كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : فيزياء احصائية

المحاضرة: الخامسة /نظري/ د.علي اسد

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

الفصل الخامس

تطبيقات إحصاء مكسويل – بولتزمان

يطبق إحصاء مكسويل - بولتزمان على الغاز الكلاسيكي (اللاكمي) " غاز M-B ")، الذي يختلف عن الغاز المثالي بـ (جسيماته المتمايزة، وحجمها الخاص V_0 غير المهمل). حيث لم يرد في تعريف الغاز المثالي أي شيء عن تمايز الجسيمات من عدمه. فإذا غضضنا النظر عن الحجم الخاص (المهمل في الغاز المثالي)، فإنه يمكن وبتقريب مقبول اعتبار الغاز المثالي غاز كلاسيكي، تكون فيه سويات الطاقة متقاربة لدرجة يمكن اعتبارها مستمرة (بفاصل طاقي قدره $d\varepsilon$)

<u>تابع توزع الطاقة في إحصاء مكسويل - بولتزمان:</u> $F(\varepsilon)$

لإيجاد تابع توزع الطاقة، نعود للعبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقاتها، في المجال الطاقي $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$. (الواردة في (*) من الفصل الرابع):

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{Z} e^{\beta\varepsilon}\, g(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

ونعوض عن المقدار $g(\varepsilon)\, d\varepsilon$ بقيمتة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\varepsilon)\, d\varepsilon = C\, d\Gamma(\varepsilon) = CV\, 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2}\, d\varepsilon \qquad \text{(الفصل الثالث)}$$

وعن تابع التحاصل Z بقيمته

$Z = CV\,(2\pi m KT)^{3/2}$ (الفصل الرابع) ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{CV\,(2\pi m KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}\, CV\, 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2}\, d\varepsilon$$

بالاختزال والاصلاح.

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}\, (\varepsilon)^{1/2}\, d\varepsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$\boxed{dF(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N} = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}\, d\varepsilon = f(\varepsilon)\, d\varepsilon} \qquad (1)$$

حيث يعبر $f(\varepsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$\boxed{f(\varepsilon) = \frac{2\,\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}} \qquad (1')$$

تمرين: برهن أن $F(\varepsilon)$ تابع توزع احتمال. (وبصيغة أخرى برهن أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال).

الحل: نبرهن أن تابع الكثافة يحقق الشرط الواحدي. وذلك بإجراء التكامل على الطاقة في المجال $]0 \to \infty[$.

$$F(\varepsilon) = \int_0^\infty dF(\varepsilon) = \int_0^\infty f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT}\, d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT\, x \;\Rightarrow\; d\varepsilon = KT\, dx \qquad \text{و} \qquad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل:

$$F(\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}(KT)^{1/2}\,KT\underbrace{\int_0^\infty x^{1/2}\,e^{-x}\,dx}_{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$F(\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}(KT)^{3/2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$

تابع توزع الاندفاع في إحصاء مكسويل - بولتزمان: $F(P)$

لإيجاد تابع توزع الطاقة، نعود للعبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لاندفاعاتها وفق توزع M-B في المجال $[P,P+dP]$. (الواردة في (**) من الفصل الرابع): $dN(P)=\frac{N}{Z}e^{\beta P^2/2m}\,g(P)\,dP$

ونعوض في (**) عن المقدار $g(P)dP$ بقيمتة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الاندفاع الطوري (الفصل الثالث) $g(P)\,dP=C\,d\Gamma(P)=CV\,4\pi\;P^2\,dP$

وعن تابع التحاصل Z بقيمته (الفصل الرابع) $Z=CV\,(2\pi mKT)^{3/2}$ ،

وعن الطاقة $\varepsilon=P^2/2m$ ، واعتبار أن $\beta=-1/KT$. نجد:

$$dN(P)=\frac{N}{CV\,(2\pi mKT)^{3/2}}e^{-P^2/2mKT}\,CV\,4\pi P^2\,dP$$

بالاختزال على CV، واعتبار أن $\boxed{\gamma=1/2mKT}$ نجد:

$$dN(P)=4\pi N\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{3/2}\;P^2\;e^{-\gamma P^2}\;dP$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع الاندفاع بدلالة تابع كثافة الاندفاع كما يلي:

$$\boxed{dF(P)=\frac{dN(P)}{N}=4\pi\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{3/2}\;P^2\,e^{-\gamma P^2}\,dP=f(P^2)\,dP}\qquad(2)$$

حيث يمثل $f(P^2)$ تابع كثافة الاندفاع

$$\boxed{f(P^2)=4\pi\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{3/2}\;P^2\,e^{-\gamma P^2}}\qquad(2')$$

وهو تابع تربيعي في الاندفاع.

تمرين: برهن أن $F(P)$ تابع توزع احتمال. (وبصيغة أخرى برهن أن $f(P^2)$ تابع كثافة احتمال).

الحل: نبرهن أن تابع الكثافة يحقق الشرط الواحدي. وذلك بإجراء التكامل على الاندفاع في المجال $]0\to\infty[$.

$$F(P)=\int_0^\infty dF(P)=\int_0^\infty f(P^2)\,dP=4\pi\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{3/2}\;\int_0^\infty P^2\;e^{-\gamma P^2}\;dP$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^\infty P^2\;e^{-\gamma P^2}\;dP=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(P)=4\pi\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{3/2}\,\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma^3}}=1$$

تابع توزع السرع المطلقة في إحصاء مكسويل - بولتزمان: $F(\vartheta)$

يُقصد بالسرعة المطلقة العبارة التالية $\vartheta=\sqrt{\vartheta_x^2+\vartheta_y^2+\vartheta_z^2}$.

