كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : كهرباء ومغناطيسية٢

المحاضرة : الثانية/نظري/

# المحاضرة الثانية

• ملاحظات مهمة:

1 - إذا كان الفيض الناشئ في أحد الملفين لا يقطع الملف الآخر نظراً لا تباعد بعضهما عن بعض فإن $M = 0$ ويكون الحث الذاتي المكافئ طبقاً للمعادلتين (★) و (★★):

$$L = L_1 + L_2 \quad (1)$$

2 - بطرح المعادلة (★★) من المعادلة (★) ينتج أن الحث المتبادل بين الملفين هو:

$$M = \frac{1}{4}(L' - L'') \quad (2)$$

3 - إذا كان الملفان ملفوفين على قلب حديدي كما هو الحال في محول التيار، وإذا كان الملفات متلاصقين فإن التدفق الناتج عن أحد الملفين يتصل كله (عملياً) بالملف الآخر، عندئذ يمكن الحصول من تعريف الحث الذاتي، من المعادلة $L = \frac{N\phi}{I}$، والحث المتبادل معادلة $M = \frac{N_2 \phi_{2-1}}{I_1}$، $M = \frac{N_1 \phi_{1-2}}{I_2}$ على ما يلي:

$$L_1 = \frac{N_1 \phi_1}{I_1} \quad ; \quad L_2 = \frac{N_2 \phi_2}{I_2} \quad ; \quad M = \frac{N_1 \phi_2}{I_2} = \frac{N_2 \phi_1}{I_1}$$

$$\therefore M^2 = \frac{N_1 \phi_2 \times N_2 \phi_1}{I_2 \times I_1} = \frac{N_1 \phi_1}{I_1} \times \frac{N_2 \phi_2}{I_2} = L_1 \times L_2$$

أي أن:

$$M = \sqrt{L_1 \times L_2} = (L_1 \times L_2)^{1/2} \quad (3)$$

أي أن الحث المتبادل بين ملفين يساوي الجذر التربيعي لحاصل ضرب حثيهما الذاتي وذلك عند تلاصق الملفين.

4 - يقاس الحث الذاتي والحث المتبادل عملياً باستخدام دوائر التيار المتردد، ويمكن أيضاً قياسها باستخدام التيار المستمر.

## 2- توصيل ملفات الحث على التوازي : Inductors in parallel

وإذا فرض أن الملفين ، متصلان على التوازي ففي هذه الحالة يتفرع التيار $I$ بين الملفين ويكون التيار الكلي مساوياً إلى:

$$I = I_1 + I_2 \quad (4)$$

حيث $I_1$ التيار المار في الملف الذي حثه الذاتي $L_1$ و $I_2$ والتيار المار في الملف الذي حثه الذاتي $L_2$ . ويكون معدل تغير التيار الكلي بالنسبة للزمن مساوياً لمجموع معدل التغير لكل من $I_1$ و $I_2$ ويتم ذلك بتفاضل المعادلة (4) بالنسبة للزمن:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \quad (5)$$

وبعض من المعادلة : $\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$ يكون :

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{L} \;,\; \frac{dI_1}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_1}{L_1} \;,\; \frac{dI_2}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_2}{L_2}$$

وبالتعويض في (5) مع ملاحظة أن $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ نجد أن :

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

وإذا كان هناك عدد من الملفات $n$ يزيد عن اثنين فإن العلاقة الأخيرة يمكن كتابتها بالصورة التالية

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \text{---} + \frac{1}{L_n}$$

ويتم هذا بشرط أن نقوم باتخاذ احتياطات معينة تمنع تأثير المجالات المغناطيسية لهذه الملفات بعضها على بعض حتى لا يحدث ارتباط مغناطيسي بينها نتيجة التأثير المتبادل.

- سريان التيار في دارة حثية : Current in an Inductive circuit

### 1- نمو التيار : Growth of current

عند توصيل مصدر كهربائي جهده ثابت ومقداره $V$ فولت إلى دارة بها مقاومة $R$ أوم وليس لها حث ذاتي (بمعنى أن أجزاء الدارة المختلفة لا تنتج أي مجال مغناطيسي) فإن شدة التيار الذي يمر بالدارة يخضع لقانون أوم أي أن :

