كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : هندسة تفاضلية

المحاضرة : الثالثة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السؤال الأول: ليكن المنحني المعطى بالمعادلات:

$$x = 2\cos^3 t$$
$$y = 2\sin^3 t \quad ; \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}]$$
$$z = 3\cos 2t$$

1- أوجد متجهات الوحدة $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ في النقطة الموافقة لـ $t=0$

2- احسب طول قوس المنحني بين النقطتين $t=0$, $t=\frac{\pi}{4}$

3- اكتب معادلة المستوي الحاس و المستقيم الناظم الحاس و الناظم الأساسي في النقطة الموافقة لـ $t=\frac{\pi}{4}$

4- اكتب معادلة المستوي الناظم للمنحني في نقطة تقاطعه مع المستوي.

الحل:

$$\vec{r}(t) = (2\cos^3 t, 2\sin^3 t, 3\cos 2t) \quad (1)$$

$$* \quad \vec{T} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

$$r'(t) = (-6\sin t\cos^2 t, 6\cos t\sin^2 t, -6\sin 2t)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{36\sin^2 t\cos^4 t + 36\cos^2 t\sin^4 t + 36\sin^2 2t}$$
$$= 6\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) + 4\sin^2 t\cos^2 t}$$
$$= 6(\sin t\cos t)\sqrt{1+4} \quad **$$
$$= 6\sqrt{5}\sin t\cos t \quad (\sin 2t = 2\sin t\cos t)$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$$\Rightarrow \vec{T} = \left(\frac{-\cos t}{\sqrt{5}}, \frac{\sin t}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \quad (**)$$

$$t=0 \Rightarrow \vec{T} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$* \quad \vec{N} = \frac{T'}{|T'|}$$

$$T' = \left(\frac{\sin t}{\sqrt{5}}, \frac{\cos t}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

$$|T'| = \sqrt{\frac{1}{5}\sin^2 t + \frac{1}{5}\cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{N} = (\sin t, \cos t, 0)$$

$$t=0 \Rightarrow \vec{N} = (0, 1, 0)$$

$$* \quad \vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-2}{\sqrt{5}}\vec{i} + 0\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}$$

$$\vec{B} = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |r'(t)|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\sqrt{5}\sin 2t\,dt = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left[-\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad (2)$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

③ تعطى معادلة المستوي الماس :

$$(r(t) - r(t_0))\vec{B} = 0$$

$$r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t, \frac{-2}{\sqrt{5}}\sin t, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \vec{B} = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

فتكون معادلة المستوي الماس :

$$\frac{2}{\sqrt{10}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2}{\sqrt{10}}\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}(z - 0) = 0$$

$$2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}z = 0$$

$$\boxed{2x - 2y - \sqrt{2}z = 0}$$

معادلة المستقيم الماس :

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y(t) - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z(t) - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

$$\frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{-3}{\sqrt{2}}} = \frac{y - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \frac{z}{-6}$$

معادلة الناظم الأساسي (المستوي المقوم) :

$$(r(t) - r(t_0))\vec{N} = 0$$

$$\vec{N} = \left(\sin\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+0=0$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}t \qquad z=0$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}t$$

④ بتقاطع المنحني مع المستوي في النقطة عندما $z=0$ عندما $3\cos 2t=0$

$$\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$$

$$\vec{T}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-2\right)$$ (عوضنا $T=\frac{\pi}{4}$ في (***))

$$(r(t)-r(t_0))\,\vec{T}=0$$

$$\frac{-1}{\sqrt{10}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{10}}\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{27}{\sqrt{5}}=0$$

السؤال الثاني: ليكن:

$$\vec{r}=a\cos t\,\vec{e}_1+a\sin t\,\vec{e}_2+bt\,\vec{e}_3$$

أوجد معادلة الناظم L^* الذي:

$$r^*=r+(c-s)\vec{T}$$

$$s=\int_0^t |r'(t)|\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,t$$

$$\begin{cases} r'(t)=-a\sin t\,\vec{e}_1+a\cos t\,\vec{e}_2+b\vec{e}_3 \\ |r'(t)|=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\vec{T} = \frac{r'}{|r'|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$r^* = (a\cos t, a\sin t, bt) + (c - \sqrt{a^2+b^2}\,t)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)$$

وظيفة: $\vec{r} = (4\cos t, \sin t, 0)$,

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة