كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي2

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

- تكاملات الدوال الجذرية: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

1) $I = \int f\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right) dx$

لحساب هذا التكامل نفرض: $x = t^{\alpha}$

حيث α هو المقام المشترك للكسور: $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$

مثال: احسب التكامل: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

الحل:

α: المقام المشترك للكسرين $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

$$I = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}$$

$\Leftarrow \alpha = 6$

نفرض: $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5\,dt$ ، $t = x^{\frac{1}{6}}$

$$I = \int \frac{6t^5\,dt}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^2(t+1)} = \int \frac{6t^3\,dt}{t+1}$$

$$\begin{array}{r|l} & t^2 - t + 1 \\ \hline t+1 & t^3 \\ & t^3 + t^2 \\ & -t^2 \\ & t^2 - t \\ & t \\ & t+1 \\ & -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow I = 6\int\left[t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right]dt$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right] + c$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + c$$

$$= 2\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 - 3\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2 + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + c$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + c$$

مثال: $I = \int \frac{1+3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

الحل: الطريقة الأولى:

$$I=\int\left[\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right]dx=\int\left(x^{-\frac{1}{4}}+3\,\frac{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)dx$$

$$=\int\left(x^{-\frac{1}{4}}+3\,x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}\right)dx=\int\left(x^{-\frac{1}{4}}+3\,x^{\frac{5}{4}}\right)dx$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+3\,\frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}}+c=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{12}{9}\sqrt[4]{\underbrace{x^9}_{x^8\cdot x}}+c$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{4}{3}\,x^2\sqrt[4]{x}+c$$

الطريقة الثانية: $I=\int\frac{1+3x\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}\,dx$

α : المقام المشترك للكسرين $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ $\Leftarrow$ $\alpha=4$

نفرض: $x=t^4 \Rightarrow t=\sqrt[4]{x} \Rightarrow dx=4t^3\,dt$

$$I=\int\frac{1+3t^4\cdot t^2}{t}\,4t^3\,dt=\int\left[4t^2+12\,t^8\right]dt$$

$$=\frac{4}{3}t^3+\frac{12}{9}t^9+c=\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x}\right)^3+\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x}\right)^9+c$$

ج) التكامل من الشكل: $I=\int f\left(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx$

نفرض $ax+b=t^{\alpha}$ حيث α المقام المشترك للكسور $\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2},\ldots$

مثال: احسب التكامل: $I=\int\frac{\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[3]{2x-3}+3}$

الحل:

نفرض: $2x-3=t^6$ حيث 6: المقام المشترك للكسرين $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$

$$2dx=6t^5\,dt \Rightarrow dx=3t^5\,dt$$

$$I=\int\frac{\sqrt{t^6}}{3\sqrt[3]{t^6}+3}\,3t^5\,dt=\int\frac{t^3}{3t^2+3}\,3t^5\,dt$$

$$I=\int\frac{t^8}{t^2+1}\,dt$$ قسمة إقليدية

$$I=\int\left[t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right]dt$$

$$=\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3-t+\operatorname{arctg} t+c$$

$$=\frac{1}{7}\left(\sqrt[6]{2x-3}\right)^7-\frac{1}{5}\left(\sqrt[6]{2x-3}\right)^5+\frac{1}{3}\left(\sqrt[6]{2x-3}\right)^3-\sqrt[6]{2x-3}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{2x-3}+c$$

---

3) التكامل من الشكل : $I=\int f\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx$

نفرض : $\frac{ax+b}{cx+d}=t^\alpha$

حيث α المقام المشترك للكسور : $\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2},\ldots$

مثال : احسب التكامل : $I=\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$

الحل : نفرض : $\frac{x-1}{x+1}=t^2$

$$x-1=xt^2+t^2\Rightarrow x-xt^2=1+t^2\Rightarrow$$

$$x(1-t^2)=1+t^2\Rightarrow x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$dx=\frac{2t-2t^3+2t+2t^3}{(1-t^2)^2}dt\Rightarrow dx=\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt$$

$$I=\int\sqrt{t^2}\,\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt=\int\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}dt$$

$$\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{4t^2}{(1-t)^2(1+t)^2}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{C}{1+t}+\frac{D}{(1+t)^2}$$

بعد توحيد المقامات والمطابقة نجد : $A=-1,\ B=1,\ C=-1,\ D=1$

$$I=\int\left[\frac{-1}{1-t}+\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}\right]dt$$

$$=\ln|1-t|-\frac{(1-t)^{-1}}{-1}-\ln|1+t|+\frac{(1+t)^{-1}}{-1}+c$$

$$=\ln|1-t|-\ln|1+t|+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+c$$

$$= \ln\left|1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| - \ln\left|1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| + \frac{1}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} + \frac{1}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} + C$$

---

4) ثنائي الحد التفاضلي: $I = \int x^m (a+bx^n)^k \, dx$

$a, b \in R$, $m, n, k \in Q$

1) k عدد صحيح موجب: ننشر $(a+bx^n)^k$ وفق قانون نيوتن، ثم نكامل

نيوتن: $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + \binom{n}{n} b^n$

2) k عدد صحيح سالب: نجري التحويل: $x = t^\beta$

حيث β المقام المشترك للكسرين n, m

3) k ليس عدد صحيح و $\frac{m+1}{n}$ عدد صحيح: نجري التحويل: $a+bx^n = t^\alpha$

حيث α: مقام الكسر k

4) k ليس عدد صحيح و $\frac{m+1}{n}$ ليس عدد صحيح، وتحقق: $\frac{m+1}{n}+k$ عدد صحيح