$$I = \frac{V}{R}$$

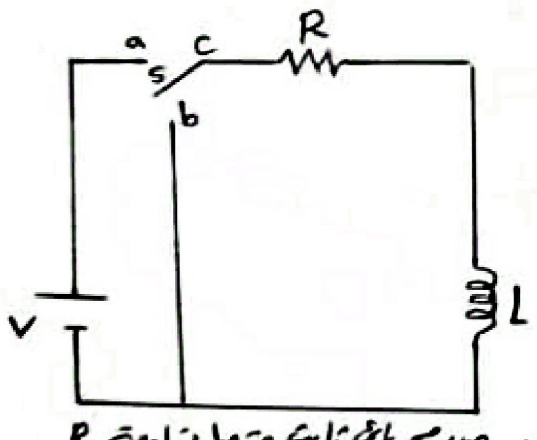
ويبلغ هذا التيار هذه القيمة في اللحظة نفسها التي تقفل فيها الدائرة أي أنه لا يستغرق أي وقت في نموه، وذلك لعدم وجود أي عائق يعوق هذا النمو.

• أما إذا كانت الدائرة تحتوي على ملف له حث ذاتي $L$، ومقاومة $R$ فإن المجال المغناطيسي الذي ينشأ في الملف كما في الشكل (1) يقاوم نمو التيار ومن ثم تتولد قوة دافعة كهربائية مضادة تتوقف قيمتها على معامل الحث الذاتي $L$ ومعدل نمو التيار $\frac{dI}{dt}$ حيث $I$ هي قيمة التيار المار في الدائرة عند اللحظة $t$ اعتباراً من وقت قفل الدائرة. ويجب أن يكون الجهد $V$ في هذه الحالة مركبتان إحداهما للتغلب على هبوط الجهد $IR$ في المقاومة والأخرى لموازنة القوة الدافعة الكهربائية المضادة $L.\frac{dI}{dt}$. ومن ثم فإن معادلة توزيع الجهد هي:

$$V = IR + L\frac{dI}{dt} \quad (6)$$

وبضرب طرفي المعادلة في $I.dt$ يمكن الحصول على:

$$VIdt = I^2R.dt + LI.dt\left(\frac{dI}{dt}\right)$$



الشكل (1): مصدر كهربائي ثابت متصل بمقاومة $R$ وملف $L$.

يمثل المقدار $(V.I.dt)$ كمية الطاقة (energy) التي تأخذها الدائرة الكهربائية من المصدر في الزمن $(dt)$ ويمثل $I^2.R.dt$ الطاقة التي تتبدد في الدائرة على شكل طاقة حرارية في المقاومة $(R)$ كما أن الحد $L.Idt.\left(\frac{dI}{dt}\right)$ يمثل الطاقة التي تستخدم في بناء المجال المغناطيسي في الزمن $dt$ وتختزن فيه. وتظل الأمور تسير في هذا النحو حتى يبلغ التيار قيمته النهائية فيتوقف نموه عند قيمة ثابتة $(I_{max})$ وتصبح قيمة $\frac{dI}{dt}$ مساوية للصفر عندئذ يتوقف نمو المجال المغناطيسي وتصبح الطاقة التي يعطيها المصدر الكهربائي في الدائرة مساوية للطاقة الحرارية التي تتبدد في المقاومة وتخضع الدائرة لقانون أوم أي أن:

$$V = I_{max}.R$$

$$V.I_{max}dt = I^2_{max}.R.dt$$

وبحل المعادلة التفاضلية نحصل على قيمة التيار $I$ عند أي لحظة $t$ خلال فترة نموه بعد غلق الدائرة عند اتصال $S$ بـ $a$، شكل (1)، ويتم ذلك كما يلي:

• يمكن إعادة كتابة المعادلة (6) على الشكل التالي: $\frac{L}{R} \cdot \frac{dI}{dt} + \left(I - \frac{V}{R}\right) = 0 \quad (7)$

وبوضع $y = I - \frac{V}{R}$ يمكن الحصول على:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dI}{dt}$$

وبالتعويض في المعادلة (7) يكون:

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{dy}{dt} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{R}{L}\, dt$$

وبتكامل هذه المعادلة يمكن الحصول على:

$$\ln y = \frac{R}{L} t + \text{constant}$$

$$\ln\left(I - \frac{V}{R}\right) = -\frac{R}{L} t + \text{constant}$$

ويحسب ثابت التكامل بمعرفة الشروط الابتدائية.

