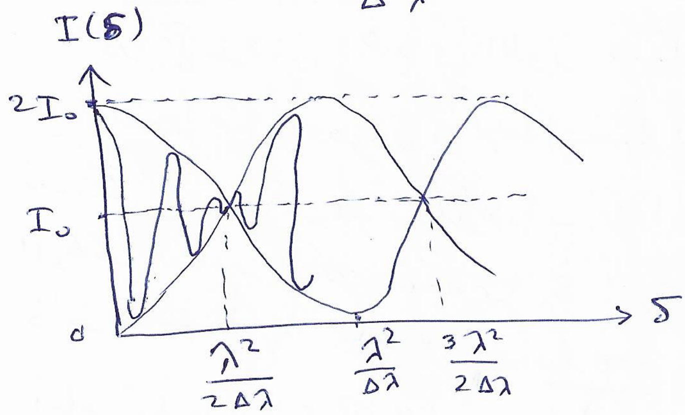
$\cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$ حد التداخل أما الحد $\cos\pi\delta\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$ وهو الحد المسؤول عن وضوح الأهداب

$$V(\delta) = \cos\pi\delta\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

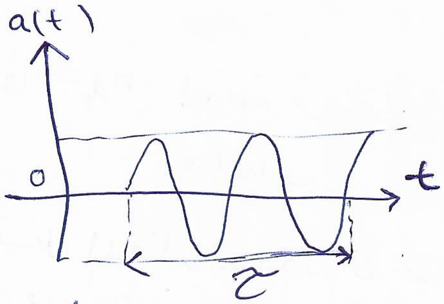
يكون أعظمياً عندما $\delta = 0 \Leftarrow V(\delta) = 1$

وعندما تبتعد M عن المركز فإن عامل الوضوح يضعف حتى ينعدم عندما $\delta = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$

ثم تبدو الأهداب من جديد واضحة تماماً عند $V(\delta)=-1$ أي $\delta = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$
وتتبادل مواضع الأهداب المظلمة والمضيئة



مفهوم قطار الأمواج



يمكن تفسير اختفاء الأهداب من المراتب العليا بأن الموجة الصادرة من المنبع لها عرض طيفي معين.

وتفسير آخر:

يوجد منبع ضوئي وحيد اللون تقريباً يصدر قطاراً من الأمواج الجيبية خلال فترة τ ويتبعه قطاراً آخر وهكذا يكون قطار الأمواج الصادر عن المنبع الوحيد اللون تقريباً يكون محدود أما قطار الأمواج الصادر من منبع وحيد اللون تماماً فهو غير محدود.

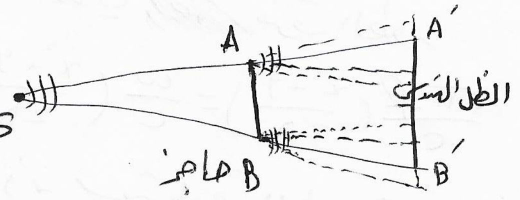
فإذا كانت τ المدة الوسطى لبقاء قطار الأمواج الواحد من القطارات المتتابعة الصادرة من المنبع الوحيد اللون تقريباً فإن المدة هذه ترتبط بعرض عصابة التواترات $\Delta\nu$ بالعلاقة $\tau \cdot \Delta\nu = 1$ إذاً تكون المدة طويلة جداً إذا كان عرض عصابة التواترات ضيق جداً أي وحيد اللون.

الانعراج

هو حيود الضوء عن مبدأ الانتشار المستقيم فإذا وضع حاجز عاتم أمام منبع ضوئي فإننا نلاحظ أن الضوء يتوغل قليلاً في منطقة الظل الهندسي

وإذا استبدلنا الحاجز بحاجز يحتوي ثقب صغير

فإننا نلاحظ بقعة ضوء أكبر من الثقب

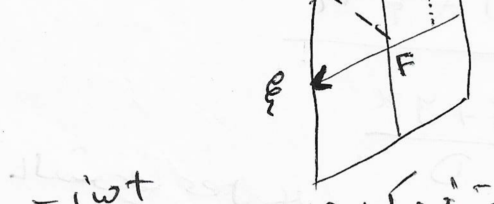


وإذا كان الضوء وحيد اللون فإننا نلاحظ

حلقات متناوبة مضيئة ومظلمة تدعى أهداب الإنعراج.

