كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : هندسة تفاضلية

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

★ إثبات العلاقة ③ من علاقات فرينيه في المحاضرة السابقة:

$$B' = -\tau N$$

الإثبات: لدينا:

$$B = T \times N$$

$$B' = T' \times N + T \times N'$$

$$= T \times N'$$

$$= r' \times \frac{r''}{|r''|}$$

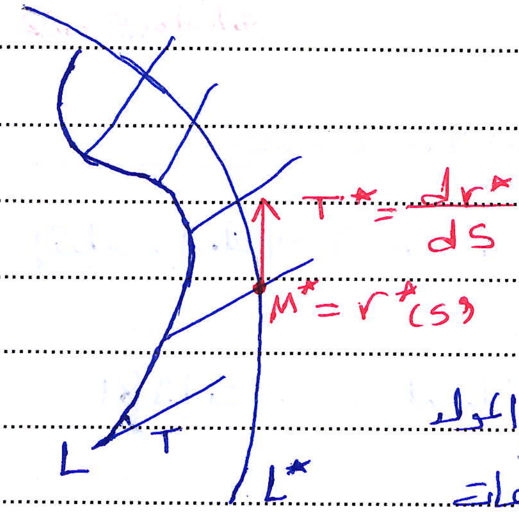
$$= \frac{r' \times r'''}{|r''|} \cdot \frac{r'' r''}{|r''|^2}$$

$$= \frac{(r' \times r''') , r''}{|r''|^2} \cdot \frac{r''}{|r''|}$$

$$= \frac{-(r', r'', r''')}{|r''|^2} \cdot \frac{r''}{|r''|}$$

$$= -\tau N$$

النواشير و المناشير :



الناشر : بفرض L منحنياً نظامياً
إنّ المستقيمات المماسة للمنحني L
تولد سطحاً نوعه السطح المولد
المماسي للمنحني L .
نسمي أي منحني L^* على السطح المولد
المماسي لـ L بحيث يقطع المستقيمات
المماسة لـ L بشكل عمودي بناشر المنحني L و نرمزه L^*

- ليكن L منحنياً معطى بالتمثيل $r = r(s)$ و لتكن M^* نقطة
من L^* (ناشر المنحني L) ، نفرض أنّ L^* يقطع المستقيم
المماس للمنحني L في M^* عندئذٍ يكون $r^*(s) - r(s)$ متسامت
مع T

$$r^*(s) - r(s) = \lambda(s)\,T(s)$$

$$r^* = r(s) + \lambda(s)\,T(s)$$

$$\frac{dr^*}{ds} = \frac{dr(s)}{ds} + \lambda'(s)T(s) + \lambda\,T'(s)$$

$$\frac{dr^*}{ds} = T(s) + \lambda'(s)\,T(s) + \lambda\,T'(s)$$
$$= (1+\lambda')\,T + \lambda\,T'$$

علماً أن $\frac{dr^*}{ds}$ عمودي على T $\Leftarrow$

$$\frac{dr^*}{ds}\cdot T = 0 \Rightarrow (1+\lambda')\,T\cdot T + \lambda\,T'\cdot T = 0$$

$$(1+\lambda')\,|T|^2 + 0 = 0$$

$\Rightarrow \quad 1 + \lambda' = 0 \Rightarrow \lambda' = -1$ بتكامل

$\lambda = -s + c \quad ; \quad c = const$

أي أنّ :

$$r^*(s) = r(s) + (c - s)T$$

بما أنّ معادلة الناشر r^* متعلقة بالثابت c بالتالي يوجد عدد لانهائي من النواشر للمنحني L .

ملاحظة : الناشر غير نظامي في النقطة الموافقة لـ s التي يكون عندها $\frac{dr^*}{ds} = 0$

$$\frac{dr^*}{ds} = \frac{dr}{ds} - T + (c - s)T' = 0$$

$$T - T + (c - s)T' = 0$$

$$(c - s)T' = 0$$

$$(c - s)KN = 0 \Rightarrow K = 0$$

أي غير نظامي عند نقاط الانعطاف أي عندما التقوس معدوم .

مبرهنة :

ليكن L منحنياً نظامياً ينتمي إلى الصنف C^m $(m \geq 3)$ ومعطى بالمعادلة المتجهية $r = r(s)$ ولنأخذ معادلة الناشر

$$r^* = r + (c - s)T$$

عندئذٍ يكون تقوس الناشر L^* وليكن K^* :

$$K^{*2} = \frac{K^2 + \tau^2}{(c - s)K^2}$$

تتبع وحدة ثنائي الناظم:

$$B^* = \frac{KB + \tau T}{|(c-s)K| \cdot K^*}$$

$$T^* = \frac{dr^*}{ds}$$

$$N^* = B^* \wedge T^*$$

مثال: ليكن اللولب الدائري $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

أوجد معادلة الناشر:

الحل: نكتب r بالتمثيل الوسيطي:

$$s = \sqrt{a^2+b^2}\, t \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{s}{c}$$

$$r(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right)$$

$$r^* = r + (c-s)T \qquad \boxed{T = r'(s)}$$

$$= r + \frac{c_1 - s}{c}\left(-a\sin\frac{s}{c}, a\cos\frac{s}{c}, b\right)$$

$$r^* = \left(a\cos\frac{s}{c} - \frac{c_1-s}{c}a\sin\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c} + \frac{c_1-s}{c}a\cos\frac{s}{c}, b\frac{s}{c} + \frac{c_1-s}{c}b\right)$$

المنشور:

إذا كان L ناشر للمنحني L^* عندئذٍ بالتعريف L^* منشور ناشره L وهكذا إذا أعطينا أي منحني L فمنشوراته هي المنحنيات التي تكون مستقيماته المماسة عمودية على المنحني L.

* إذا كان L معطى بالتمثيل $r = r(s)$ و L^* المنشور معطى بالتمثيل $r^* = r^*(s)$ عندئذٍ:

$$r^*(s) = r + \frac{1}{K} N + \frac{1}{K} \cos t \left(\int t \, ds + c \right) B$$

مثال: أوجد ناشر المنحني:

$$r(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

الحل:

$$r'(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

$$s = \int_0^t |r'| \, dt = \int_0^t dt = [t]_0^t = t$$

$$\Rightarrow r(s) = (-\sin(s), \cos(s), 1)$$

$$r'(s) = (-\cos(s), -\sin(s), 0)$$

$$\Rightarrow r^*(s) = r(s) + (c_1 - s) T$$

$$= (-\sin(s), \cos(s), 1) + (c_1 - s)(-\cos(s), -\sin(s), 0)$$

$$r^*(s) = \big(-\sin(s) + (c_1 - s)(-\cos(s)),\ \cos(s) + (c_1 - s)(-\sin(s)),\ 1\big)$$

مغلّف أسرة منحنيات مستوية:

* تعريف أسرة المنحنيات التابعة لوسيط واحد:

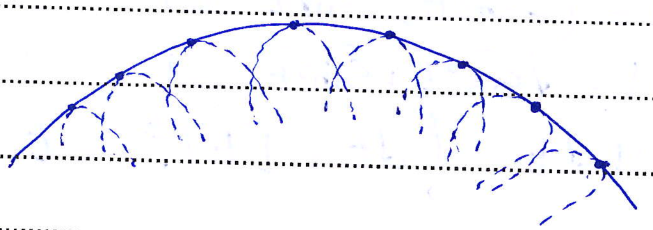
تمثيل عادة هو منحنيات بوسيطين x, y إحداثيات كل نقطة من نقاط المنحني.

وهناك معادلات تحوي بالإضافة لـ x و y وسيط آخر α ونرمزها بـ $F(x, y, \alpha) = 0$

عندما تتغير قيمة الوسيط تتغير شكل المنحني وموضعه، نرمز لهذه الأسرة بالرمز $\{L_\alpha\}$

* تعريف مغلف أسرة منحنيات تابعة لوسيط واحد:

نقول عن منحني L إنه مغلف لأسرة المنحنيات $\{L_\alpha\}$ إذا كان يمس في كل نقطة من نقاطه منحنياً واحداً على الأقل.



أي أن المغلف هو مجموعة نقاط تماس المنحني L مع أسرة المنحنيات $\{L_\alpha\}$

ملاحظة: ليس لكل أسرة منحنيات مغلف لـ المغلف قد يكون موجود وقد لا يكون.

مبرهنة: إذا كان L مغلف لأسرة منحنيات $\{L_\alpha\}$ فإنه تعين بحل جملة المعادلتين حل مشترك

$$(*)\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0 \\ F_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$$

علماً أنّ $F(x,y,\alpha)$ تملك مشتقات جزئية مستمرة بالنسبة للمتحولات الثلاثة x, y, α

مثال: أوجد مغلف أسرة ~~الخيالات~~ المستقيمات المعينة بالمعادلة:

$$F(x,y,\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha - \lambda = 0 \qquad (1)$$

الحل:

$$F'_\alpha(x,y,\alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

نربّع المعادلتين 1، 2:

$$F^2(x,y,\alpha) = x^2\cos^2\alpha + y^2\sin^2\alpha + 2xy\cos\alpha\sin\alpha = \lambda^2$$

$$F_1^2(x,y,\alpha) = x^2\sin^2\alpha + y^2\cos^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Leftarrow \quad x^2 + y^2 = \lambda^2$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها λ

$\Leftarrow$ المغلّف هو دائرة.

ملاحظة: عند البحث عن المغلف يمكن عدم التوقف عند المعادلتين $(*)$ ومتابعة الحل لحذف الوسيط α والحصول على معادلة $\varphi(x,y)=0$ إن أمكن.