ففي البداية يكون $I = 0$ عندما $t = 0$ ومن ذلك يمكن الحصول على:

$$\ln\left(-\frac{V}{R}\right) = \text{constant} \quad , \quad \ln\left(I - \frac{V}{R}\right) = -\frac{R}{L} t + \ln\left(-\frac{V}{R}\right)$$

أو:

$$\ln\left(\frac{I - \frac{V}{R}}{-\frac{V}{R}}\right) = -\frac{R}{L} \cdot t$$

أو

$$\left(I - \frac{V}{R}\right) = -\frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$\Rightarrow I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right) \quad (8)$$

أو $$I = I_{max}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right) \quad (9)$$

حيث $I_{max}$ هي القيمة النهائية الثابتة للتيار الذي يمر في الدائرة ويلاحظ من الناحية النظرية البحتة أنه من الناحية العملية فإن التيار يصل $I = I_{max}$ في زمن مقداره لا نهائي أي $t = \infty$ أما من الناحية العملية فإن التيار يبلغ قيمته النهائية بعد زمن قصير.

• بمفاضلة المعادلة (9) بالنسبة للزمن للحصول على معدل تغير التيار يمكن الحصول على:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \quad (10)$$

• ويكون معدل تغير التيار لحظة غلق الدائرة أي عند $t = 0$ هو:

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_0 = \frac{V}{L}$$

وهذا هو أكبر معدل لتغير التيار ويكون الجهد على الجزء الحثي في الدائرة في اللحظة التي تغلق فيها الدائرة هو :

$$V = L\left(\frac{dI}{dt}\right)_0$$

أي أن الجهد على المقاومة في هذه اللحظة يساوي الصفر.

ويلاحظ أن المقدار $\frac{L}{R}$ له أبعاد الزمن لأن :

$$\frac{L}{R} = \frac{H}{\Omega} = \frac{V/(A/S)}{V/A} = S$$

وإذا عوضنا في المعادلة (9) بالقيمة $\frac{L}{R} = t$ نحصل على قيمة التيار بعد زمن مقداره $\frac{L}{R}$ ثانية ويرمز له بالرمز $T$ كما يطلق عليه اسم ثابت الزمن (time constant) وتكون شدة التيار المطلوبة هي :

$$I = I_{max}(1 - e^{-1}) = 0{,}632\, I_{max}$$

ويُعرف ثابت الزمن عندئذ بأنه الزمن الذي يستغرقه التيار حتى يصل إلى $0{,}632$ من قيمته النهائية الثابتة.

ويمكن كتابة المعادلة (10) على الشكل التالي :

$$L \cdot \frac{dI}{dt} = Ve^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

أو

$$\varepsilon = Ve^{-\frac{R}{L} \cdot t} \qquad (11)$$

حيث $\varepsilon$ القوة الدافعة المستحدثة.

## 2 - اضمحلال التيار (Decay of the current)

بفرض أنه بعد وصول التيار إلى قيمته الثابتة النهائية ($I_{max}$) فُتح المفتاح S كما في الشكل (1) من النقطة a ووصل بالنقطة b، أي أن القوة الدافعة V البطارية أصبحت مستبعدة وبذلك تتحول المعادلة (6) إلى :

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + IR = 0 \qquad (12)$$

وبتكامل هذه المعادلة يمكن الحصول على :

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\,dt$$

$$\ln I = -\frac{R}{L}t + \text{constant} \qquad (13)$$

ويحسب ثابت التكامل بمعرفة الشروط الابتدائية فعندما

$$I = I_{max}, \quad t = 0$$

أي لحظة بدء انقطاع التيار :

$$\ln I_{max} = \text{constant}$$

وبالتعويض في المعادلة (13) نحصل على :

$$I = I_{max} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \qquad (14)$$

وهذه هي معادلة اضمحلال التيار في دارة حث ومقاومة ويسمى المقدار $\frac{L}{R}$ بثابت الزمن

كما ذكر سابقاً وإذا عوضنا عن $t = \frac{L}{R}$ في المعادلة (14-b) فإن :

$$I = I_{max} \cdot e^{-1} = 0,368\, I_{max}$$

ومن الممكن تعريف ثابت الزمن بأنه (الزمن اللازم لوصول التيار إلى 0,37 من قيمته الأصلية)

ولضرب طرفي المعادلة (2) في $I \cdot dt$ نحصل على معادلة الطاقة :

$$L \cdot I \cdot \left(\frac{dI}{dt}\right) \cdot dt + I^2 \cdot R \cdot dt = 0$$

ويتضح من هذه المعادلة أن الطاقة التي تبددها المقاومة على شكل طاقة حرارية مستمدة من الطاقة المختزنة في المجال المغناطيسي ، ولذلك فإن الطاقة في المجال المغناطيسي تكون قد استنفذت من آخرها وتصبح قيمتها صفراً عندما تصبح قيمة التيار صفراً .