وكلما كان الثقب أضيق كلما كانت الأهداب أوضح وسبب ذلك وتفسيره يعود إلى مبدأ هايجنز فرنل الذي يعتبر أن كل نقطة من صدر الموجة منبع ثانوي لصدر أمواج كروية. نلاحظ نفس الظاهرة عند استبدال الحاجز الذي يحتوي ثقب بحاجز يحتوي شق. إذا كانت الأمواج الساقطة على الحاجز أمواجها مستوية أي أشعة متوازية فإن الأهداب المتشكلة على الحاجز الموجود بالمستوي المحرقي لعدسة مقربة تدعى أهداب فراونهوفر وهي ذو أهمية كبيرة.

سعة الأمواج المنعرجة على فتحة:



إذا كانت سعة الموجة الساقطة على الفتحة $A_e(x,y,t)$ وسعتها عند خروجها $A_s(x,y,t)$ فيعرف تابع الفتحة بالعلاقة

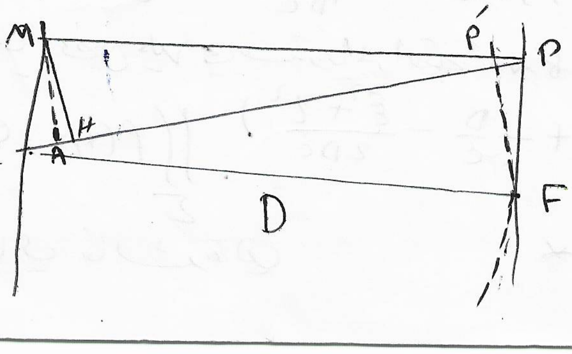
$$f(x,y)=\frac{A_s}{A_e}$$

لنحسب سعة الموجة المنعرجة من النقطة $M(x,y)$ والواردة إلى النقطة $P(\xi,\eta,D)$ ومن ثم نكامل على كامل الفتحة. فإذا كانت عبارة الموجة الساقطة على الفتحة في مركزها C هي $Ae^{-i\omega t}$ فإن عبارة الموجة الساقطة في M هي

$$A_e(x,y,t)=A\,e^{-i(\omega t+\varphi_0)}$$

حيث φ_0 هي فرق الطور بين الموجتين ولحساب Δ_0 نرسم كرة مركزها P ونصف قطرها PM فنجد أن فرق المسير $\Delta_0=\overline{CH}$.

$$\varphi_0=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_0$$



باعتبار $\overline{CM}$ ، $\overline{FP}$ صغيرة بالمقارنة مع $\overline{CF}=D$ (فراونهوفر)

فيمكننا اعتبار $\overline{HP}\approx\overline{MP}\approx D$

من المثلث القائم CMP نجد أن $\overline{CP}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{CM}^2$

$$(D+\Delta_0)^2 = D^2 + (x^2+y^2)$$

$$D^2 + 2\Delta_0 D + \Delta_0^2 = D^2 + (x^2+y^2)$$

وبإهمال Δ_0^2 لصغرها من المرتبة الثانية نجد أن

$$\Delta_0 = \frac{x^2+y^2}{2D}$$

وبالتالي ~~[illegible]~~ فرق الطور

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x^2+y^2}{2D}\right) = \frac{2\pi}{\frac{c}{f}}\left(\frac{x^2+y^2}{2D}\right) = \frac{2\pi f}{c}\left(\frac{x^2+y^2}{2D}\right) = \frac{\omega}{c}\left(\frac{x^2+y^2}{2D}\right)$$

إذن سعة الموجة الواردة في النقطة M تكون

$$A_e(x,y,t) = A e^{-i\omega\left(t+\frac{x^2+y^2}{2Dc}\right)}$$

أما سعة الموجة عند مخرج الفتحة

$$A_s = f(x,y,t) A_e(x,y,t)$$
$$= A f(x,y) e^{-i\omega\left(t+\frac{x^2+y^2}{2Dc}\right)}$$

ولحساب سعة الموجة الواصلة إلى النقطة P في مستوي المراقبة نقول أن الموجة في P هي نفس الموجة في M قبل زمن $\frac{\overline{MP}}{c}$ أي

$$dF(\xi,\eta,t) = \frac{-i}{\lambda D} A f(x,y) e^{-i\omega\left(t+\frac{x^2+y^2}{2Dc}-\frac{\overline{MP}}{c}\right)}$$

