كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : هندسة تفاضلية

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

$$S = \int_0^t |r'(t)|\, dt$$

$$|R'(s)| = 1$$

الإثبات:

$$|R'(s)| = \left|\frac{dR}{ds}\right| = \left|\frac{dR}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{dR}{dt}\right| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right|$$

$$= \left|\frac{dR}{dt}\right| \cdot \frac{1}{\left|\frac{dR}{dt}\right|} = 1$$

توضيح: لدينا $\Leftarrow S' = |R'(t)|$

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{dR}{dt}\right| \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\left|\frac{dR}{dt}\right|}$$

المستوي المماس للمنحني:

ليكن L منحنياً معطى بالدالة المتجهية $\vec{R} = \vec{R}(t)$ وهو منحنياً نظامياً وبفرض $R'(t)$ و $R''(t)$ غير متوازيين عندئذٍ يسمى المستوي المحدد بالمتجهين $R'(t)$ و $R''(t)$ بالمستوي المماس في نقطة ما من المنحني.

ليكن $R(t_0)$ متجه الموضع للنقطة M_0 عندئذٍ معادلة المستوي المماس في النقطة M_0 هي:

$$(R(t) - R(t_0))(R'(t_0) \wedge R''(t_0)) = 0$$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$

$(a,b,c)=(R'(t_0)\wedge R''(t_0))$

وتكون المعادلة التحليلية للمستوي المماس تملك المحدد :

$$\begin{vmatrix} x(t)-x(t_0) & y(t)-y(t_0) & z(t)-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}$$

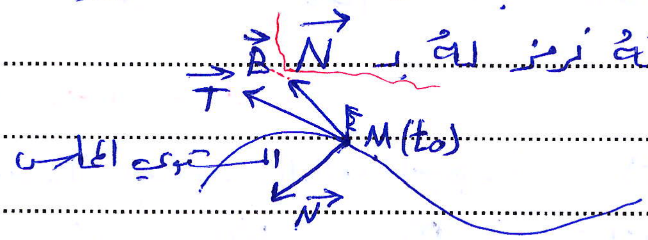
الناظم الأساسي وثنائي الناظم :

ليكن L منحنياً نظامياً معطى بالدالة المتجهية $\vec{R}=\vec{R}(t)$

نسمي أي متجه عمودي على المستوي المماس في النقطة $M(t_0)$ بالمتجه الناظم وعددها غير محدود.

- الناظم الأساسي : هو المتجه الواقع في المستوي المماس ويكون عمودياً على متجه واحدة المماس ~~ونرمز له بـ $\vec{N}$~~

وشعاع الوحدة منه نرمز له بـ $\vec{N}$



وهو يمثل اتجاه تغير المماس للمنحني واتجاهه نحو مركز الانحناء.

- نسمي المتجه المار من $M(t_0)$ عمودياً على مستوي المماس ثنائي الناظم ونرمز لشعاع واحدته بـ $\vec{B}$

نسمي الثلاثية $(\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ ثلاثية تريدر وهي ثلاثية مباشرة

تعريف :

تشكل المستقيمات الثلاثة المماس، الناظم الأساسي، ثنائي الناظم) ثلاث مستويات متعامدة

- المستوي المماس يحوي $\vec{T}, \vec{N}$ يعامده $\vec{B}$ ومعادلته :

$$(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0))\vec{B} = 0$$

- المستوي الناظم يحوي $\vec{B}, \vec{N}$ يعامده $\vec{T}$ ومعادلته :

$$(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0))\vec{T} = 0$$

- المستوي المقوم يحوي $\vec{B}, \vec{T}$ يعامده $\vec{N}$ ومعادلته :

$$(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0))\vec{N} = 0$$

* قوانين حساب $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$:

$$\vec{T} = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} \qquad T = R'(s)$$

$$B = \frac{R'(t) \times R''(t)}{|R'(t) \times R''(t)|} \qquad B = T \times N$$

$$N = B \times T \qquad N = \frac{R''(s)}{|R''(s)|}$$

تقوس منحني (درجة الانحناء):