## - طاقة الحث : Energy Associated wit a Inductor

تتحول الطاقة المبذولة بواسطة البطارية ، في حالة بناء التيار في الدارة المبينة في الشكل (1) إلى :

أ - طاقة يختزنها الملف وتظهر فيه على هيئة مجال مغناطيسي .

ب - طاقة تستهلك في المقاومة $R$ وتظهر على هيئة حرارة .

بضرب طرفي المعادلة (6) بشدة التيار فيمكن الحصول على :

$$IV = I^2 \cdot R + LI\,\frac{dI}{dt}$$

حيث $IV$ يمثل معدل بذل الطاقة « أي القدرة Power » بواسطة البطارية و $I^2 \cdot R$ يمثل معدل تولد الطاقة الحرارية أي القدرة المستهلكة في المقاومة و $LI \cdot \frac{dI}{dt}$ يمثل القدرة اللازمة لبناء مجال مغناطيسي للملف التي تمثل معدل بذل الطاقة لبناء المجال فترة نمو التيار ، وعندما يصل التيار إلى قيمته النهائية ($I$) فإن $\frac{dI}{dt} = 0$ ويتوقف إمداد الملف بالطاقة التي سنرمز لها بالرمز « $W$ » .

ويكون معدل بذل الطاقة « القدرة » لبناء التيار أي لبناء المجال المغناطيسي هي :

$$P = \frac{dW}{dt} = LI \cdot \frac{dI}{dt} \quad ; \quad dW = LI \cdot dI$$

ونحصل على الشغل الكلي لبناء التيار من الصفر إلى $I$ بتكامل هذه المعادلة :

$$W = \int dW = \int_0^I L \cdot I\, dI = \frac{1}{2} L I^2 \quad (15)$$

وهذه الطاقة تختزن في الملف على هيئة مجال مغناطيسي ويرمز لها عادة بالرمز $U$ .

هذا وقد افترض أن الملف والمقاومة هما منفصلان منفصلان في دارة المبينة شكل (1)

ولكن القوانين التي استنتجت صحيحة أيضاً في الحالة التي يمر فيها التيار في ملف له مقاومة $R$ وحث ذاتي $L$ .

وإذا كانت لدينا دارتان، كما في الشكل (2) في المحاضرة السابقة، فإن الطاقة المطلوبة لبناء التيارين $I_1$ و $I_2$ يمكن الحصول عليها من المعادلة (*) حيث:

$$dU = L_1 . I_1 . dI_1 \pm M I_1 dI_2 \pm M I_2 . dI_1$$

$$d(M I_1 . I_2) = M I_1 dI_2 + M I_2 . dI_1$$

$$dU = L_1 . I_1 . dI_1 + L_2 I_2 dI_2 \pm d(M I_1 I_2)$$

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 . I_2^2 \pm M I_1 I_2 \qquad (16)$$

- كثافة الطاقة للمجال مغناطيسي

**Energy density of amagnetic field**

توضح المعادلة (16) الطاقة اللازمة لبناء مجال مغناطيسي في ملف فإذا افترض أن طول الملف $l$ ومساحة مقطعه $S$ وعدد لفاته $N$ وكان الملف طويلاً بحيث يمكن اهمال المجال المغناطيسي خارجه واعتبار أن الفيض المغناطيسي داخله يخترق بانتظام محور الملف فإن الطاقة كلها ستكون مخزونة في حجم يساوي ($Sl$) وتكون الطاقة في وحدة الحجوم، كثافة الطاقة (energy density) هي:

$$u = \frac{L . I^2}{2 l S} \qquad (17)$$

ولدينا سابقاً: $\quad B = \frac{\mu_0 N . I}{l} \quad , L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$

وبالتعويض في المعادلة (17):

$$u = \frac{1}{2\mu_0} . B^2$$

حيث إن $B = \mu_0 . H$ ( $H$ شدة المجال المغناطيسي )

$$u = \frac{1}{2} \mu_0 . H^2 = \frac{1}{2} B H \qquad (18)$$

وإذا كان الملف ملفوفاً حول مادة معامل نفاذيتها $\mu_r$ حيث $\mu = \mu_0 . \mu_r$ معامل النفاذية النسبية

$$U = \frac{1}{2} \mu_0 . \mu_r \; H^2$$

تعتبر المعادلة (18) معادلة عامة وتعطي كثافة الطاقة أي الطاقة لوحدة الحجوم في أي مجال مغناطيسي مهما كان شكل هذا المجال ومصدره.