لإيجاد تابع توزع السرع المطلقة، نعود للعبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعها المطلقة وفق توزع M-B في مجال السرعات $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$. (الواردة في (***) من الفصل الرابع):

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{Z}e^{\beta m\vartheta^2/2}\,g(\vartheta)\,d\vartheta$$

ونعوض عن المقدار $g(\vartheta)d\vartheta$ بقيمتة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

(الفصل الثالث) $$g(\vartheta)\,d\vartheta=C\,d\Gamma(\vartheta)=CV\,4\pi\,m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$

وعن تابع التحاصل Z بقيمته (الفصل الرابع) $Z=CV\left(2\pi mKT\right)^{3/2}$ ،

وعن الطاقة $\varepsilon=m\vartheta^2/2$ ، واعتبار أن $\beta=-1/KT$. نجد:

$$dN(\vartheta)=\frac{N}{CV\left(2\pi mKT\right)^{3/2}}e^{-m\vartheta^2/2KT}\,CV\,4\pi m^3\,\vartheta^2\,d\vartheta$$

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(\vartheta)=4\pi N\left(\frac{m}{2\pi\,KT}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

نعتبر أن $\boxed{\alpha=m/2KT}$

$$dN(\vartheta)=4\pi N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع السرع بدلالة تابع كثافة السرع كما يلي:

$$\boxed{dF(\vartheta)=\frac{dN(\vartheta)}{N}=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta=f(\vartheta^2)\,d\vartheta}\qquad(3)$$

حيث يعبر $f(\vartheta^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$\boxed{f(\vartheta^2)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\,e^{-\alpha\vartheta^2}}\qquad(3')$$

وهو تابع تربيعي في السرعة المطلقة.

تمرين: برهن أن $F(\vartheta)$ تابع توزع احتمال. (وبصيغة أخرى برهن أن $f(\vartheta^2)$ تابع كثافة احتمال).

الحل: نبرهن أن تابع الكثافة يحقق الشرط الواحدي. وذلك بإجراء التكامل على السرعة في المجال $]0\rightarrow\infty[$.

$$F(\vartheta)=\int_0^\infty dF(\vartheta)=\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty\vartheta^2\;e^{-\alpha\vartheta^2}\;d\vartheta$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^\infty\vartheta^2\;e^{-\alpha\vartheta^2}\;d\vartheta=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

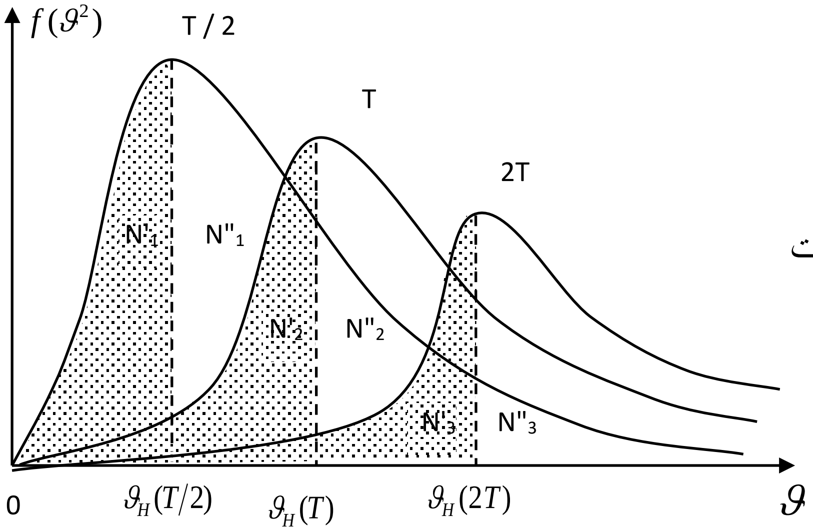
$$F(\vartheta)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}=1$$

ملاحظة: يختلف تابع كثافة M-B للسرع عن تابع كثافة غوص الطبيعي في المتحول x التالي: $f(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\ e^{-\alpha x^2}$

بوجود الحد التربيعي للسرعة المطلقة ϑ^2 في تابع كثافة M-B الذي يعمل على إزاحة منحني غوص الطبيعي المتناظر عن وضع التناظر باتجاه تزايد قيم المتحول ϑ، كما سنرى تالياً.

تفسير تابع كثافة M-B للسرع المطلقة $f(\vartheta^2)$ عند درجات حرارة مختلفة:

نرسم تابع الكثافة $f(\vartheta^2)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\ e^{-\alpha\vartheta^2}$ لعدد ثابت من الجسيمات الكلاسيكية $N=cte$ عند درجات حرارة مختلفة $T/2$ و T و $2T$. بدلالة سرعتها المطلقة ϑ كما هو موضح في الشكل ( ).



شكل ( )

المناقشة والتفسير :

تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات $N=cte$.
فإننا نمثل المساحات المحصورة تحت المنحنيات البيانية (عند كل درجة حرارة) بـ N، وهي متساوية القيمة لأن $N=cte$.
تعبر ϑ_H عن السرعة الأكثر احتمالاً (كما سنراها لاحقاً)، وهي القيمة الموافقة لذروة المنحني (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية) عند كل درجة حرارة.
يمكن تصنيف عدد الجسيمات إلى:

N' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H .

و N'' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من ϑ_H .

حيث $N = N' + N''$

النتائج :

1- تنزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد القيمة المطلقة لسرعة الجسيمات

2- بارتفاع درجات الحرارة يزداد N'' على حساب تناقص N' بحيث يبقى N ثابت ($N = N' + N''$) .

3- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي تقع سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta,\vartheta+d\vartheta]$.

السرع المميزة لتوزع M-B :

السرعة الأكثر احتمالاً ϑ_H (Most probable speed):

هي السرعة الموافقة للنهاية الحدية العظمى لتابع الكثافة $f(\vartheta^2)$

نجدها باشتقاق تابع الكثافة $f(\vartheta^2)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\ e^{-\alpha\vartheta^2}$ وإعدام المشتق كما يلي:

$$\frac{\partial f(\vartheta^2)}{\partial\vartheta}=0\ \Rightarrow 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\left(2\vartheta\ e^{-\alpha\vartheta^2}-2\alpha\,\vartheta\,\vartheta^2\ e^{-\alpha\vartheta^2}\right)=0\ \Rightarrow\ 2\vartheta\ e^{-\alpha\vartheta^2}(1-\alpha\,\vartheta^2)=0$$

الحلول الناتجة عندما $\vartheta\ e^{-\alpha\vartheta^2}=0$ هي $\vartheta=\infty$ و $\vartheta=0$ وهي غير مقبولة.