مثال: أوجد مغلف أسرة الدوائر

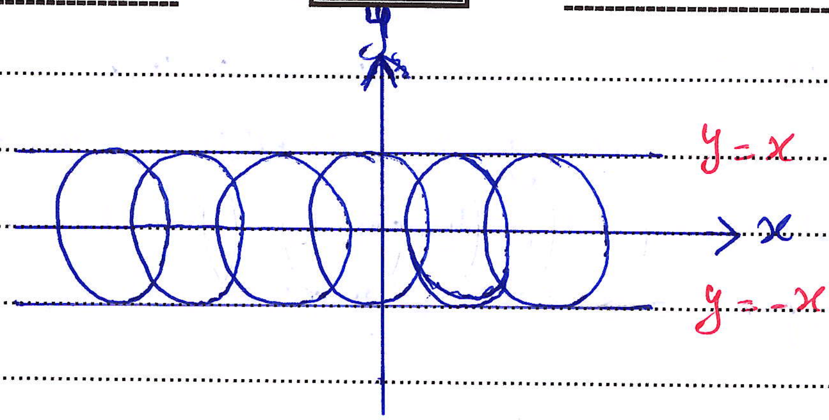
$$F(x,y,\alpha) = (x-\alpha)^2 + y^2 = r^2 \qquad (1)$$

الحل:

$$F'_\alpha(x,y,\alpha) = -2(x-\alpha) = 0 \Rightarrow *$$

$$x = \alpha$$

نعوض في (1) نجد أن $y^2 = r^2 \Leftarrow y = \mp r$



مثال: أوجد مغلف أسرة الدائرة المتمركزة في المبدأ:

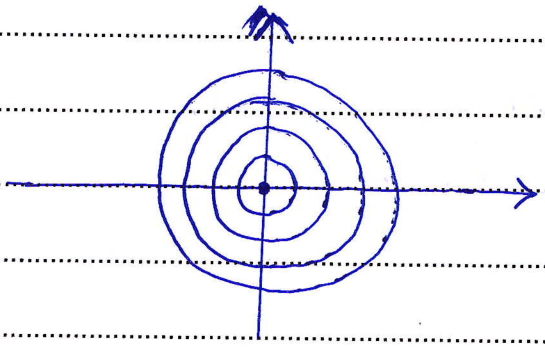
(1) $F(x,y,\alpha) = x^2 + y^2 = \alpha^2 \quad ; \quad \alpha > 0$

الحل:

$$F'_\alpha(x,y,\alpha) = 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

نعوض في (1) ⇐ $x^2 + y^2 = 0$

وهي نقطة (المغلف عبارة عن نقطة) مرفوض ⇐ لا يوجد مغلف لأسرة الدوائر المتمركزة في المبدأ.



مثال: أوجد مغلف أسرتي القطوع المكافئة التكعيبية.

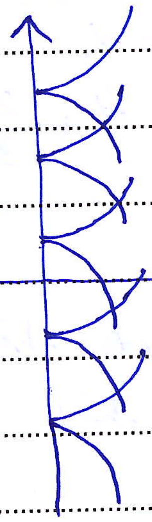
① $(y-\alpha)^2 - x^3 = 0$

② $y^2 - (x-\alpha)^3 = 0$

الحل: ①

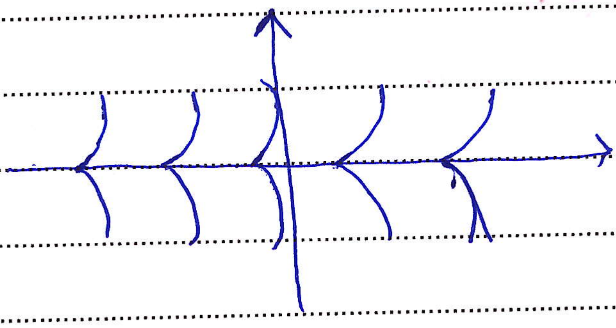
$$F'_\alpha = -2(y-\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = y$$

نعوض في ① نجد: $x = 0$



$$F'_\alpha = +3(x-\alpha)^2 = 0 \Rightarrow x = \alpha \quad ②$$

نعوض في ② $\Leftarrow$ $y = 0$



مثال: أوجد مغلف أسرة المنحنيات

$$F(x,y,\alpha) = (y-\alpha)^2 - \frac{2}{3}(x-\alpha)^3 = 0$$

الحل:

$$F'_\alpha = -2(y-\alpha) + 2(x-\alpha)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow y - \alpha = (x - \alpha^2) \quad (3)$$

نعوض في (1)

$$(x-\alpha)^4 - \frac{2}{3}(x-\alpha)^3 = 0$$

$$(x-\alpha)^3\left[x-\alpha-\frac{2}{3}\right]=0$$

إما $x=\alpha$

أو $x=\alpha+\frac{2}{3}$

نعوض في (3)

إذا كان $x=\alpha$ نحصل على $y=x$

إذا كان $x=\alpha+\frac{2}{3}$ نحصل على $y=x-\frac{2}{9}$

مغلف أسرة المنحنيات هو مستقيمان

انتهت المحاضرة