## مسألة (1):

ملف حثه الذاتي 3 هنري ومقاومته 6 أوم متصل على التوالي ببطارية فرق الجهد 12 فولت ومقاومتها الداخلية مهملة.

احسب: 1- معدل نمو التيار بمجرد غلق الدارة

2- معدل نمو التيار عندما تصل قيمته إلى 1 أمبير.

3- شدة التيار بعد انقضاء زمن قدره 0,2 ثانية على غلق الدارة

4- الطاقة المخزونة في هذا الملف بعد وصول التيار إلى قيمته المستقرة.

**الحل:** يمكن كتابة المعادلة (6) بالشكل التالي:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} - \frac{R}{L} . I$$

ولايجاد المطلوب (1) فإنه بمجرد غلق الدارة يكون:

$$I = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{12}{3} = 4 \; (A/s)$$

-2

$$\frac{dI}{dt} = \frac{12}{3} - \frac{\boxed{6}}{3} \times 1 = 2 \quad A/s$$

-3

$$I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right) = \frac{12}{6}\left(1 - e^{\frac{-6}{3} \times 0,2}\right) = 0,65 A$$

-4

$$U = \frac{1}{2} L I^2_{max} = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{12}{6}\right)^2 = 6 \;\; J$$

## مسألة 2 :

ملف حثه الذاتي 3 هنري يتصل على التوالي لمقاومة 10 أوم وبطارية قوتها الدافعة 3 فولت ومقاومتها الداخلية مهملة والمطلوب حساب ما يلي بعد انقضاء زمن قدره 0,3 ثانية على غلق هذه الدارة.

1- القدرة المبذولة من البطارية.

2- القدرة المستهلكة في المقاومة.

3- القدرة اللازمة لبناء التيار في الملف.

**الحل:**

$$I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{3}{10}\left(1 - e^{-\frac{10}{3}\times 0,3}\right) = 0,189\ A$$

من المعادلة التالية:

$$IV = I^2 . R + L I . \frac{dI}{dt}$$

يكون $P = P_R + P_L$ حيث $P$ القدرة المبذولة من البطارية

1- $P = IV = 0,189 \times 3 = 0,567\ W$

و $P_R$ القدرة المستهلكة في المقاومة $R$ على هيئة حرارة (المطلوب 2)

$$P_R = I^2 . R = (0,189)^2 \times 10 = 0,357\ W$$

و $P_L$ القدرة المبذولة في الملف.

$$P_L = L . I . \frac{dI}{dt}$$

ولمعرفة $P_L$ يتطلب حساب $\frac{dI}{dt}$ باشتقاق المعادلة $A$ نحصل على:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{3}{3} e^{-1} = 0,37\ A/s$$

$$P_L = 3 \times 0,189 \times 0,37 = 0,21\ W$$

ويلاحظ أنه يمكن الوصول إلى هذه النتيجة بمعلومية $P$ و $P_R$ حيث:

$$P_L = P - P_R = 0,567 - 0,357 = 0,21\ W$$

## • شحن وتفريغ متسعة خلال ملف حثي

## charging and Discharging capacitor Through Inductive coil

يمثل الشكل (2) دارة مكونة من ملف $L$ ومقاومة $R$ ومتسعة $C$ وبطارية جهدها $V$ متصلة فيما بينها على التوالي. فيتم الشحن بتوصيل الدارة (2-أ) ويتم التفريغ بتوصيل الدارة (2-ب) بعد شحن المتسعة.

من تطبيق قانون كيرشوف الخاص بتوزيع الجهود للدارتين نحصل على:

١- في حالة الشحن يكون توزيع الجهد كالتالي: $RI + L\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{q}{C} = V$ (19)

$$\because I = \frac{dq}{dt} \Longrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{V}{L}$$

2- أما في حالة التفريغ فيحذف جهد البطارية من المعادلة (19) ومنه:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (20)$$

وواضح أن المعادلتين (19) و (20) معادلتان تفاضليتان تحتاجان إلى حل مناسب لمعرفة سلوك الشحنة مع الزمن وكذلك التيار وسنبدأ أولاً بحل المعادلة (20) في حالة التفريغ.