ليكن L منحنياً نظامياً وليكن $r(s_0)$ نقطة M_0 منه و $R'(s_0)$ شعاع المماس في M_0 وبفرض α هي الزاوية بين شعاعي واحدة المماس $R'(s_0)$ و $R'(s)$ عندئذٍ نسمي النهاية:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s} = K$$

نسمي K تقوس المنحني L في النقطة $M(t_0)$

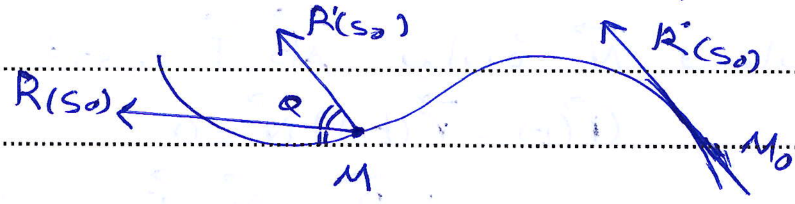
K يمثل مدى انحناء الخط L في نقطة معينة بعموم (مستقيم أو مستوي)

كبير (الانحناء كبير)

مقدار صغير (الانحناء صغير)

+ : انحناء نحو الأعلى

- : انحناء نحو الأسفل



مبرهنة:

يعطى تقوس المنحني L بدلالة الوسيطين الطبيعي S والعادي t بالعلاقتين:

الوسيط العادي:
$$K(t) = \frac{|R'(t_0) \times R''(t_0)|}{|R'(t_0)|^3}$$

الوسيط الطبيعي:
$$K(s) = |R''(s)|$$

ملاحظات:

① نسمي مقلوب التقوس بنصف قطر التقوس ونرمزه ρ أي

$$\rho = \frac{1}{K}$$

② إذا كان المنحني ℓ معطى بشكل وسيطي: $y = y(t), x = x(t)$
عندئذٍ التقوس:

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{|x'^2 + y'^2|^{\frac{3}{2}}}$$

③ إذا كان ℓ منحنياً معطى بشكل ضمني $y = f(x)$

$$K = \frac{|f''(x)|}{|1 + f'^2(x)|^{\frac{3}{2}}}$$

* ملاحظة: $|K|$ تعطي مقدار التقوس سواء كان موجب أو سالب

مثال: احسب تقوس المستقيم السوي.

الحل: نعلم أن المستقيم السوي معادلته $f(x) = y = ax + b$ (ضمني)

$$K = \frac{|f''(x)|}{|1 + f'^2(x)|^{\frac{3}{2}}}$$

و $f'(x) = a$

$f''(x) = 0$

$\Leftarrow K = 0$ تقوسه معدوم.

* ملاحظة هامة: في حالة المستقيم في الفضاء R^3 تمثيله وسيطي:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= a \\ y' &= b \\ z' &= c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &R'(a, b, c) \\ &R''(0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$R' \times R'' = (0, 0, 0)$$

$$K = \frac{|R' \times R''|}{|R'^3|} = \frac{|(0,0,0)|}{|R'^3|} = 0$$

$K=0 \Leftarrow$ تقوس المستقيم في الفضاء معدوم.

التفاف منحني:

ليكن L منحنياً نظامياً معطى بدلالة الوسيط الطبيعي S

$$\vec{R} = \vec{R}(t)$$

ولتكن M_0 نقطة من المنحني و B_0 ثنائي الناظم في النقطة M_0

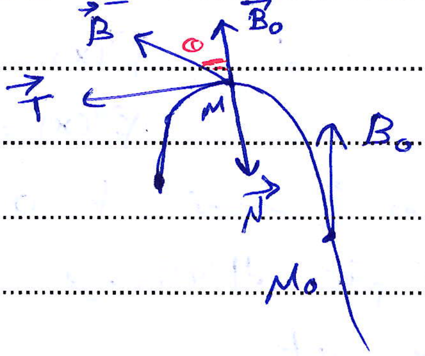
و B ثنائي الناظم في النقطة M (النقطة ما من المنحني)