ضربنا بالمقدار $-\frac{i}{\lambda D}$ لأن سعة الموجة الكروية تتناقص بتناسب عكساً مع البعد D

$$\overline{MP} = \sqrt{D^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = D\sqrt{1+\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{D^2}}$$

$$\approx D\left(1+\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{2D^2}+\cdots\right)$$

$$= D + \frac{x^2+y^2-2(x\xi+y\eta)+\xi^2+\eta^2}{2D}$$

$$= D + \frac{x^2+y^2}{2D} + \frac{\xi^2+\eta^2}{2D} - \frac{x\xi+y\eta}{D}$$

بالتعويض نحصل على

$$dF(\xi,\eta,t) = \frac{-i}{\lambda D} A f(x,y) e^{-i\omega\left(t-\frac{D}{c}-\frac{\eta^2+\xi^2}{2Dc}+\frac{x\xi+y\eta}{Dc}\right)}$$

وبفصل المتحولات أو فرزها نجد

$$dF(\xi,\eta,t) = -\frac{i}{\lambda D} A f(x,y) e^{-i\omega\left(\frac{x\xi+y\eta}{Dc}\right)} \cdot e^{-i\omega\left(t-\frac{D}{c}-\frac{\xi^2+\eta^2}{2Dc}\right)}$$

والسعة التي نحصل عليها في مستوي المراقبة من كامل الفتحة تنتج بتكامل على الفتحة Σ

$$F(\xi,\eta,t) = \frac{-i}{\lambda D} A e^{-i\omega\left(t-\frac{D}{c}-\frac{\xi^2+\eta^2}{2Dc}\right)} \cdot \iint_{\Sigma} f(x,y) e^{-\frac{i\omega(x\xi+y\eta)}{Dc}} dx\,dy$$

وبالتالي فالشدة هي

$$I(\xi,\eta) = F\cdot F^*$$

وبما أنه علينا أن نجري التكامل وباعتبار السعة $A = 1$ فتكتب العلاقة السابقة بالشكل

$$F(\xi,\eta) = -\frac{i}{\lambda D}\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\xi}{D}x+\frac{\eta}{D}y\right)}\, dx\,dy$$

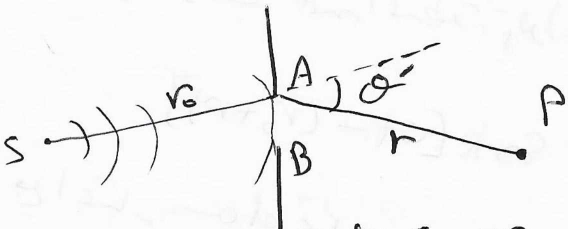
حيث

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

وهذا هو تحويل فورييه والذي يعرف بالشكل هو طيف التواترات للتابع ما $g(x)$ حقيقي أم عقدي متحول الموضع أو الزمن ويعبر عنه رياضياً .

$$TF[g(x)] = G(f_x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{i2\pi x f_x}\, dx$$

حيث يمثل f_x التواتر دائماً .



الطريقة الأخرى

فرض فرينل أن سعة الاضطراب القادم من المنابع الثانوية على أي عنصر سطحي $d\sigma$ من جبهة الموجة الأصلية في P تتناسب مع

1- سعة الاضطراب في كل عنصر $\frac{a}{r_0}$

2- مساحة العنصر $d\sigma$

3- عكساً مع بعد النقطة P عن العنصر $1/r$

وأيضاً فرض أن تأثير المنابع الثانوية يعتمد على الزاوية θ' بين الناظم على جبهة الموجة الأصلية واتجاه P ويعرف بعامل الميل $f(\theta')$

وباعتبار الموجة الكروية الصادرة عن المنبع النقطي S هي توافقية بسيطة من الشكل

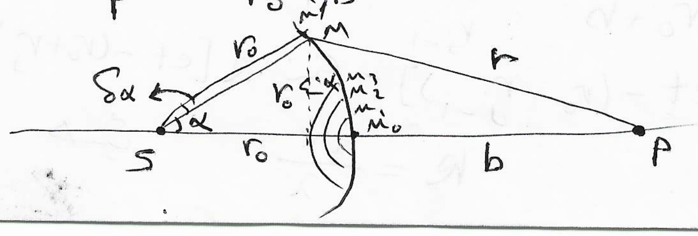
$$\phi = \frac{a}{r_0}\cos k(ct - r_0)$$

