كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك تحليلي

المحاضرة : الثانية /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

- الانتقال الافتراضي:

يعرف الانتقال الافتراضي بأنه الانتقال الذي يحدث بثبات الزمن ويرمز له ب δr تمييزاً له عن الانتقال الحقيقي dr

ولنبحث عن العلاقة الرياضية التي يحققها هذا الانتقال نفترض أن جسماً يتحرك على سطح كرة أو بشكل عام على سطح معادلة هذا السطح هي:

$$F(x, y, z, t) = C \quad \dots\dots (9)$$

ولنفرض أنه حدث للجسم انتقالاً وهمياً (افتراضياً) اختيارياً $\vec{\delta r}$ مركباته هذا الانتقال هي: $(\delta x, \delta y, \delta z)$ وحيث في اللحظة t بحيث يبقى الجسم على السطح وبالتالي تتحقق العلاقة:

$$F(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = C \quad \dots\dots (10a)$$

نجد بنشر العلاقة السابقة أن:

$$F(x, y, z, t) + \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = C \quad \dots\dots (10b)$$

ونجد أنه:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0 \quad \dots\dots (11a)$$

أي أن الانتقال الافتراضي $\vec{\delta r}$ يتعامد مع الناظم على السطح الذي معادلته رقم 9

$$\vec{\nabla}F \cdot \vec{\delta r} = 0 \quad \dots\dots (11b)$$

أما إذا كان الارتباط محرراً حيث يمكن للجسم أن ينفك عن السطح ولا يحقق العلاقة (11a) مساوي عندئذٍ الطرف الثاني من (11b) إلى $C + \delta C$

$$\longrightarrow \vec{\nabla} F . \delta\vec{r} = \delta . c \quad \dots\dots (11c)$$

أما العلاقة التي يحققها الانتقال الحقيقي $d\vec{r}$ الذي يحدث بفعل القوة $\vec{F}$
المؤثرة على الجسم فتختلف عن ما سبق من السهل نشر العلاقة (10a) في
هذه الحالة ما استنتاج أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0 \quad \dots (12a)$$

(هنا حيث يتغير الزمن)

$$\vec{\nabla} . F . d\vec{r} + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0 \quad \dots (12b)$$

يمكن أن تتطابق علاقات الانتقال الحقيقي مع الانتقال الافتراضي عندما لا تحتوي
المعادلة للارتباط (9) الزمن بشكل صريح وبالتالي يمكن أن نعد انتقالاً افتراضياً
عندئذٍ ينطبق على الانتقال الحقيقي في هذه الحالة

نعمم العلاقات السابقة بفرض أن جملة مادية مؤلفة من n جسيم احداثيات
كل منها (x_i, y_i, z_i) و $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ومتأثرة هذه الجملة بـ K
ارتباط هولونومي ثنائي الجانب يعبر عنها بالمعادلات الآتية:

$$Q(x_i, y_i, z_i \dots t) = C_\alpha \; ; \quad \alpha = 1, 2, \dots\dots, K \quad \dots (13)$$

نعطي الجسيم $M_i(x_i, y_i, z_i)$ انتقالات افتراضية $\delta\vec{r}_i$ عندئذٍ أن معادلة
الارتباط:

$$f_\alpha(x_i + \delta x_i, \; y_i + \delta y_i, \; z_i + \delta z_i \dots t) = C_\alpha \quad \dots (14)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i f_\alpha . \delta\vec{r}_i = 0 \quad \dots (15)$$

وهي عبارة عن K معادلة ارتباط تحقق الانتقالات الافتراضية
للجملة أما الانتقالات الحقيقية فتحقق العلاقة:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i . f_\alpha . d\vec{r}_i + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0 \quad \dots (16)$$

ـ يعرض أن لدينا التابع الآتي:

$$Z = F(x, y, t) \quad \ldots (17)$$

فيكون:

$$\delta Z = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y \quad \ldots (18)$$

العمل الافتراضي والارتباط المثالي:

العمل: هو القوة ضرب الانتقال

ـ يعرف العمل الافتراضي العنصري كما يتم تعريف العمل الحقيقي للقوة F المؤثرة في جسم $M(x, y, z)$ بالعلاقة الآتية:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \vec{\delta r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \quad \ldots (19)$$

وهي تتطابق مع العلاقة العمل العنصري الحقيقي ولكن نستبدل $\vec{\delta r}$ بـ $\vec{dr}$

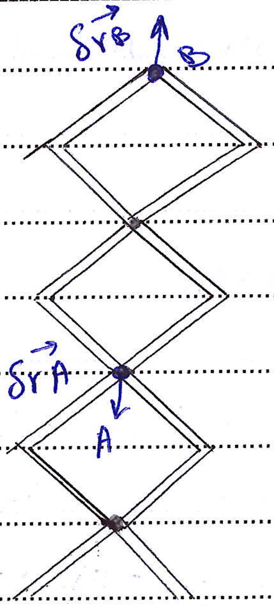
ـ نعرف أخيراً الارتباط المثالي فنقول أنه الارتباط الذي يكون فيه العمل الافتراضي لقوة رد الفعل يساوي الصفر أي أن:

$$\delta A(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{\delta r} = 0 \quad \ldots (20)$$