ولتكن θ الزاوية بين المتجهين $\vec{B}$ و $\vec{B_0}$ وهي الزاوية بين

المستويين الماسين في النقطتين M و M_0، نسمي النهاية

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\theta}{\Delta S} = \tau$$

التفاف المنحني ونرمزله بـ τ



تعيين من العلاقتين بدلالة الوسيط الطبيعي أو الوسيط العادي:

$$\tau(t) = \frac{|r', r'', r'''|}{|r' \times r''|^2}$$

مثال: أوجد ثلاثية تريد (أشعة فرينيه) وتقوس والتفاف المنحني اللولب الدائري في نقطة ما منه.

الحل:
$$R(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

$$R'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$|R'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$T = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$R''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$R'(t) \times R''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$|R'(t) \times R''(t)| = \sqrt{a^2b^2+a^4} = a\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\vec{B} = \frac{R'(t) \times R''(t)}{|R'(t) \times R''(t)|} = \frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t, -b\cos t, a)$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$$

$$= (-\cos^2 t, -\sin^2 t, 0)$$

$$K = \frac{|R'(t) \wedge R''(t)|}{|R'(t)|^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\vec{\tau} = \frac{(r', r'', r''')}{|r' \wedge r''|^2}$$

$$r''' = (a\sin t,\ -a\cos t,\ 0)$$

$$|r', r'', r'''| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= b a^2$$

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي ليكون منحنٍ ما مستوياً هو أن يكون الالتفاف معدوم في كل نقطة من نقاطه.

مبرهنة*: علاقات فرينيه:

ليكن C منحنياً ما نظامياً وسيطه هو طول القوس s، متجهات الوحدة $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ تشكل ثلاثية تريدر و $K(s)$ التقوس و $\tau(s)$ الالتفاف عندئذٍ تكون العلاقات الآتية محققة:

$$\begin{cases} T^{\circ} = KN & (1) \\ N^{\circ} = -KT + \tau B & (2) \\ B^{\circ} = -\tau N & (3) \end{cases}$$

البرهان: الملاحظة ①: بما أن $T = \dot{r}(s)$

$\dot{T} = \ddot{r}(s)$

وبما أنّ: $K = |\ddot{r}(s)|$

$N = \frac{\ddot{r}}{|\ddot{r}|}$

$$KN = |\ddot{r}| \cdot \frac{\ddot{r}}{|\ddot{r}|} = \ddot{r} = \dot{T}$$

الملاحظة ② باعتبار ③ محققة:

$$N = B \times T$$

$$\dot{N} = \dot{B} \times T + B \times \dot{T}$$

$$= -\tau N \times T + B \times KN$$

$$= -\tau(-B) + K(-T)$$

$$= -KT + \tau B$$

الملاحظة ③ تبرهن في المحاضرة القادمة

$\dot{\vec{B}} = \frac{\vec{B}'}{|r'|}$ * ملاحظة!

$$\dot{\vec{B}} = \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{B}'}{|r'|}$$

$\dot{\vec{N}} = \frac{\vec{N}'}{|r'|}$ *

$\dot{\vec{T}} = \frac{\vec{T}'}{|r'|}$ *

مثال: اللولب الدائري السابق أوجد ثلاثية فرينية:

$$T^{\circ} = \frac{T'}{|r'|} = \frac{-a}{a^2+b^2}\left(\cos t, \frac{-a}{a^2+b^2}\sin t, 0\right)$$

$$N^{\circ} = \left(\frac{1}{\sqrt{--}}\sin t, \frac{-1}{\sqrt{-}}\cos t, 0\right)$$

$$B^{\circ} = \frac{B'}{|r'|} = \frac{\quad}{\quad}$$

انتهت المحاضرة