وعندما $1-\alpha\,\vartheta^2=0$ نجد:

$$\boxed{\vartheta_H=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}\qquad ;\ \alpha=\frac{m}{2KT}}$$

<u>القيمة الوسطى للسرعة المطلقة</u> $\bar{\vartheta}$: (Average molecular speed)

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى (واستخدام تكاملات بواسون)

$$\bar{\vartheta}=\frac{\int_0^\infty \vartheta\, f(\vartheta^2)\,d\vartheta}{\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta}=\int_0^\infty \vartheta\, f(\vartheta^2)\,d\vartheta \qquad ; \int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta=1$$

$$\bar{\vartheta}=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty \vartheta^3\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta}_{1/2\alpha^2}=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{2\alpha^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\frac{8KT}{\pi m}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\vartheta_H\approx 1{,}13\,\vartheta_H$$

<u>القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة</u> $\overline{\vartheta^2}$: (Mean – Square speed)

نجدها باتباع طريقة القيمة الوسطى، وبمراعاة $\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,d\vartheta=1$ نجد:

$$\overline{\vartheta^2}=\int_0^\infty \vartheta^2\, f(\vartheta^2)\,d\vartheta=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty \vartheta^4\, e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\alpha}=\frac{3}{2}\vartheta_H^2=3\frac{KT}{m}\Rightarrow\sqrt{\overline{\vartheta^2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\vartheta_H\approx 1{,}22\,\vartheta_H$$

التمثيل البياني يوضحه الشكل المرفق

<u>*ملاحظة:*</u> القيم المميزة للسرعات الموافقة لنصف القيمة العظمى لتابع الكثافة نجدها بحل المعادلة:

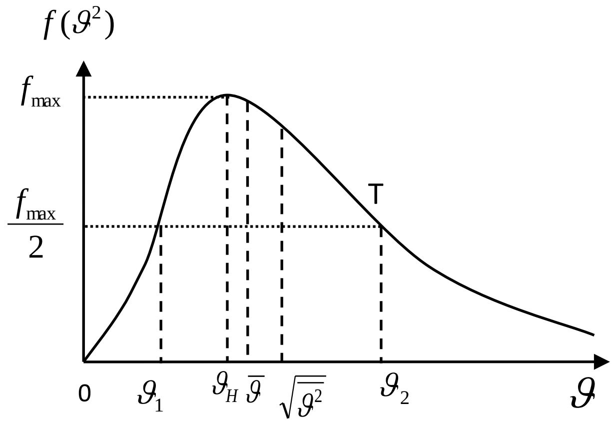
$$f(\vartheta^2)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2\, e^{-\alpha\vartheta^2}=\frac{1}{2}$$

يمكن البرهان رياضياً أن للمعادلة حلان هما:

$$\vartheta_2=2{,}31\sqrt{\frac{2KT}{m}} \quad \text{و} \quad \vartheta_1=0{,}682\sqrt{\frac{2KT}{m}}$$

وبدلالة ϑ_H نجد: $\vartheta_2=2{,}31\,\vartheta_H$ و $\vartheta_1=0{,}682\,\vartheta_H$

كما هو موضح في الشكل ( )



شكل ( )

تمرين: برهن اعتماداً على تابع كثافة السرعة المطلقة $f(\vartheta^2)$ لتوزع M-B في المجال $[0\to\infty[$ أن: $\bar{\vartheta}\left(\overline{\frac{1}{\vartheta}}\right)=\frac{4}{\pi}$.

الحل: نوجد قيمة المضاريب بتطبيق تابع الكثافة $f(\vartheta^2)=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2}$ ، وتكاملات بواسون كما يلي:

$$\bar{\vartheta}=\int_0^\infty \vartheta\, f(\vartheta^2)\,d\vartheta=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty \vartheta^3 e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{2\alpha^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\overline{\frac{1}{\vartheta}}=\int_0^\infty \frac{1}{\vartheta}\, f(\vartheta^2)\,d\vartheta=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty \vartheta e^{-\alpha\vartheta^2}\,d\vartheta=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{2\alpha}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\alpha}$$

بالتعويض نجد المطلوب $\qquad \bar{\vartheta}\left(\overline{\frac{1}{\vartheta}}\right)=\frac{4}{\pi}$

تمرين: إذا علمت أن الوزن الجزيئي (الكتلة المولية) للنتروجين N_2 عند الدرجة $T=10^3\,k^o$ هي: $\mu_{N_2}=28\times10^{-3}\,kg/mol$. وأن ثابتة الغازات المثالية $R=8{,}314\ J/mol\,k^o$.

المطلوب: حساب السرع المطلقة المميزة لتوزع M-B : (ϑ_H و $\bar{\vartheta}$ و $\sqrt{\overline{\vartheta^2}}$)

- أعد الطلب من أجل الهيليوم عند الدرجة $T=0\,k^o$ علماً أن: $\mu_{He}=4{,}003\times10^{-3}\,kg/mol$
- أعد الطلب من أجل الأوكسجين عند الدرجة $T=300\,k^o$ علماً أن: $\mu_{O_2}=32\times10^{-3}\,kg/mol$
- أعد الطلب من أجل الأمونيا عند الدرجة $T=300\,k^o$ علماً أن: $\mu_{NH_4}=17\times10^{-3}\,kg/mol$

الحل: نفرض M الكتلة الإجمالية للغاز و m كتلة الجزيء الواحد.

فتكون الكتلة المولية $\mu = m N_A$ وعدد المولات $n = M/\mu$

بالتطبيق في معادلة الحالة (للغازات المثالية) $PV = N\,KT = n\,RT \;\Rightarrow\; \frac{M}{m}KT = \frac{M}{\mu}RT \;\Rightarrow\; \frac{KT}{m} = \frac{RT}{\mu}$

بالتعويض في عبارات السرع المعروفة نجد:

$$\vartheta_H = \sqrt{\frac{2\,kT}{m}} = \sqrt{\frac{2\,RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2\times 8{,}314\times 10^3}{28\times 10^{-3}}} \approx 770 \;\; m/S$$

$$\overline{\vartheta} = \sqrt{\frac{8\,KT}{\pi\, m}} = \sqrt{\frac{8\,RT}{\pi\,\mu}} = \sqrt{\frac{8\times 8{,}314\times 10^3}{3{,}14\times 28\times 10^{-3}}} \approx 870 \;\; m/S$$

$$\sqrt{\overline{\vartheta^2}} = \sqrt{3\frac{KT}{m}} = \sqrt{3\frac{RT}{\mu}} = \sqrt{3\times\frac{8{,}314\times 10^3}{28\times 10^{-3}}} \approx 944 \;\; m/S$$

- من أجل الهيليوم نجد: $\vartheta_H \approx 1203 \; m/S$ ℘ $\overline{\vartheta} \approx 1064 \; m/S$ ℘ $\sqrt{\overline{\vartheta^2}} \approx 1303 \; m/S$
- من أجل الأوكسجين نجد: $\vartheta_H \approx 446 \; m/S$ ℘ $\overline{\vartheta} \approx 395 \; m/S$ ℘ $\sqrt{\overline{\vartheta^2}} \approx 484 \; m/S$
- من أجل الأمونيا نجد: $\vartheta_H \approx 611{,}2 \; m/S$ ℘ $\overline{\vartheta} \approx 541{,}7 \; m/S$ ℘ $\sqrt{\overline{\vartheta^2}} \approx 663{,}4 \; m/S$

