كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : توابع خاصة

المحاضرة : الرابعة /نظري/ د.علي أسد

{{ A to Z مكتبة }}

جامعة طرطوس		**مقرر: التوابع الخاصة**
كلية العلوم		**المحاضرة: الرابعة**
قسم الفيزياء		**د. علي أسد**

ظهرت معادلة ليجندر التفاضلية (1752-1833) في أبحاثه المتعلقة بدراسة الجاذبية ونظرية الجهد، ولهذه المعادلة والتوابع المرتبطة بها تطبيقات عديدة في ميكانيك الموائع وميكانيك الكم وغيرها من العلوم الفيزيائية والهندسية.

❖ معادلة ليجندر وحلها:

تعطى معادلة ليجندر التفاضلية بالصيغة الآتية:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+ky=0 \qquad (1)$$

حيث $k=l(l+1)$ مقدار ثابت، فتكتب المعادلة بالشكل:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0 \qquad (2)$$

الصورة القياسية لمعادلة ليجندر:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0 \qquad (3)$$

حيث:

$$q(x)=\frac{-2x^3}{1-x^2} \quad , \quad r(x)=\frac{l(l+1)x^2}{1-x^2}$$

يمكن تمثيل كل من $r(x)$ و $q(x)$ على شكل كثيرات حدود مرتبطة بالشرط $|x|<1$ وبالتالي فإن شرط تحقيق معادلة ليجندر هو $-1<x<1$

يعطى حل معادلة ليجندر من أجل جميع القيم $x\in[-x,x]$ بالشكل الآتي:

$$P_l(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^r\frac{(2l-2r)!\,x^{l-2r}}{2^l r!\,(l-r)!\,(l-2r)!} \qquad (4)$$

❖ **مبرهنة :** إذا كان $|t|<1$ و $|x|\le 1$ فإن:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \qquad (5)$$

البرهان: ننشر المقام وفق نظرية ثنائي الحد لنيوتن كما يلي:

$$\frac{1}{(1+y)^m}=1-my+\frac{m(m+1)}{2!}y^2-\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}y^3+\cdots$$

حيث: $m=\frac{1}{2}$ و $y=t^2-2xt$ نجد بالتعويض:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$$
$$=1-\frac{1}{2}(t^2-2xt)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2!}(t^2-2xt)^2-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)}{3!}(t^2-2xt)^3$$
$$=1+xt-\frac{t^2}{2}+\frac{\frac{3}{4}}{2!}(t^4-4xt^3+4x^2t^2)-\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{3!}(t^6-6xt^5+12xt^4-8x^3t^3)$$

بتجميع الحدود وفق سلسلة قوى لـ t نجد:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$$
$$=1+xt+\frac{1}{2}(3x^2-1)t^2+\left(-\frac{\frac{3}{4}}{2!}4x+\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{3!}8x^3\right)t^3+\left(\frac{\frac{3}{4}}{2!}-\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{3!}12x\right)t^4$$
$$+\left(\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{3!}6x\right)t^5+\left(-\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{3!}\right)t^6$$

ما داخل الأقواس تمثل كثيرات حدود ليجندر (العلاقة (4)) وبالتالي:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

تسمى العلاقة السابقة بالدالة المولدة لكثيرات حدود ليجندر

- **علاقة رودريج:**

يمكن التعبير عن تابع ليجندر بالعلاقة التفاضلية الآتية:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (6)$$

تطبيق: أوجد ما يلي:

$$P_0\ , P_1, P_2\ , P_3$$

الحل: باستخدام العلاقة:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$n = 0$$

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!}\frac{d^0}{dx^0}(x^2-1)^0 = 1$$

$$n = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2\ .\ 1!}\frac{d}{dx}(x^2-1) = x$$

$$n = 2$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2\ .\ 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{8}\frac{d}{dx}[4x^3-4x] = \frac{1}{2}[3x^2-1]$$

$$n = 3$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3\ .\ 3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3$$

$$= \frac{1}{48}\frac{d^3}{dx^3}(x^6-3x^4+3x^2-1)$$

$$= \frac{1}{48}\frac{d^2}{dx^2}(6x^5-12x^3+6x)$$

$$= \frac{1}{48}\frac{d}{dx}(30x^4-36x^2+6)$$

$$= \frac{1}{48}(120x^3-72x)$$

$$= \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

❖ **مبرهنة:** علاقة التعامد:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \qquad (9)$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & ,n \neq m \\ 1 & ,n = m \end{cases}$$

الإثبات: نستخدم المعادلتين:

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0 \qquad (10)$$

$$(1-x^2)\frac{d^2P_m(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP_m(x)}{dx} + m(m+1)P_m(x) = 0 \qquad (11)$$

يمكن كتابة المعادلتين بالشكل:

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_n\} + n(n+1)P_n = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_m\} + m(m+1)P_m = 0 \quad (13)$$

نضرب المعادلة (12) بـ P_m و (13) بـ P_n ونطرح:

$$P_m\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_n\} - P_n\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_m\} + \{n(n+1) - m(m+1)\}P_nP_m = 0 \qquad (14)$$

وحيث أن:

$$\frac{d}{dx}\{P_m(1-x^2)P'_n\} = P_m\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_n\} + (1-x^2)P'_mP'_n$$

وبالمثل:

$$\frac{d}{dx}\{P_n(1-x^2)P'_m\} = P_n\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_m\} + (1-x^2)P'_mP'_n$$

بالطرح:

$$\frac{d}{dx}\{P_m(1-x^2)P'_n\} - \frac{d}{dx}\{P_n(1-x^2)P'_m\} = P_m\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_n\} - P_n\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_m\}$$

