كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

القسم: الفيزياء الدكتور: ....

السنة: الأولى المحاضرة:

المادة: هندسة تحليلية الرابعة - نظري

التاريخ: / /

A to Z Library for university services

الأوضاع الخاصة لمستويين:

وجدنا أن معادلة المستوي تكتب بالشكل:

$px + qy + rz + h = 0$ حيث p, q, r, h ثوابت حقيقية

تتلخص الأوضاع الخاصة لمستوي بانعدام أحد هذه الثوابت أو ثابتين فقط

1) اذا كان $h = 0$ كان المستوي يمر بالمبدأ وتكتب معادلته بالشكل:

$$px + qy + rz = 0$$

2) اذا كان $p = 0$ كان المستوي يوازي محور الفواصل ox ومعادلته:

$$qy + rz + h = 0$$

3) اذا كان $q = 0$ كان المستوي يوازي محور التراتيب oy ومعادلته

$$px + rz + h = 0$$

4) اذا كان $r = 0$ كان المستوي يوازي محور oz ومعادلته

$$px + qy + h = 0$$

5) اذا كان $p = q = 0$ كان المستوي يوازي المستوي oxy ومعادلته

$rz + h = 0$ أي أن $z = -\frac{h}{r}$

بنفس الطريقة معادلة المستوي الموازي لـ oxz $(p = r = 0)$

$$\Rightarrow y = -\frac{h}{q} = \text{ثابت}$$

ومعادلة المستوي الموازي لـ oyz $(q = r = 0)$

$$x = -\frac{h}{p} = \text{ثابت}$$

6) عندما $x = 0$ (المستوي يوازي oyz ويمر بالمبدأ) أي انه المستوي oyz

تمثل المعادلة $y=0$ معادلة المستوي oxz

تمثل المعادلة $z=0$ معادلة المستوي oxy

الزاوية بين مستويين:

ليكن المستويان المتقاطعان:

$P_1: p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0 \quad , P_2: p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0$

عندئذٍ الزاوية بين المستويان هي الزاوية الكائنة بين ناظميهما

أي $\theta=(\vec{N_1},\vec{N_2})$

$$\cos\theta=\frac{\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}}{\|\vec{N_1}\|\cdot\|\vec{N_2}\|} \quad , \sin\theta=\frac{\vec{N_1}\times\vec{N_2}}{\|\vec{N_1}\|\times\|\vec{N_2}\|}$$

× ملاحظة:

1) عندما $\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}=0$ فإن $\cos\theta=0$ إذن $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$

أي أن المستويان متعامدان إذا تعامد ناظميهما

2) عندما $\sin\theta=0$ أي أن $\vec{N_1}\times\vec{N_2}=0$ ومنه $\theta=0$ (المستويان متوازيان)

3) يتطابق مستويان إذا كان $\vec{N_1}\parallel\vec{N_2}$ أي إذا تحقق:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{h_1}{h_2}$$

إذا كان إحدى النسب $\frac{0}{a}$ فإن $a=0$ أيضاً:

مثال: حدد الزاوية بين المستويين

$P_1: x+2y-z-8=0 \quad , P_2: 3x-y+z-5=0$

الحل: $\vec{u}(1,2,-1) \quad , \vec{v}(3,-1,1)$

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{3-2-1}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow P_1 \perp P_2$$

بعد نقطة معلومة عن مستوٍ معلوم:

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة معلومة و P مستوي

$$P: p_1x + q_1y + r_1z + h_1 = 0$$

عندئذٍ بعد M عن P هو

$$dist(M,P) = \frac{|p_1x + q_1y + r_1z + h_1|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}}$$

مثال: احسب بعد $M(2,-1,4)$ عن المستوي: $P: 2x + y - z + 7 = 0$

الحل: نعوض M في P

$$dist(M,P) = \frac{|2(2)+(-1)-4+7|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

المعادلة الناظمية لمستوٍ:

اذا كان $\|N\| = 1$ تسمى معادلة المستوي P في هذه الحالة المعادلة الناظمية للمستوي

$$P: px + qy + rz + h = 0$$

أما في حالة المعادلة ليست ناظمية عندئذٍ نقسم على $\|N\|$ فنحصل على المعادلة الناظمية للمستوي

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}x + \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}y + \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}z + \frac{h}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = 0$$

* ملاحظة: اذا كان $h > 0$ نقسم على $-\|N\|$

اذا كان $h < 0$ نقسم على $\|N\|$

مثال: اكتب المعادلة الناظمية للمستوي: $P: 3x + 3y - 2z - 3 = 0$

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{9+9+4} = \sqrt{22}$$

$h < 0$ نقسم على $\|\vec{N}\|$

$$\frac{3}{\sqrt{22}}x + \frac{3}{\sqrt{22}}y - \frac{2}{\sqrt{22}}z - \frac{3}{\sqrt{22}} = 0$$

المستوي المنصف لزاوية مستويين :

نسمي المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن المستويين P_1 و P_2 بالمستوي المنصف (الداخلي - الخارجي) لزاوية المستويين

- يكون المنصف الداخلي موافقاً للزاوية المنفرجة
- يكون المنصف الخارجي موافقاً للزاوية الحادة .