الطاقات المميزة لجسيمات الغاز الكلاسيكي (غاز M-B):

1- الطاقة الأكثر احتمالاً، (طاقة حالة التوازن): $(\varepsilon_H)_{Clas}$

نفرض الطاقة الإجمالية لجسيم الغاز الكلاسيكي طاقة حركية فقط. $\varepsilon = m\vartheta^2/2$

نعوض عن السرعة ϑ بالقيمة المميزة لسرعة جسيم الغاز الكلاسيكي (السرعة الأكثر احتمالاً) $(\vartheta_H)_{Clas} = \sqrt{2kT/m}$

فنحصل على الطاقة الأكثر احتمالاً (المميزة) لجسيم الغاز الكلاسيكي $(\varepsilon_H)_{Clas}$ بالشكل التالي:

$$(\varepsilon_H)_{Clas} = \frac{m}{2}\frac{2KT}{m} \quad\Rightarrow\quad \boxed{(\varepsilon_H)_{Clas} = KT}$$

تنسجم النتيجة مع معطيات النظرية الحركية للغازات المثالية. حيث تعطى الطاقة الحركية لجسيم الغاز المثالي بالعلاقة التالية $\varepsilon_{Id} = \frac{f}{2}KT$، (عندما $f = 2$ حيث يكون للجسيم درجتي حرية فقط). و هي تكافئ الطاقة الحرارية الناتجة عن حركة جسيم (أحادي الذرة) يهتز في المكان أو يتحرك حركة انسحابية في المستوي.

ملاحظة: الطاقة الحرارية الأكثر احتمالاً لجسيم الغاز الكلاسيكي عند درجة حرارة الغرفة $(T \approx 300\; k^o)$

$$\varepsilon_H = KT = 1{,}38\times 10^{-23}\times 300 = 414\times 10^{-23}\;\; J = \frac{414}{1{,}6}\times 10^{-23}\times 10^{19}\;\; eV \approx 259\times 10^{-4}\;\; eV \approx 0{,}026\;eV$$

2- الطاقة الوسطى $\overline{\varepsilon}$: نحسبها بطريقتين

A - باستخدام السرعة المميزة (القيمة الوسطى لمربع السرعة المطلقة $\overline{\vartheta^2} = 3\frac{KT}{m}$)، فنجد:

$$\overline{\varepsilon} = \overline{m\vartheta^2/2} = \frac{m}{2}\overline{\vartheta^2} = \frac{m}{2}3\frac{KT}{m} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\overline{\varepsilon} = \frac{3}{2}KT}$$

B – باستخدام طريقة الوسطى (لإحصائية):

$$\overline{\varepsilon} = \int_0^\infty \varepsilon\, f(\varepsilon)\, d\varepsilon \qquad ;\, f(\varepsilon) = \frac{2\,\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\, e^{-\varepsilon/KT}$$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\, e^{-\varepsilon/KT}\, d\varepsilon$$

يمكن إيجاد قيمة التكامل من تكاملات بواسون أو من تابع غاما كما يلي:

- باستخدام تكاملات بواسون: نفرض $\delta = 1/KT$

كما نغير في المتحول بفرض $\varepsilon^{3/2} = x^3 \;\Rightarrow\; \varepsilon^{1/2} = x \;\Rightarrow\; \varepsilon = x^2$ فتكون $d\varepsilon = 2x\,dx$. وبالتعويض:

$$\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\, e^{-\varepsilon/KT} = \int_0^\infty x^3\, e^{-\delta x^2}\, 2x\,dx = 2\int_0^\infty x^4\, e^{-\delta x^2}\,dx = 2\left(\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\delta^5}}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi (KT)^5} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\,(KT)^{5/2}$$

بالتعويض

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\;\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\,(KT)^{5/2} = \frac{3}{2}KT$$

- باستخدام تابع غاما: نفرض $\varepsilon^{3/2} = (KT)^{3/2}\,x^{3/2} \;\Rightarrow\; \varepsilon = KT\,x \Rightarrow x = \varepsilon/KT$ فتكون $d\varepsilon = KT\,dx$ وبالتعويض:

$$\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\, e^{-\varepsilon/KT} = (KT)^{3/2}\,KT\int_0^\infty x^{3/2}\; e^{-x}\,dx = (KT)^{5/2}\,\Gamma(\frac{5}{2}) = (KT)^{5/2}\;\frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

بالتعويض

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}}\,(KT)^{5/2}\;\frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3}{2}KT$$

نلاحظ انسجام النتيجة الحاصلة مع معطيات النظرية الحركية للغازات المثالية $\varepsilon_{Id} = \dfrac{f}{2}KT$ عندما $f=3$ (عندما يكون للجسيم ثلاث درجات حرية فقط)، " مبدأ تساوي توزع الطاقة ، بمعدل $KT/2$ لكل درجة حرية ".
وهي تكافئ الطاقة الحرارية الناتجة عن حركة جسيم (أحادي الذرة) يتحرك في الفراغ حركة انسحابية فقط.

نتائج:

1- العلاقة بين الطاقات المميزة $\left(\varepsilon_H\right)_{Classiique}$ و $\left(\bar{\varepsilon}\right)_{Classiique}$ لجسيمات الغاز الكلاسيكي (غاز M-B) :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}KT = \frac{3}{2}\,\varepsilon_H \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\left(\varepsilon_H\right)_{Clas} = \frac{2}{3}\,\left(\bar{\varepsilon}\right)_{Clas}} \quad\Leftrightarrow\quad \bar{\varepsilon} > \varepsilon_H$$

أي أن الطاقة الأكثر احتمالاً ε_H لجسيم الغاز الكلاسيكي تساوي ثلثي طاقته الوسطى $\bar{\varepsilon}$.