### أولاً. التفريغ

نحل المعادلة (20) بافتراض حل خاص لها وهو: $q = Ae^{\lambda t}$

$$\therefore \frac{dq}{dt} = \lambda . Ae^{\lambda t} \quad \& \quad \frac{d^2q}{dt^2} = \lambda^2 . A e^{\lambda t}$$

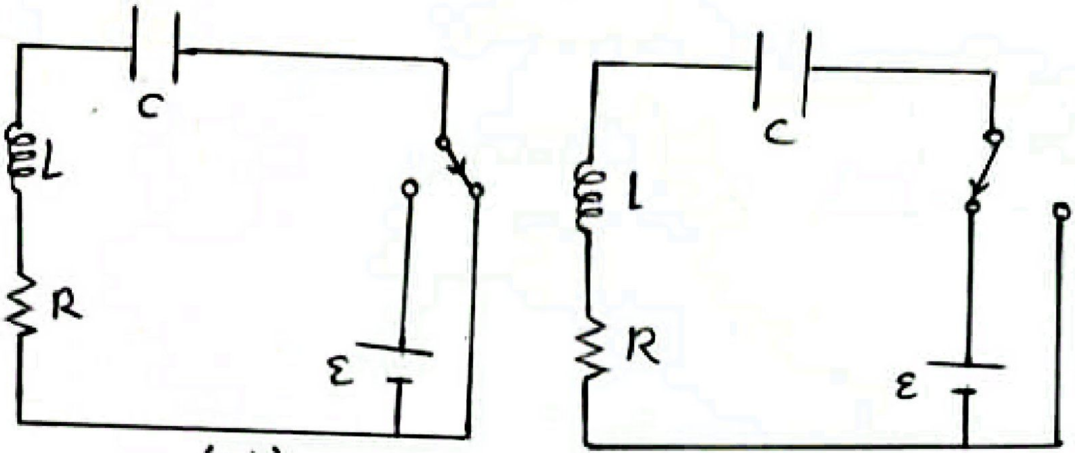
وبالتعويض في المعادلة (20) نحصل على

$$\lambda^2 . Ae^{\lambda t} + \frac{R}{L}\lambda e^{\lambda t} + \frac{1}{LC}A . e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$$

هذه المعادلة من الدرجة الثانية والمعاملات $\alpha = \dfrac{R}{L}$ و $\beta = \dfrac{1}{LC}$ تعرفان بثابتي التوهين (attenuation constant)




(ب)　　　　　　　　(P)

شكل (2) : دارة تحتوي على مكثف C وملف L ومقاومة R متصلة على التوالي ببطارية (P) حالة الشحن (ب) حالة التفريغ

وجذرا هذه المعادلة هما:

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2} \quad و \quad \lambda_2 = \frac{-\alpha - (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2} \qquad (20)'$$

ومن هذه المعادلة يتضح أن الحل للمعادلة (20) يكون على الشكل التالي:

$$q = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_1 t} \qquad (21)$$

$$I = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

أما الشكل الزمني لعملية الشحنة الكهربائية وكذلك التيار فإنه يعتمد على قيمة المقدار الذي يقع تحت الجذر فقد يكون موجباً أو صفراً أو سالباً أي $R^2 >=< 4\frac{L}{C}$ وسنفسر كلاً منها كالتالي:

P- بافتراض أن $R^2 > \frac{4L}{C}$.

في هذه الحالة تكون قيم $\lambda_1$ و $\lambda_2$ حقيقية. ويمكن معرفة $A_1$ و $A_2$ من الشروط الابتدائية حيث

$t=0 \,,\, I=0 \,,\, q=q_0$

وبالتعويض في المعادلتين (21) نحصل على:

$$A_1 + A_2 = q_0 \quad و \quad A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = 0$$

$$A_1 = \frac{\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2(\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}} \cdot q_0 \quad و \quad A_2 = \frac{-\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}}{2(\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}} \cdot q_0$$

وبالتعويض عن $A_1$ في المعادلة (21) نحصل على:

$$q = \frac{\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}}{2\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)} \cdot q_0 \cdot e^{\frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}\right\}t} +$$

$$+ \frac{-\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}}{2\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}} \cdot q_0 \, e^{\frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L} + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}\right\}t}$$

$$I = \frac{V}{\left(R^2 - \frac{4L}{C}\right)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} t} \cdot \left\{ e^{\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2} t} - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2} t} \right\}$$

$$\Rightarrow I = \frac{V}{\left(R^2 - \frac{4L}{C}\right)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t} \cdot \sinh \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}\right)^{1/2} t$$

ب - بافتراض أن $R^2 = \frac{4L}{C}$ :

ويكون الجذران في هذه الحالة متساويين أي أن:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{2}\frac{R}{L}$$

ومع ذلك سيفترض أن الجذرين غير متساويين بحيث تكون قيمتهما $\lambda$ ، $\lambda + h$ حيث $h \to 0$ وبذلك نجد أن يكون الحل كما يلي:

$$q = (A + Bt)e^{\lambda t} \quad , \quad I = (A + Bt)\lambda \cdot e^{\lambda t} + B e^{\lambda t}$$

وبتطبيق الشروط الابتدائية نحصل على قيمتي $A$ و $B$ حيث:

$$A = q_0 \quad , B = \frac{1}{2}\alpha q_0$$

$$q = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right) q_0 \, e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \quad , \quad I = \frac{R^2 t q_0}{4L^2} e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)}$$

ج - بافتراض $R^2 < \frac{4L}{C}$ .