نفرض أن $M(x, y, z)$ هي نقطة من المنصف متساوية البعد عن كل من P_1 و P_2

$$P_1 : p_1 x + q_1 y + r_1 z + h_1 = 0$$

$$P_2 : p_2 x + q_2 y + r_2 z + h_2 = 0$$

$$dist(M, P_1) = dist(M, P_2)$$

$$\frac{|p_1 x + q_1 y + r_1 z + h_1|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}} = \frac{|p_2 x + q_2 y + r_2 z + h_2|}{\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

$$\frac{p_1 x + q_1 y + r_1 z + h_1}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}} = \pm \frac{p_2 x + q_2 y + r_2 z + h_2}{\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

هذه العلاقة تمثل معادلتي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية مستويين P_1 و P_2

فإذا كانت الزاوية حادة كان $N_1 . N_2 > 0$ أي أن المنصف الخارجي يوافق الإشارة الموجبة

اذا كانت الزاوية منفرجة كان $N_1 . N_2 < 0$ أي أن المنصف الخارجي يوافق الإشارة السالبة .

* ملاحظة : إشارة المنصف الخارجي توافق إشارة الجداء السلمي للناظمين N_1 و N_2

مثال : أوجد معادلتي المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين

$P_1 : x - 3y + 2z - 5 = 0$, $P_2 : 3x - 2y - z + 3 = 0$

الحل: نفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المنصف

$$dist(M, p_1) = dist(M, p_2)$$

$$\frac{|x-3y+2z-5|}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{|3x-2y-z+3|}{\sqrt{9+4+1}}$$

$$\frac{x-3y+2z-5}{\sqrt{14}} = \pm \frac{3x-2y-z+3}{\sqrt{14}}$$

$$x-3y+2z-5 = \pm(3x-2y-z+3)$$

$$\vec{N}_1(1,-3,2) \quad , \quad \vec{N}_2(3,-2,-1)$$

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 3+6-2 = 7 > 0$$

المنصف الخارجي يوافق الإشارة الموجبة

$$x-3y+2z-5 = 3x-2y-z+3$$

$$x-3x-3y+2y+2z+z-5-3=0$$

$$-2x-y+3z-8=0$$

المنصف الداخلي يوافق الإشارة السالبة

$$x-3y+2z-5 = -3x+2y+z-3$$

$$x+3x-3y-2y+2z-z-5+3=0$$

$$4x-5y+z-2=0$$

مثال: أوجد معادلتي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$P_1 : 2x+3y-4z+1=0$

$P_2 : 4x+4z+3=0$

الحل: نفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المنصف

$$dist(M, p_1) = dist(M, p_2)$$

$$\frac{|2x+3y-4z+1|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{|4x+4z+3|}{\sqrt{16+16}}$$

$$\frac{2x+3y-4z+1}{\sqrt{29}} = \pm \frac{4x+4z+3}{4\sqrt{2}}$$

$\vec{N}_1(2,3,-4),\ \vec{N}_2(4,0,4) \Rightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 8-16 = -8 < 0$

المنصف الخارجي يوافق الإشارة السالبة

$$4\sqrt{2}\,(2x+3y-4z+1) = -\sqrt{29}\,(4x+4z+3)$$

$$(8\sqrt{2}+4\sqrt{29})x + (12\sqrt{2})y + (-16\sqrt{2}+4\sqrt{29})z + 4\sqrt{2}+3\sqrt{29} = 0$$

المنصف الداخلي يوافق الإشارة الموجبة

$$(8\sqrt{2}-4\sqrt{29})x + (12\sqrt{2})y + (-16\sqrt{2}-4\sqrt{29})z + 4\sqrt{2}-3\sqrt{29} = 0$$

حزمة المستويات:

نعلم أن المستويان المتقاطعان يتقاطعان بمستقيم (فصل مشترك لمستويين).
يسمى هذا المستقيم بمحور حزمة المستويات المارة بالفصل المشترك للمستويين
أما إذا كان المستويان متوازيان يسمى مجموعة المستويات الموازية لها بحزمة المستويات

نفرض P_1 و P_2 مستويان متقاطعان بالفصل المشترك L عندئذ يسمى P_1 و P_2 قاعدة الحزمة أي محور الحزمة والمعادلة العامة لأي مستوي يمر من الفصل المشترك للمستويين هي:

$$P(\lambda) = P_1 + \lambda P_2 = 0$$

مع λ متحول (وسيط)

تكتب المعادلة لأي حزمة بالشكل:

$$(p_1+\lambda p_2)x + (q_1+\lambda q_2)y + (r_1+\lambda r_2)z + h_1 + \lambda h_2 = 0$$

هي معادلة مستوٍ عند كل قيمة لـ λ نحصل على مستوٍ من الحزمة

مثال: أوجد معادلة المستوي المار بالفصل المشترك للمستويين

$P_1 : 2x - 3y + z - 3 = 0$

$P_2 : x + 3y + 2z + 1 = 0$

علماً أنه يمر بالنقطة $M(2, -1, 1)$

الحل: لنوجد معادلة حزمة المستويات المارة بالمستويين P_1 و P_2

$$P_1 + \lambda P_2 = 0$$

$$P\lambda = (2+\lambda)x + (-3+3\lambda)y - (1+2\lambda)z - 3 + 7 = 0$$

لنختار من هذه الحزمة المستوي المار بالنقطة $(2, -1, 1)$

$$P\lambda = (2+\lambda)2 + (-3+3\lambda)(-1) + (1+2\lambda)(1) - 3 + 7 = 0$$

$$= 4 + 2\lambda + 3 - 3\lambda + 1 + 2\lambda - 3 + \lambda = 0$$

$$2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow 2\lambda = -5 \Rightarrow \lambda = \frac{-5}{2}$$

$$P\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(2 - \frac{5}{2}\right)x + \left(-3 + 3\left(-\frac{5}{2}\right)\right)y + \left(1 + 2\left(-\frac{5}{2}\right)\right)z - 3 + \left(-\frac{5}{2}\right) = 0$$

$$x + 21y + 8z + 11 = 0$$

وهي معادلة المستوي

— انتهت المحاضرة —