2- العلاقة بين الطاقة الوسطى لجسيم الغاز المثالي Ideal gas وكلٍ من الطاقات المميزة لجسيمات الغاز الكلاسيكي (غاز M-B): أي بين $\bar{\varepsilon}_{Id}$ وكلٍ من $\left(\varepsilon_H\right)_{Clas}$ و $\left(\bar{\varepsilon}\right)_{Clas}$

تعطى طاقة الغاز المثالي من المعادلة العامة للغازات المثالية (معادلة الحالة)، $U_{Id} = PV = N\,KT = n\,RT$

فتكون الطاقة الوسطى لجسيم الغاز المثالي (المكون من N جسيم)

$$\bar{\varepsilon}_{Id} = \frac{U_{Id}}{N} = KT \quad\Rightarrow\quad \boxed{\bar{\varepsilon}_{Id} = \left(\varepsilon_H\right)_{Clas} = KT}$$

أي أن: الطاقة الوسطى لجسيم الغاز المثالي تساوي الطاقة الأكثر احتمالاً لجسيم الغاز الكلاسيكي (غاز M-B).
(وهذا يدعم القول أن غاز M-B الكلاسيكي هو بالتقريب غاز مثالي).

ومن جهة أخرى: بما أن $\left(\varepsilon_H\right)_{Clas} = \dfrac{2}{3}\,\left(\bar{\varepsilon}\right)_{Clas}$ نجد:

$$\boxed{\bar{\varepsilon}_{Id} = \frac{2}{3}\left(\bar{\varepsilon}\right)_{Clas}} \qquad \text{أي أن:} \quad \boxed{\bar{\varepsilon}_{Id} < \left(\bar{\varepsilon}\right)_{Clas}}$$

3- معادلة برنولي:

تُحدد هذه المعادلة العلاقة بين الطاقة الداخلية للغاز المثالي U_{Id} والطاقة الداخلية لغاز M-B الكلاسيكي U_{Clas} فنجد من أجل N جسيم لكلٍ من الغازين (المثالي والكلاسيكي) أن:

$$N\,\bar{\varepsilon}_{Id} = \frac{2}{3}N\left(\bar{\varepsilon}\right)_{Clas} \quad\Rightarrow\quad \boxed{U_{Id} = \frac{2}{3}\,U_{Clas}}$$

أي أن: $\boxed{U_{Id} < U_{Clas}}$

ملاحظة: لن نأخذ نتيجة برنولي بعين الاعتبار عند دراستنا لغاز M-B الكلاسيكي (سنعتبر انسجاماً مع التقريب

المتخذ - الغاز الكلاسيكي هو غاز مثالي - أن $U_{Id} \approx U_{Clas}$)

تابع توزع مركبة السرعة المطلقة في إحصاء مكسويل - بولتزمان: $F(\vartheta_{x,y,z})$

نعيد كتابة العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعها المطلقة وفق توزع M-B في المجالات $[\vartheta_x, \vartheta_x + d\vartheta_x]$ ، $[\vartheta_y, \vartheta_y + d\vartheta_y]$ ، $[\vartheta_z, \vartheta_z + d\vartheta_z]$ كما يلي:

$$\boxed{dN(\vartheta_{x,y,z}) = \frac{N}{Z}\, e^{\beta\varepsilon}\, g(\vartheta_{x,y,z})\, d\vartheta_{x,y,z}} \qquad (1)$$

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (ox مثلاً). (أي لمعرفة $dN(\vartheta_x)$ التي تنحصر سرعها في المجال $[\vartheta_x, \vartheta_x + d\vartheta_x]$)، فإننا نُعيد صياغة مفهوم عنصر فراغ الاندفاع الطوري بالشكل التالي:

$$d\Gamma(P_{x,y,z}) = dq_V . dP_V = V\, dP_x\, dP_y\, dP_z \qquad (2)$$

وبما أن
$$dP_x = m\, d\vartheta_x \qquad \wp \qquad dP_y = m\, d\vartheta_y \qquad \wp \qquad dP_z = m\, d\vartheta_z$$

بالتعويض في (2) بعد استبدال مركبات الاندفاع بمركبات السرع

$$d\Gamma(\vartheta_{x,y,z}) = dq_V . dP_V = V\, m^3\, d\vartheta_x\, d\vartheta_y\, d\vartheta_z$$

وبالعودة إلى العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري التي تصبح بالشكل التالي:

$$g(\vartheta_{x,y,z})\, d\vartheta_{x,y,z} = C\, d\Gamma(\vartheta_{x,y,z}) = CV\, m^3\, d\vartheta_x\, d\vartheta_y\, d\vartheta_z \qquad (3)$$

وإذا اعتبرنا الطاقة الإجمالية طاقة حركية

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \vartheta^2 = \frac{1}{2} m (\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2) \qquad (4)$$

وإذا أخذنا تابع التحاص لجسيم واحد

$$Z = CV\, (2\pi m KT)^{3/2} \qquad (5)$$

كما نأخذ مضروب لاغرانج بعين الاعتبار

$$\beta = -1/KT \qquad (6)$$

نعوض (3) و (4) و (5) و (6) في (1) نحصل على عدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعها المطلقة بالشكل التالي:

$$dN(\vartheta_{x,y,z}) = \frac{N}{CV\, (2\pi m KT)^{3/2}}\, e^{-\frac{m}{2KT}(\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2)}\, CV\, m^3\, d\vartheta_x\, d\vartheta_y\, d\vartheta_z$$

$$dN(\vartheta_{x,y,z}) = N \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_x^2}\, d\vartheta_x\; e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_y^2}\, d\vartheta_y\; e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_z^2}\, d\vartheta_z$$

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (وليكن ox مثلاً) ندع مركبة سرعته دون تكامل.
ونكامل مركبات السرعة على المحورين الآخرين oy و oz في المجال $]-\infty, +\infty[$ كما يلي:

$$dN(\vartheta_x) = N \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_x^2}\, d\vartheta_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_y^2}\, d\vartheta_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2KT}\vartheta_z^2}\, d\vartheta_z$$

نحل التكاملات باستخدام تكاملات بواسون وذلك بفرض $\alpha = m/2KT$ على النحو التالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_y^0\, e^{-\alpha\vartheta_y^2}\, d\vartheta_y = 2\int_0^{+\infty} \vartheta_y^0\, e^{-\alpha\vartheta_y^2}\, d\vartheta_y = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_z^0\, e^{-\alpha\vartheta_z^2}\, d\vartheta_z = 2\int_0^{+\infty} \vartheta_z^0\, e^{-\alpha\vartheta_z^2}\, d\vartheta_z = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

بالتعويض عن $\alpha = m/2KT$ وعن التكاملات بقيمها نجد:

$$\boxed{dN(\vartheta_x) = N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha\vartheta_x^2} d\vartheta_x = N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha\vartheta_x^2} d\vartheta_x}$$