تكون في هذه الحالة $R$ صغيرة وبذلك يكون كل جذر $\lambda_1$ و $\lambda_2$ عبارة عن عدد مركب. الجزء الأول حقيقي والجزء الذي تحت الجذر التربيعي عدد تخيلي وبذلك تصبح المعادلة (20') كالتالي.

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{-\alpha - i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}$$

حيث $i = \sqrt{-1}$

$$\Rightarrow q = A_1 e^{\frac{-\alpha + i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}t} + A_2 e^{\frac{-\alpha - i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}t}$$

أو

$$q = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left[A_1 e^{\frac{i}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2}\,t} + A_2 e^{-\frac{i}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2}\,t}\right]$$

$$\Rightarrow q = A e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2}\,t - \phi\right)$$

$$\Rightarrow q = A e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos(\omega t - \phi) \quad (22)$$

حيث:

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad , \quad \alpha = \frac{R}{L}$$

أما التيار نحسبه بتفاضل المعادلة (22)

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2}\alpha A e^{-\frac{1}{2}\alpha t} \cos(\omega t - \phi) - \omega \sin(\omega t - \phi) A e^{-\frac{1}{2}\alpha t}$$

$$\Rightarrow I = -A e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left[\frac{1}{2}\alpha \cos(\omega t - \phi) + \omega \sin(\omega t - \phi)\right]$$

ويمكن معرفة الثابتين $A$ ، $\phi$ من الشروط الابتدائية فعندما تكون $t = 0$ يكون:

$$q = q_0 \, , \; I = 0 \Longrightarrow q_0 = A\cos\phi \quad (23) \quad , \quad \frac{1}{2}\alpha \cos\phi + \omega \sin\phi = 0$$

أو

$$\sin\phi = \frac{\alpha}{2r} \, , \; \cos\phi = \frac{\omega}{r} \qquad \text{ومنه نجد:} \quad \tan\phi = \frac{\alpha}{2\omega}$$

حيث: $r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ بالتعويض في (23) نجد أن

$$A = \frac{r q_0}{\omega}$$

بالتعويض في $q$ و $I$ نجد أن:

$$q = q_0 \frac{r}{\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos(\omega t - \phi \quad ; \quad I = -A.r e^{-\frac{1}{2}\alpha t} . \sin \omega t$$

$$\Longrightarrow I = -q_0 \frac{r^2}{\omega} . e^{-\frac{\alpha}{2}t} . \sin \omega t$$

والإشارة السالبة تدل على أن التيار في اتجاه معاكس لاتجاه التيار أثناء الشحن.

وأخيراً بالتعويض عن $\alpha$ و $r$ و $\omega$ نحصل على:

$$q = q_0 \frac{(1/\sqrt{L.C}}{\sqrt{1/L.C - (R^2/4L^2)}} e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} . \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}\, t - \phi\right)$$

$$I = \frac{(V/L)}{\sqrt{(1/LC) - (R^2/4L^2)}} e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} . \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}\, t\right)$$

هذه العلاقة علاقة تذبذبية ستقل متناقصة على الخط الأسي وكذلك الحال بالنسبة للمعادلة التي تعطي الشحنة. والتردد الطبيعي للدارة يعطى بالعلاقة:

$$f = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

أما إذا كانت المقاومة $R$ صغيرة جداً فإن المعادلة تصبح بالشكل التالي:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

حيث $f_0$: تردد الذبذبات الحرة.