نجري التحويل: $a+bx^n = t^\alpha x^n$ حيث α مقام الكسر k

مثال: احسب: $I = \sqrt[3]{x}\,(2+\sqrt{x})^4$

الحل: $K=4$ عدد صحيح موجب

$$(2+\sqrt{x})^4 = \binom{4}{0} 2^4 + \binom{4}{1} 2^3 (\sqrt{x}) + \binom{4}{2} 2^2 (\sqrt{x})^2 + \binom{4}{3} 2 (\sqrt{x})^3 + \binom{4}{4} (\sqrt{x})^4$$

$$= 16 + 32\sqrt{x} + 24x + 8x\sqrt{x} + x^2$$

$$I = \int x^{\frac{1}{3}} \left[16 + 32x^{\frac{1}{2}} + 24x + 8x^{\frac{3}{2}} + x^2\right] dx$$

$$I = \int \left[16x^{\frac{1}{3}} + 32x^{\frac{5}{6}} + 24x^{\frac{4}{3}} + 8x^{\frac{11}{6}} + x^{\frac{7}{3}}\right] dx$$

$$= 16\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 32\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + 24\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + 8\frac{x^{\frac{17}{6}}}{\frac{17}{6}} + \frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} + C$$

مثال: $I = \int x^{\frac{1}{2}} (1+2x^3)^{-2} \, dx$

$m = \frac{1}{2}$, $n = 3$, $k = -2$

K عدد صحيح سالب ⟸ $x = t^2$ (حيث $\beta = 2$ المقام المشترك لـ (m,n))

$I = \int t\,(1+2t^6)^{-2}\cdot(2t)\,dt$; $dx = 2t\,dt$

$I = \int \frac{2t^2}{(1+2t^6)^2}\,dt$

نفرض: $u = t^3 \Rightarrow du = 3t^2\,dt \Rightarrow t^2\,dt = \frac{1}{3}du$

$I = \int \frac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot du}{(1+2u^2)^2} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{(1+2u^2)^2}$

$= \frac{2}{12}\int \frac{du}{(u^2+\frac{1}{2})^2}$; $a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}\,u$

$= \int \frac{du}{(u^2+\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}}\left[1\cdot I_1 + \frac{u}{(u^2+\frac{1}{2})}\right]$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}\,u + \frac{u}{u^2+\frac{1}{2}}\right]$

$I = \frac{1}{6}\left[\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}\,t^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t^3}{(t^6+\frac{1}{2})}\right]$

$I = \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}(\sqrt{x})^3 + \frac{\sqrt{2}}{12}\frac{(\sqrt{x})^3}{(x^3+\frac{1}{2})}$

مثال: $I = \int x\,(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$m = 1$, $n = \frac{2}{3}$, $k = -\frac{1}{2}$ (K ليس عدد صحيح)

$\frac{m+1}{n} = \frac{1+1}{\frac{2}{3}} = 2\times\frac{3}{2} = 3$ عدد صحيح

$1+x^{\frac{2}{3}} = t^2 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = -1+t^2 \Rightarrow x = (-1+t^2)^{\frac{3}{2}}$

$dx = \frac{3}{2}(t^2-1)^{\frac{1}{2}}(2t)\,dt \Rightarrow dx = 3t\,(t^2-1)^{\frac{1}{2}}\,dt$

$I=\int (t^2-1)^{\frac{3}{2}} \cdot t^{-1} \cdot 3t\,(t^2-1)^{\frac{1}{2}}\,dt = 3\int (t^2-1)^2\,dt$

$=3\int [t^4-2t^2+1]\,dt = \frac{3}{5}t^5-2t^3+3t+c$

$=\frac{3}{5}\left(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}\right)^5-2\left(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}\right)^3+3\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}+c$

مثال: $I=\int x^{-11}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$m=-11 \;,\; n=4 \;,\; k=-\frac{1}{2}$ k ليس عدد صحيح

$\frac{m+1}{n}=\frac{-11+1}{4}=\frac{-10}{4}$ ليس عدد صحيح | $\frac{m+1}{n}+k=\frac{-5}{2}-\frac{1}{2}=-3$ عدد صحيح

نفرض: $1+x^4=t^2 \cdot x^4 \Rightarrow x^4-t^2x^4=-1$

$x^4(1-t^2)=-1 \Rightarrow x^4 \frac{1}{t^2-1} \Rightarrow x=\frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}}=(t^2-1)^{-\frac{1}{4}}$

$dx=-\frac{1}{4}(t^2-1)^{-\frac{5}{4}} \cdot (2t)\,dt$

$I=\int (t^2-1)^{\frac{11}{4}}\left[\frac{t^2}{t^2-1}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2}t\,(t^2-1)\right]^{-\frac{5}{4}}\,dt$

$I=-\frac{1}{2}\int (t^2-1)^2\,dt = -\frac{1}{2}\int [t^4-2t^2+1]\,dt$

$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right]+c$

$t=\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}} \Rightarrow$

$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\left(\sqrt{\frac{1+x^4}{4}}\right)^5-\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{1+x^4}{4}}\right)^3+\sqrt{\frac{1+x^4}{4}}+c\right.$

انتهت المحاضرة