للحصول على تابع توزع مركبة السرعة المطلقة ، نقسم الطرفين على N

$$dF(\vartheta_x) = \frac{dN(\vartheta_x)}{N} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha\vartheta_x^2} d\vartheta_x$$

وبملاحظة أن المقدار $G(\vartheta_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha\vartheta_x^2}$ يمثل تابع كثافة غوص الطبيعي (المدروس مسبقاً)، وهو تابع كثافة احتمال. فيكون $F(\vartheta_x)$ تابع توزع غوص الطبيعي. وقد وجدنا سابقاً أنه تابع توزع احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي.

$$F(\vartheta_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(\vartheta_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\vartheta_x) d\vartheta_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha\vartheta_x^2} d\vartheta_x = 1$$

إذن تكون صيغة تابع توزع مركبة السرعة المطلقة ϑ_x على المحور ox بالشكل التالي:

$$\boxed{F(\vartheta_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha\vartheta_x^2} d\vartheta_x}$$

وينطبق الأمر ذاته على بقية المحاور.

تمرين: أوجد قيمة ما يلي: $\overline{\vartheta_x}$ ، $\overline{\vartheta_x^2}$ ، $\overline{\vartheta^2\,\vartheta_x}$ ، $\overline{\vartheta_x^3\,\vartheta_y}$ ، $\overline{(\vartheta_x + b\vartheta_y)^2}$ ، $\overline{\vartheta_x^2\,\vartheta_y^2}$

الحل: بما أن $G(\vartheta_x)$ تابع كثافة احتمال في المجال $]-\infty,+\infty[$ نجد:

بما أن الأس فردي فنجد من تكاملات بواسون $\overline{\vartheta_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_x G(\vartheta_x) d\vartheta_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_x^{1} e^{-\alpha\vartheta_x^2} d\vartheta_x = 0$

تشير هذه النتيجة إلى أن عدد الجسيمات المتحركة وفق ox^+ يساوي العدد المتحرك وفق ox^-

$$\overline{\vartheta_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_x^2 G(\vartheta_x) d\vartheta_x = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \vartheta_x^{2} e^{-\alpha\vartheta_x^2} d\vartheta_x = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \vartheta_x^{2} e^{-\alpha\vartheta_x^2} d\vartheta_x}_{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{KT}{m}$$

$$\overline{\vartheta^2\,\vartheta_x} = \overline{\vartheta^2}\ \overline{\vartheta_x} = 0 \quad ; \quad \overline{\vartheta_x} = 0$$

$$\overline{\vartheta_x^3\,\vartheta_y} = \overline{\vartheta_x^3}\ \overline{\vartheta_y} = 0 \quad ; \quad \overline{\vartheta_y} = 0$$

$$\overline{(\vartheta_x + b\vartheta_y)^2} = \overline{\vartheta_x^{\,2}} + 2b\ \overline{\vartheta_x}\ \overline{\vartheta_y} + b^2\ \overline{\vartheta_y^{\,2}} = (1+b^2)\frac{KT}{m} \quad ; \quad \overline{\vartheta_x} = \overline{\vartheta_y} = 0$$

$$\overline{\vartheta_x^2\,\vartheta_y^2} = \overline{\vartheta_x^2}\ \overline{\vartheta_y^2} = \left(\frac{KT}{m}\right)^2$$

تابع الخطأ (Error function):

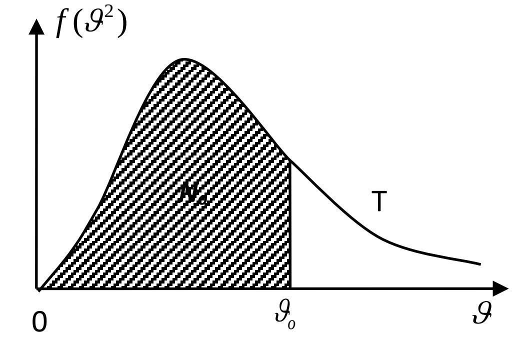
يُعطى تابع الخطأ وفق الصيغة التالية:

$$\boxed{E_r(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx}$$

يأخذ هذا التابع قيمه في المجال المحدود للمتحول x بين الصفر وقيمة ما. كما هو موضح في الجدول التالي:

x	0	0,4	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0	2,2
$E_r(x)$	0	0,4284	0,7421	0,8427	0,9103	0,9763	0,9953	0,9981

حساب عدد الجسيمات N_o المتحركة في مجال محدد للسرعة المطلقة $(0 \to \vartheta_o)$



شكل ( )

وجدنا أن عدد الجسيمات $dN_o(\vartheta)$ التي تقع سرعها المطلقة في المجال $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$ يعطى وفق توزع M-B بالعلاقة:

$$dN_o(\vartheta) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2} d\vartheta$$

لإيجاد عدد الجسيمات N_o المتحركة في المجال $(0 \to \vartheta_o)$ الموضحة بالشكل ( ).

نكامل عبارة التوزع السابقة في المجال المذكور:

$$N_o(0 \to \vartheta_o) = \int_0^{\vartheta_o} dN(\vartheta) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\vartheta_o} \vartheta^2 e^{-\alpha\vartheta^2} d\vartheta$$

لحل التكامل: نغير في المتحول. لذا نفرض الوسيط x بالشكل التالي $\boxed{x^2 = \alpha\,\vartheta^2}$، فيكون $\vartheta = x/\sqrt{\alpha}$ و $d\vartheta = dx/\sqrt{\alpha}$

أما حدود التكامل فنجدها بالشكل التالي: عندما $\vartheta = 0$ فإن $x = 0$ ، وعندما $\vartheta = \vartheta_o$ فإن $\boxed{x = \sqrt{\alpha}\,\vartheta_o}$ وبالتعويض نجد:

$$N_o(0 \to \vartheta_o) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{3/2} \int_0^{\sqrt{\alpha}\,\vartheta_o} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} x^2 e^{-x^2} dx$$

وبملاحظة المقدار داخل التكامل، الذي يمكن كتابته بالشكل: $x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{x}{2} d(e^{-x^2})$ ، وبالتعويض نجد:

$$N_o(0 \to \vartheta_o) = -\frac{2N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} x\, d(e^{-x^2})$$

نوجد قيمة التكامل بالتجزئة. $u = x \Rightarrow du = dx$ و $dV = d(e^{-x^2}) \Rightarrow V = e^{-x^2}$

$$N_o(0 \to \vartheta_o) = -\frac{2N}{\sqrt{\pi}} \left[x e^{-x^2} - \int_0^{x} e^{-x^2} dx \right]$$

نصوغ العبارة بحيث نحصل على تابع الخطأ. بالشكل التالي:

$$N_o(0 \to \vartheta_o) = N \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-x^2} dx - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2} \right]$$

فنحصل على عدد الجسيمات $N_o(0 \to \vartheta_o)$

$$\boxed{N_o(0 \to \vartheta_o) = N \left[E_r(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2} \right]} \qquad (*)$$

<u>مثال:</u> أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجالات المعطاة بدلالة السرعة المميزة ϑ_H (الأكثر احتمالاً) التالية $N_o(0 \to \vartheta_o = \vartheta_H)$ و $N_o(0 \to \vartheta_o = 0{,}8\,\vartheta_H)$.