فيعبر عن تأثير السطح العنصري $d\sigma$ في P بالعبارة

$$\phi_p = \frac{a}{r_0}\, d\sigma\, \frac{1}{r}\, f(\theta')\cos k[ct-(r_0+r)]$$

أما في نقطة P تبعد مسافة $r_0 + b$ عن المنبع الأصلي فتصبح المعادلة

$$\phi_p = \frac{a}{r_0+b}\cos k[ct-(r_0+b)]$$



$$r_1 = \overline{M_1P} = M_0P + \frac{\lambda}{2} = b + \frac{\lambda}{2}$$

$$r_2 = \overline{M_2P} = r_1 + \frac{\lambda}{2} = b + 2\frac{\lambda}{2}$$

وهكذا $r_j = \overline{M_j P} = b + j\frac{\lambda}{2}$

أي أن كل منطقة يبعد عن P مسافة $\frac{\lambda}{2}$ أكثر من حد سابقتها وتدعى هذه المناطق بمناطق فرينل أو المناطق نصف الدورية.

يمكن حساب الاضطراب في P كما يلي:

أولاً: نحسب تأثير كل منطقة نصف دورية على حده ثم نجمع المناطق المختلفة.

فنبدأ بحساب تأثير احدى مناطق فرينل ولتكن j. بأن نأخذ كعنصر سطحي من تلك المنطقة حلقة عنصرية ترى من S بزاوية $\delta\alpha$ بين M و M'

حيث $\overline{MP} = r$ ، $\overline{M'P} = r + \delta r$ ونفترض عامل الميل بطيء بحيث يمكن اعتباره ثابت ضمن المنطقة المدروسة فتأثير الحلقة العنصرية في P نقطة

$$d\phi = \frac{a}{r_0+r} f_j(\theta')\, d\sigma \cos k[ct-(r_0+r)]$$

مع اعتبار $d\sigma$ تمثل مساحة الحلقة العنصرية

$f_j(\theta')$ عامل الميل للمنطقة النصف دورية j ، r_0+r متبدأ

$$d\sigma = 2\pi (r_0 \sin\alpha)\, r_0\, d\alpha$$

ومن المثلث SMP فإن

$$r^2 = r_0^2 + (r_0+b)^2 - 2r_0(r_0+b)\cos\alpha$$

بالمفاضلة فيصبح

$$2r\,dr = 2r_0(r_0+b)\sin\alpha\, d\alpha$$

$$d\sigma = \frac{2\pi r_0 r}{r_0+b}\, dr$$

بالتعويض في عبارة $d\phi$ نجد

$$d\phi = 2\pi f_j(\theta') \frac{a}{r_0+b} \cos k[ct-(r_0+r)]\, dr$$

وبالتالي فالاضطراب الناجم عن المنطقة j

$$\phi_j = f_j(\theta') \int_{\text{المنطقة } j} d\phi = \frac{2\pi f_j(\theta') a}{r_0+b} \int_{r_{j-1}}^{r_j} \cos k[ct-(r_0+r)]\, dr$$

$$= \frac{f_j(\theta') a \lambda}{r_0+b} \left\{ \sin k[ct-(r_0+r_{j-1})] - \sin k[ct-(r_0+r_j)] \right\}$$

حيث $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

بالتعويض عن $r_j = b + j\frac{\lambda}{2}$ $\quad$ $r_{j-1} = b + (j-1)\frac{\lambda}{2}$

نجد أن

$$\phi_j = (-1)^{j+1} \frac{2 f_j(\theta') a\lambda}{r_0+b} \sin k[ct-(r_0+b)]$$

$$= A_j \sin k[ct-(r_0+b)]$$

يتضح أن A_j تأخذ قيماً سالبة وموجبة حسب ازدواجية أو فردية j وبالتالي فإن المحصلة تتأرجح بين o ، ϕ_j تبعاً لعدد المناطق المثيرة وهذا لا يتفق مع الاضطراب في P لذلك فرض فرينل أن عامل الميل $f_j(\theta')$ يتناقص بالتدريج مع ازدياد θ' حتى يصبح معدوماً عندما $\theta' = 90°$ وبالتالي فإن الاضطراب في P يساوي مجموع الحدود $\sum_j A_j$

$$A_p = |A_1| - |A_2| + |A_3| - |A_4| + \dots$$

خواص تحويل فورييه:

١- الخاصة الخطية

$$TF[(\alpha g+\beta h)] = \alpha TF[g] + \beta TF[h]$$

٢- تغيير المتحول: إذا كان

$$TF[g(x,y)] = G(f_x, f_y)$$ فإن

$$TF[g(ax,by)] = \frac{1}{|ab|}\, G\left(\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right)$$

٣- الانسحاب إذا كان

$$TF[g(x,y)] = G(f_x, f_y)$$ فإن

$$TF[g(x-a, y-b)] = G(f_x, f_y)\, e^{-2\pi i (af_x,\ bf_y)}$$

٤- الاشتقاق بالنسبة للمتحول x

إذا كان

$$TF[g(x)] = G(f_x)$$ فإن

$$TF[g'(x)] = 2\pi i f_x G(f_x)$$

أي أن الاشتقاق يؤدي إلى تغير في الطور مقداره $\frac{\pi}{2}$ بسبب العدد التخيلي وإلى تغير في السعة بمقدار $2\pi f_x$

وبالتعميم

$$TF[g^{(n)}(x)] = (2\pi i f_x)^n G(f_x)$$

٥- الاشتقاق بالنسبة للتفرد f_x

إذا كان $TF[g(x)] = G(f_x)$ فإن

$$G'(f_x) = -2\pi i\, TF[x\, g(x)]$$

وبالتعميم

$$G^n(f_x) = (-2\pi i)^n\, TF[x^n g(x)]$$

نظرية بارسيفال parseval

إذا كان $TF[g(x,y)] = G(f_x, f_y)$ فإن

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |g(x,y)|^2\, dx\, dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |G(f_x, f_y)|^2\, df_x\, df_y$$

وتترجم هذه النظرية مبدأ انحفاظ الطاقة.

تابع ديراك

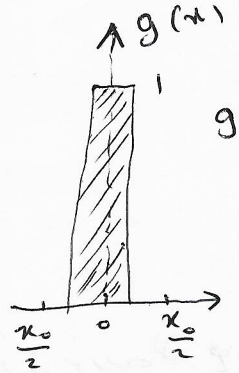
يمكن تمثيل نبضة كبيرة من الطاقة إذا كان عرضها صغيراً جداً بتابع ديراك ونرمز له بالرمز $\delta(x)$ أي $\delta(x) = \infty$ عندما $x = 0$ و $\delta(x) = 0$ عندما $x \neq 0$ والصيغة الرياضية

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x f_x}\, df_x$$ أو $$\delta(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin kx}{kx}$$

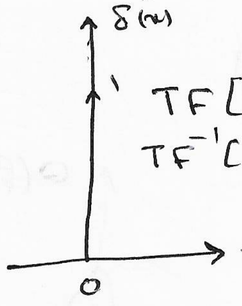
أو

$$\delta(x) = \lim_{N \to \infty} N^2 e^{-N^2 \pi x^2}$$

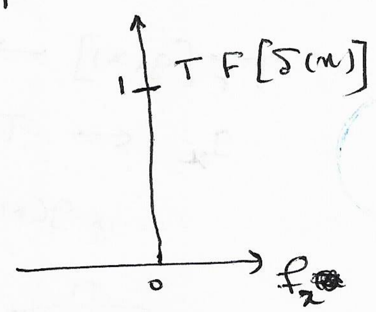
أي أن لتابع ديراك قيمة معدومة في جميع نقاط المحور ما عدا نقطة المبدأ $(x=0)$
حيث تكون قيمته لانهائية فهو يمثل خطاً طيفياً ذا عرض معدوم أو وحيد اللون
لذلك يمثل بسهم في مبدأ الإحداثيات



$g(x) \to \delta(x)$
$x \to 0$



$TF[\delta(x)] = 1$
$TF^{-1}[1] = \delta(x)$



$$TF[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, e^{-2\pi i x f_x}\, dx = 1$$