بالتعويض في المعادلة (14):

$$\frac{d}{dx}\{P_m(1-x^2)P'_n - P_n(1-x^2)P'_m\} = \{m(m+1) - n(n+1)\}P_nP_m = 0$$

بالتكامل بالنسبة لـ x على المجال $[-1,1]$ نجد:

$$\{m(m+1) - n(n+1)\}\int_{-1}^{1} P_nP_m dx = \left[(1-x^2)P_mP'_n - (1-x^2)P_nP'_m\right]_{-1}^{1}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m dx = 0 \qquad n \neq m$$

ولإثبات الحالة عندما $n = m$ نستخدم العلاقة:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

بتربيع الطرفين:

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n\right\}^2$$

أو على الصورة:

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n . \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) t^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^{n+m} P_n(x) P_m(x) \quad (15)$$

بإجراء التكامل على المتحول x

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)-2tx} dx = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^{n+m} \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx$$

لكن:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)-2tx} dx = \left[\frac{1}{-2t} \ln(1+t^2-2tx)\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2t}[\ln(1+t^2-2t) - \ln(1+t^2+2t)]$$

$$= \frac{1}{t}[\ln(1+t) - \ln(1-t)] \quad , \quad 0 < t < 1$$

باستخدام منشور $\ln(1-t)$ و $\ln(1+t)$ نحصل على:

$$I = \frac{1}{\mathrm{t}}\left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots\right] = \frac{1}{t}\left[2t + \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + \cdots\right]$$

$$= 2\left[1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \frac{t^6}{7} + \cdots\right]$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}$$

نعوض هذه النتيجة في المعادلة (15)

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx$$

بمطابقة أمثال t^{2n} نجد:

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

❖ **<u>علاقات ليجندر التكرارية:</u>** لإيجاد علاقات تكرارية لتابع ليجندر نستخدم الآتي:

$$(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \qquad (16)$$

نفاضل هذه العلاقة بالنسبة للمتغير t نجد أن:

$$-\frac{1}{2}(-2x+2t)(1-2tx+t^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x) \qquad (17)$$

نضرب الطرفين بالمقدار $(1-2tx+t^2)$:

$$(x-t)(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-2tx+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x)$$

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1-2tx+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x) \qquad (18)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x) - 2x\sum_{n=0}^{\infty} nt^nP_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n+1}P_n(x)$$

بمطابقة أمثال t^n نجد:

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2xnP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)$$

وبالتالي نحصل على العلاقة التكرارية التالية:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2\mathrm{n}+1)xP_n + nP_{n-1}(x) = 0 \qquad (19)$$

بمفاضلة (16) بالنسبة للمتحول x نجد:

$$-\frac{1}{2}(-2t)(1-2tx+t^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nP'_n(x)$$

نضرب الطرفين بـ $(x-t)$

$$t(x-t)(1-2tx+t^2)^{-\frac{3}{2}}=(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}t^nP'_n(x)$$

بالاستفادة من المعادلة (17) نجد:

$$t\sum_{n=0}^{\infty}nt^{n-1}P_n(x)=(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}t^nP'_n(x)$$

بمطابقة t^n نحصل على المعادلة التفاضلية التكرارية الآتية:

$$xP'_n(x)-P'_{n-1}(x)=nP_n(x) \qquad (20)$$

لحذف المتحول x من المعادلة (20) نفاضل المعادلة (19) بالنسبة لـ x :

$$(n+1)P'_{n+1}(x)-(2\mathrm{n}+1)P_n-(2\mathrm{n}+1)xP'_n+nP'_{n-1}(x)=0 \qquad (21)$$

من (20) نجد:

$$xP'_n(x)=nP_n(x)+P'_{n-1}(x)$$

نعوض في (21):

$$(n+1)P'_{n+1}(x)-(2\mathrm{n}+1)P_n-(2\mathrm{n}+1)[nP_n(x)+P'_{n-1}(x)]+nP'_{n-1}(x)=0$$

$$(n+1)[P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)]=(n+1)(2n+1)P_n$$

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n \qquad (22)$$

مثال (1): أوجد ما يلي:

$$P_2\,,P_3\,,P_4$$

الحل: نستخدم المعادلة (19):

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2\mathrm{n}+1)xP_n+nP_{n-1}(x)=0$$

عندما $n=1$

$$2P_2(x)-3xP_1+P_0(x)=0$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

عندما $n = 2$

$$3P_3(x) - 5xP_2 + 2P_1(x) = 0$$

$$3P_3(x) - \frac{5}{2}x(3x^2 - 1) + 2x = 0$$

$$3P_3(x) = \frac{15}{2}x^3 - \frac{5}{2}x - 2x$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

عندما $n = 3$

$$4P_4(x) - 7xP_3 + +3P_2(x) = 0$$

$$4P_4(x) - 7x\left[\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right] + 3\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$P_4(x) = 7x\left[\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right] - 3\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{35}{8}x^4 - \frac{21}{8}x^2 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{8}[35x^4 - 30x^2 + 3]$$

مثال (2): أثبت صحة العلاقة الآتية:

$$P'_5(x) = 9P_4(x) + 5P_2(x) + P_0(x)$$

الإثبات: نلاحظ أن الطرف الأيسر تفاضل لذلك نستخدم العلاقة:

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n$$

عندما $n = 4$

$$P'_5(x) - P'_3(x) = 9P_4$$

عندما $n = 2$

$$P'_3(x) - P'_1(x) = 5P_2$$

بالجمع:

$$P'_5(x) - P'_1(x) = 9P_4 + 5P_2$$

$$P_1(x) = x \;\Rightarrow\quad P'_1(x) = 1 = P_0$$

$$\Rightarrow P'_5(x) = 9P_4(x) + 5P_2(x) + P_0(x)$$