الحل: لإيجاد عدد الجسيمات $N_o(0 \to \vartheta_o = \vartheta_H)$

نوجد قيمة الوسيط x بالاستفادة من تعريف السرعة الأكثر احتمالاً $\vartheta_o = \vartheta_H = 1/\sqrt{\alpha}$

فنجد من تعريف الوسيط $x = \sqrt{\alpha}\,\vartheta_o \Rightarrow x = \sqrt{\alpha}\,\vartheta_H = 1$

بالتعويض في (*): وإجراء الحسابات والتعويض عن $E_r(1)$ بقيمتيهما من جدول الخطأ نجد:

$$N_o(0\to\vartheta_H)=N\left[E_r(1)-\frac{2}{\sqrt{\pi}\,e}\right]=N\left[0,8427-\frac{2}{\sqrt{3,14\times 2,718}}\right]=N\,[0,8427-0,4153]=0,4274\;N$$

أي أن عدد الجسيمات N_o التي تقع سرعها المطلقة في المجالات المعطاة بدلالة السرعة المميزة ϑ_H هو نسبة مئوية من التعداد الكلي للجسيمات N:

$$N_o(0\to\vartheta_H)=\frac{42,74}{100}N\;=42,74\;\%\;\;N$$

أما بالنسبة للمجال الثاني $N_o(0\to\vartheta_o=0,8\,\vartheta_H)$ فنجد أن قيمة الوسيط $0,8\,\vartheta_H=0,8$ $x=\sqrt{\alpha}$ وبالتعويض نجد:

$$N_o(0\to 0,8\,\vartheta_H)=N\left[E_r(0,8)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{0,8}{e^{(0,8)^2}}\right]=N\left[0,7421-1,128\,\frac{0,8}{1,896}\right]$$
$$=N[0,7421-0,4758]=0,2663\;N=26,63\;\%\;N$$

تطبيق: تأكد من أن عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $N_o(0\to\vartheta_o=\infty)$ هو كامل عدد جسيمات الجملة (N):

البرهان: نكتب (*) بالشكل الذي يظهر فيه تابع الخطأ بوضوح

$$N_o(0\to\vartheta_o)=N\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx-\frac{2}{\sqrt{\pi}}x\,e^{-x^2}\right]$$

من تعريف الوسيط $x=\sqrt{\alpha}\;\vartheta_o$ نلاحظ أن مجال التكامل للحد الأول يصبح $]0\to\infty[$، وتنعدم قيمة الحد الثاني. وباستخدام تكاملات بواسون نحصل على المطلوب كما يلي:

$$N_o(0\to\vartheta_o=\infty)=N\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right]=N\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]=N$$

مثال: أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $N_o(\vartheta_H\to\infty)$.

الحل: نكتب المجال المطلوب بالشكل:

$$N_o(\vartheta_H\to\infty)=\underbrace{N_o(0\to\infty)}_{N}-N_o(0\to\vartheta_H)=N-0,4267\;N=0,5733\;N=57,33\;\%\;N$$

مثال: أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $N_o(\vartheta_H\to 1,6\;\vartheta_H)$.

الحل: نكتب المجال المطلوب بالشكل:

$$N_o(\vartheta_H\to 1,6\;\vartheta_H)=N_o(0\to 1,6\;\vartheta_H)-N_o(0\to\vartheta_H)$$

نستخدم (*) في التعبير عن قيمة كلٍ من $N_o(0\to 1,6\;\vartheta_H)$ و $N_o(0\to\vartheta_H)$ كما يلي:

$$N_o(\vartheta_H\to 1,6\,\vartheta_H)=N\left[E_r(1,6)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}1,6\,e^{-(1,6)^2}\right]-N\left[E_r(1)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}1\,e^{-(1)^2}\right]$$

$$N_o(\vartheta_H\to 1,6\,\vartheta_H)=N\left[E_r(1,6)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1,6}{e^{(1,6)^2}}-E_r(1)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{e}\right]$$

وبإجراء الحسابات والتعويض عن $E_r(1,6)$ و $E_r(1)$ بقيمتيهما من جدول الخطأ نجد:

$$N_o(\vartheta_H\to 1,6\,\vartheta_H)=N[0,9763-0,1396-0,8427+0,4151]=0,4091\;N=40,91\;\%\;N$$

ملاحظة: يمكن إيجاد $N_o(0\to\vartheta_o=\bar{\vartheta})$ أو $N_o(0\to\vartheta_o=\sqrt{\overline{\vartheta^2}})$ ولكن نحتاج لقيم موسعة لجدول الخطأ.

مثال: أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في مجالي السرعتين المميزتين التاليتين

$N_o(0 \to \vartheta_o = \bar{\vartheta})$ أو $N_o(0 \to \vartheta_o = \sqrt{\overline{\vartheta^2}})$

الحل: نستفيد من القيم المميزة للسرع المطلقة ($\vartheta_H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ و $\bar{\vartheta} = \frac{2}{\sqrt{\pi\alpha}} \approx 1{,}13\,\vartheta_H$ و $\sqrt{\overline{\vartheta^2}} = \sqrt{\frac{3}{2\alpha}} \approx 1{,}22\,\vartheta_H$).