وعليه التفسير سطع الطيف النقطي بالتابع δ لأن الشدة الصادرة من المنبع
تكون كبيرة (لانهائية) في المنبع وتكون معدومة في جميع نقط الفراغ
وإذا لم يكن التابع منطبقاً على مبدأ الإحداثيات فيأخذ التعريف الشكل

$$\begin{cases} \delta(x-a) = 0 & \text{عندما } x \neq a \\ \delta(x-a) = \infty & \text{عندما } x = a \end{cases}$$

أما تحويل فورييه فيصبح

$$TF[\delta(x-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\, e^{-2\pi i x f_x}\, dx$$

حيث طبقنا خاصة الانسحاب

$$TF[\delta(x-a)] \rightleftarrows e^{-2\pi i a f_x}$$

ونلاحظ أن تابع ديراك ليس تابعاً رياضياً بل هو توزيع ديراك حسب شوارتز.

مثال: أوجد تحويل فورييه للتابع

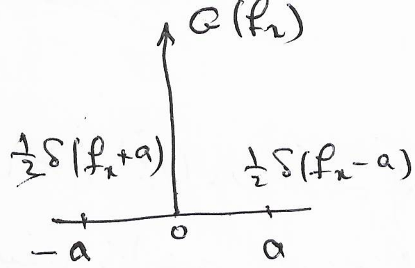
$$g(x) = \cos 2\pi a x$$

$$G(f_x) = TF[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-2\pi i x f_x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi a x\, e^{-2\pi i x f_x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i a x} + e^{-2\pi i a x}}{2} \cdot e^{-2\pi i x f_x}\, dx$$

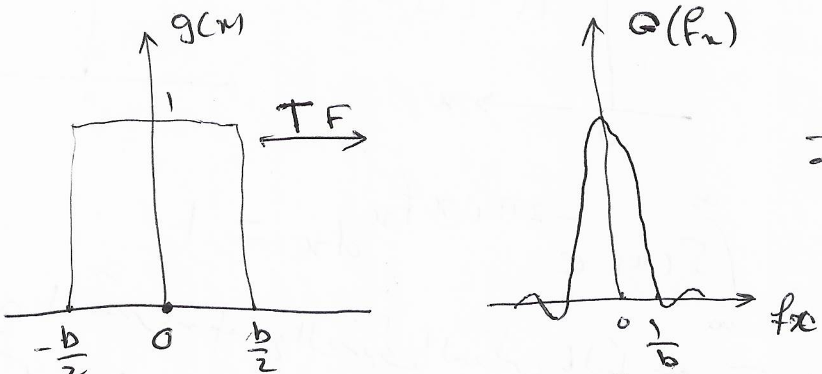
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-2\pi i x (f_x - a)}}_{1}\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-2\pi i x (f_x + a)}}_{2}\, dx$$

الحد ① تابع ديراك المسحوب عن المبدأ بالمقدار a أي $\frac{1}{2}\delta(f_x - a)$
الحد ② 〃 〃 〃 〃 $-a$ $\frac{1}{2}\delta(f_x + a)$
الممثلان بالشكل



$$TF[g(x)] \longrightarrow G(f_x)$$

$$g_x \longleftarrow TF^{-1}[G(f_x)]$$



مسألة 1

أوجد تحويل فورييه للتابع المعرف بالعلاقة

$g(x)=0$ عندما $|x|>\frac{b}{2}$

$g(x)=1$ عندما $|x|<\frac{b}{2}$

$$TF[g(x)] = G(f_x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-2\pi i x f_x}\, dx$$

وبما أن $g(x)$ معدومة في جميع نقاط المحور ما عدا المجال $[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}]$ حيث تأخذ القيمة 1 فإن العلاقة السابقة تكتب بالشكل

$$G(f_x) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (1)\, e^{-2\pi i x f_x}\, dx = \left[\frac{1}{-2\pi i f_x}\, e^{-2\pi i x f_x}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i f_x}\left[e^{-2\pi i f_x(\frac{b}{2})} - e^{-2\pi i f_x(-\frac{b}{2})}\right]$$

$$= b\,\frac{\sin(\pi b f_x)}{\pi b f_x} = b\,\mathrm{Sinc}(\pi b f_x)$$