رد الفعل

عندما تتحرك نقطة مادية على سطح صقيل فإن رد الفعل R يكون عمودياً على السطح وبالتالي فإن العمل الافتراضي يكون معدوماً. أما عندما تتحرك نقطة مادية على سطح خشن فلابد من وجود حركة كما سبق لقوة رد الفعل لا ينعدم عملها الافتراضي وبالتالي لا يمثل ارتباط النقطة (الجسم) بالسطح الخشن ارتباطاً مثالياً.

مثال: أوجد العلاقة بين القوى $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ للآلة الرافعة المبينة في الشكل الآتي في حالة التوازن.



الحل: بإعطاء الجملة انتقالاً افتراضياً (إزاحة افتراضية) فإن جميع الأقطار العمودية لمتوازيات الأضلاع المكونة من القضبان الصلبة تستطيل بمقدار واحد قدره δs ويكون عندئذ

$$\delta r_A = \delta s_A = \delta s$$
$$\delta r_B = 3\delta s$$

وحسب مبدأ العمل الافتراضي لدينا:

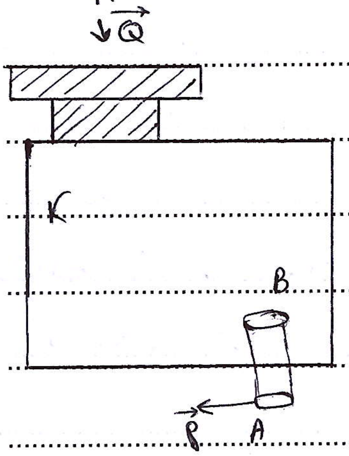
$$\sum_i \delta A_i = \sum_i \vec{F_i}\cdot\delta\vec{r_i} = 0$$ ← لأنه في حالة توازن

بالإسقاط على محور موجه نحو الأسفل

$$\vec{Q}\cdot\delta\vec{s}_A + \vec{P}\cdot\delta\vec{s}_B$$

$$Q\cdot\delta s_A - P\cdot\delta s_B = 0$$
$$\Rightarrow Q\,\delta s - 3P\,\delta s = 0 \Rightarrow Q = 3P$$

مثال: أوجد العلاقة بين P و Q في الآلة الرافعة التي صنعت أجزاؤها من الطبقة K ملاحظاً الشكل الآتي إذا علمت أن لولب الكلابط D يرتفع مسافة h عند كل دورات للذراع AB علماً أن $AB = l$ ←



نرسم النقطة A حول دائرة عند إعطائه انتقالاً افتراضياً قدره δr_A أي أن δr_A يساوي $l\,\delta\varphi$ حيث $\delta\varphi$ الانتقال الافتراضي للزاوية φ ويرتفع عندئذ الثقل Q بمقدار δs ويكون حسب مبدأ العمل الافتراضي

$$\sum_i \delta A_i = \sum_i \vec{F_i}\cdot\delta\vec{r_i} = 0$$ (في حالة توازن)

$$\vec{P}\,\delta\vec{r}_A + \vec{Q}\,\delta\vec{s} = 0$$

هنا لا يوجد إسقاط على محور واحد لأن القوى ليست على استقامة واحدة وإنما P و δr_A على استقامة واحدة وبجهة واحدة على مماس الدائرة التي نصف قطرها $AB = L$ بينما Q و δS على استقامة واحدة وبجهتين متعاكستين فنطبق علاقة العمل الافتراضي تحليلياً مساوية الصفر:

$$P \cdot \delta r_A \cdot \cos(0) + Q \cdot \delta \cos \pi = 0$$

((لأنها على حامل واحد وبجهتين متعاكستين))

$$P \cdot \delta r_A - Q \, \delta S = 0$$

$$P \, l \cdot \delta d - Q \, \delta S = 0 \quad *$$

يجب إيجاد العلاقة بين δS و δd

عندما يدور الذراع AB بزاوية δd يرتفع الثقل Q مسافة δS

... دورة كاملة 2π ترتفع الثقل Q مسافة h

$$\rightarrow \frac{\delta S}{h} = \frac{\delta d}{2\pi} \rightarrow \delta S = \frac{h}{2\pi} \delta d$$

$$\rightarrow P \, l \, \delta d - Q \frac{h}{2\pi} \delta d = 0$$

$$P = \frac{h}{2\pi l} \cdot Q \rightarrow Q = 2\pi \frac{l}{h} P$$

يمكن رفع ثقل Q كبير جداً وذلك إما بزيادة طول الذراع AB أو بإنقاص خطوط اللولب.

انتهت المحاضرة.