وكما هو ملاحظ فإن $\bar{\vartheta}$ و $\sqrt{\overline{\vartheta^2}}$ معطاتان بدلالة $\vartheta_H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

$$N_o(0 \to \vartheta_o = \bar{\vartheta} \approx 1{,}13\,\vartheta_H) = N\left[E_r(1{,}13) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}1{,}13\,e^{-(1{,}13)^2}\right]$$

$$N_o(0 \to \vartheta_o = \sqrt{\overline{\vartheta^2}} \approx 1{,}22\,\vartheta_H) = N\left[E_r(1{,}22) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}1{,}22\,e^{-(1{,}22)^2}\right]$$

حساب عدد الجسيمات N_o المتحركة وفق أحد المحاور " مثلاً ox " في مجال محدد للسرعة المطلقة $(0 \to \vartheta_o)$

وجدنا أن عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي $dN_o(\vartheta_x)$ المتحركة وفق المحور ox، التي تقع سرعها المطلقة في المجال المحدد $[\vartheta_x, \vartheta_x + d\vartheta_x]$ يعطى بالعلاقة: $dN_o(\vartheta_x) = N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\; e^{-\alpha\vartheta_x^2}\, d\vartheta_x$

لإيجاد العدد الواقع في المجال $N_o(0 \to \vartheta_o)$ نكامل على المجال المذكور.

$$N_o(0 \to \vartheta_o) = \int_0^{\vartheta_o} dN_o(\vartheta_x) = N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_0^{\vartheta_o} e^{-\alpha\vartheta_x^2}\, d\vartheta_x$$

وبأسلوب مشابه لما سبق: نفرض الوسيط x بالشكل التالي $\boxed{x^2 = \alpha\,\vartheta_x^2}$، فيكون $\vartheta_x = x/\sqrt{\alpha}$ و $d\vartheta_x = dx/\sqrt{\alpha}$

أما حدود التكامل فنجدها بالشكل التالي: عندما $\vartheta_x = 0$ فإن $x = 0$، وعندما $\vartheta_x = \vartheta_o$ فإن $\boxed{x = \sqrt{\alpha}\;\vartheta_o}$

وبالضرب والقسمة على 2 والتعويض نجد:

$$N_o(0 \to \vartheta_o) = N\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{x} e^{-x^2}dx = \frac{N}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-x^2}dx\right] \Rightarrow \boxed{N_o(0 \to \vartheta_o) = \frac{N}{2}E_r(x)} \qquad (**)$$

مثال: أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي المتحركة وفق المحور ox، التي تقع سرعها المطلقة في المجالات المعطاة بدلالة السرعة المميزة الأكثر احتمالاً التالية $N_o(0 \to \vartheta_o = \vartheta_H)$ ، و $N_o(0 \to \vartheta_o = 1{,}2\,\vartheta_H)$.

الحل: نوجد قيمة الوسيط x من تعريف السرعة الأكثر احتمالاً $\vartheta_o = \vartheta_H = 1/\sqrt{\alpha}$

فنجد من تعريف الوسيط للمجال الأول $x = \sqrt{\alpha}\;\vartheta_o = 1$ وبالتعويض في (**) نجد:

$$N_o(0 \to \vartheta_o = \vartheta_H) = \frac{N}{2}E_r(1) = \frac{N}{2}0{,}8427 = 0{,}4214\,N = 42{,}14\,\%\,N$$

ومن أجل المجال الثاني يكون $x = \sqrt{\alpha}\;\vartheta_o = \sqrt{\alpha}\;1{,}2\vartheta_H = 1{,}2$ وبالتعويض في (**) نجد:

$$N_o(0 \to \vartheta_o = 1{,}2\,\vartheta_H) = \frac{N}{2}E_r(1{,}2) = \frac{N}{2}0{,}9103 = 0{,}4551\,N = 45{,}51\,\%\,N$$

تطبيق: تأكد من أن عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي المتحركة وفق المحور ox، التي تقع سرعها المطلقة في المجال $N_o(0 \to \vartheta_o = \infty)$ هو نصف عدد جسيمات الجملة $(N/2)$، مع التعليل:

البرهان: نكتب (**) بالشكل الذي يظهر فيه تابع الخطأ بوضوح

$$N_o(0\to\vartheta_o)=\frac{N}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx\right]$$

من تعريف الوسيط $x=\sqrt{\alpha}\ \vartheta_o$ نلاحظ أن مجال التكامل يصبح $[0\to\infty[$. وباستخدام تكاملات بواسون نحصل على المطلوب كما يلي:

$$N_o(0\to\vartheta_o=\infty)=\frac{N}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]=\frac{N}{2}$$

أما تعليل ذلك فيعود لمبدأ تكافؤ الفرص. حيث يكون عدد الجسيمات المتحركة وفق الاتجاه الموجب للمحور ox^+ مساوياً لعددها المتحرك في الاتجاه المعاكس، أي وفق ox^-.

<u>مثال:</u> أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي المتحركة وفق المحور ox، التي تقع سرعها المطلقة في المجال $N_o(\vartheta_H\to\infty)$.

الحل: نفرق المجال المطلوب ونعوض كما يلي:

$$N_o(\vartheta_H\to\infty)=\underbrace{N_o(0\to\infty)}_{N/2}-N_o(0\to\vartheta_H)=\frac{N}{2}-\frac{N}{2}E_r(1)=\frac{N}{2}(1-0{,}8427)\ N=0{,}0786\ N\approx 7{,}86\ \%\ N$$

وبالعودة لنتيجة المثال الأسبق $N_o(0\to\vartheta_o=\vartheta_H)=42{,}14\ \%\ N$ نلاحظ أن:

$$N_o(0\to\vartheta_H)+N_o(\vartheta_H\to\infty)=42{,}14\ \%\ N+7{,}86\ \%\ N=50\ \%\ N=N/2$$

<u>مثال:</u> أوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي المتحركة وفق المحور ox، التي تقع سرعها المطلقة في المجال المعطى بدلالة السرعة المميزة الأكثر احتمالاً $N_o(\vartheta_H\to 1{,}6\ \vartheta_H)$.

الحل: نكتب المجال المطلوب بالشكل:

$$N_o(\vartheta_H\to 1{,}6\ \vartheta_H)=N_o(0\to 1{,}6\ \vartheta_H)-N_o(0\to\vartheta_H)$$

نستخدم (**) في التعبير عن قيمة كلٍ من $N_o(0\to 1{,}6\ \vartheta_H)$ و $N_o(0\to\vartheta_H)$ كما يلي:

$$N_o(\vartheta_H\to 1{,}6\ \vartheta_H)=\frac{N}{2}E_r(1{,}6)-\frac{N}{2}E_r(1)==\frac{N}{2}\left[E_r(1{,}6)-E_r(1)\right]$$

بالتعويض في تابع الخطأ:

$$N_o(\vartheta_H\to 1{,}6\ \vartheta_H)=\frac{N}{2}\left[0{,}9763-0{,}8427\right]=0{,}0668\ N=6{,}68\ \%\ N$$