فإذا فرضنا أن $q_1$ و $q_2$ هما أعلى قيمتين متتاليتين خلال فترة زمنية قدرها $T$ فإن:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha t}}{e^{-\frac{1}{2}\alpha(t+T)}} = e^{\frac{1}{2}\alpha T} \quad , \quad \ln\frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{2}\alpha T = \frac{2\pi\left(\frac{R}{2L}\right)}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

ويرمز للمقدار $\ln \dfrac{q_1}{q_2}$ بالرمز $\delta$ ويعرف بالتناقص اللوغاريتمي لكل دورة للدارة

وإذا كانت مقاومة الدارة صغيرة فإن:

$$\delta = \frac{\pi R}{L}\sqrt{LC} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\pi R}{L\omega_0} = \pi\frac{R}{\left(\frac{1}{\omega_0 C}\right)}$$

أي أنه $S$ تساوي $\pi$ مقسوماً أي النسبة بين المقاومة $R$ والممانعة الحثية (inductive reactance)
أو الممانعة السعوية (capacitive reactance) للدارة في حالة الرنين

والشكل (2) يوضح طبيعة التفريغ الحادث لثلاث قيم للمقاومة الدارة عندما $C = 1\mu F$

$L = 1H$ أما الجهد فيمثل عدداً بسيطاً من الفولت.

## ثانياً: الشحن

لدينا:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0$$

حل هذه المعادلة التفاضلية:

$$I = A_1 e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \cdot \cos(\omega' t - \phi_1)$$

حيث $\phi_1$ و $A_1$ ثوابت يمكن معرفتها بالشروط الابتدائية حيث:

عندما تكون $t=0$ يكون $I = 0$ ومنه $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$

$$I = A_1 e^{\left(+\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \sin \omega' t$$

$q=0$ عندما $t=0$

$$\Rightarrow \left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = \frac{V}{L} \Rightarrow \left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = A_1 \omega' = A_1\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}}$$

وبمساواة المعادلتين السابقتين نحصل:

$$A_1 = \frac{V}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{V}{\sqrt{L/C - R^2/4}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}\, t\right)$$

$$q = q_0\left[1 - \frac{(1/\sqrt{LC})}{\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}\, t - \phi\right)\right]$$

فإذا كانت $R^2 = \frac{4L}{C}$ فإن:

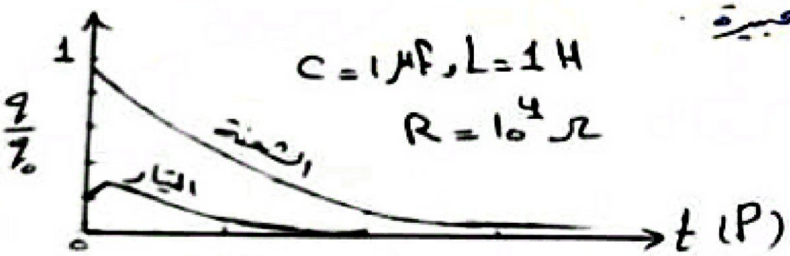
$$I = \frac{V}{L}\, t\, e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)}$$

أما إذا كانت $R^2 > \frac{4L}{C}$ فإن:

$$I = \frac{V}{\sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{L}{C}}}\; e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{L}t\right)} \cdot \sinh\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}\; t$$

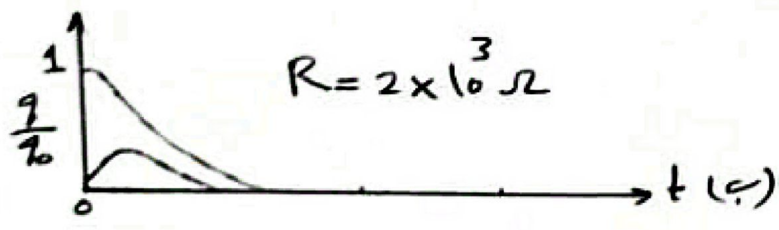
كما يوضح الشكل تغير الشحنة بالنسبة للزمن أثناء شحن المكثف وقد وضعت قيم ثابتة للدارة L و C بحيث يكون الشكل متذبذباً.

ومن الملاحظ أن القيمة العظمى للشحنة عند لحظة البداية، تكون أكبر كثيراً من قيمة الشحنة الابتدائية على المكثف ولذلك إذا شحن المكثف من مصدر جهد عال خلال مقاومة صغيرة ومحاثة كبيرة فإن عزل المكثف سيحدث وميضاً ولمنع حدوث ذلك لابد أن يتم شحن المكثف من خلال مقاومة كبيرة.




الشكل (3):

(P)، ب، ج - تفريغ مكثف سعته 1μf خلال ملف له معامل حث ذاتي قيمته 1H لقيم مختلفة لـ R (($100\Omega$ ، $2\times10^3\Omega$ و $10^4\Omega$))




د - تغير الشحنة q على مكثف أثناء عملية الشحن، خلال ملف L بحيث أن قيم R، L، C تجعل العلاقة متذبذبة مع الزمن