كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : إحصاء رياضي

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

التوزيعات الاحتمالية العشوائية :

أولاً : التوزيعات الاحتمالية المنقطعة :

① التوزيع المنتظم : هو توزيع عشوائي منقطع فيه كل قيمة هو احتمال P ويمكن وضعه في الجدول التالي :

X_i	x_1	x_2	$---$	x_n
P_i	P_1	P_2	$---$	P_n

التوقع الرياضي :

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i P_i \quad ; \quad P(X) = f(x)$$

التباين :

$$\sigma^2(x) = V(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i (X_i - E(x))^2$$

أو بشكل آخر :

$$\sigma^2(x) = V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

الانحراف :

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)}$$

مثال : أوجد التوقع والانحراف لمضاربي قطعة النرد.

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(x) = \sum X_i P_i = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$= 3.5$$

$$\sigma^2(x) = \sum p_i (X_i - E(x))^2 = \frac{1}{6}(1-3.5)^2 + \frac{1}{6}(2-3.5)^2 + \dots + \frac{1}{6}(6-3.5)^2 = 2.91$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)} = \sqrt{2.91} = 1.7$$

2 توزيع برنولي: هو توزيع فيه نجاح التجربة p (وسيط برنولي) وفشل التجربة $q = 1-p$

X_i	0	1
P_i	q	p

التوقع الرياضي:

$$E(x) = \sum_{x=0}^{1} x\, f(x) = \sum_{x=0}^{1} x\, p^x q^{1-x}$$

* هنا $f(x)$ تعطى بالشكل:

$$f(x) = p^x q^{1-x}$$

$$\Rightarrow E(x) = 0 + p \Rightarrow E(x) = p$$

التباين:

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= p - p^2$$

$$= p(1-p)$$

$$= pq$$

الانحراف:

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)} = \sqrt{pq}$$

3 توزيع ثنائي الحد نيوتن: وسطاء التوزيع هي (n, p)

وهو عبارة عن توزيع برنولي n مرة.

قانون التوزيع ثنائي الحد:

$$P(X=x)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

$$C_k^n=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

k: هو عدد الخيارات الممكنة.

_ التوقع الرياضي: $E(x)=np$

_ الانحراف المعياري: $\sigma(x)=\sqrt{npq}$

_ التباين: $\sigma^2(x)=npq$

_ الالتواء (عدم التناظر): Skewness: $S_k=\frac{pq}{\sqrt{npq}}$

إذا كان تابع لتوزيع احتمالي عشوائي pq (برنولي)

ويمكن إعطاء الالتواء إذا كانت التجربة تابعة لعينة:

$$S_k=\frac{M_3}{S^3}$$ M_3 (العزم المركزي الثالث)، S^3 (الانحراف المعياري)

$$M_r=\frac{\sum(x_i-\bar{X})^r}{n}\quad,\quad S=\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$$

$S_k>0$ التواء n نحو اليمين

$S_k<0$ التواء n نحو اليسار

$S_k=0$ توزيع طبيعي

_ التطاول (التفرطح): Kurtosis:

$$K=\frac{1-6pq}{npq}$$

$K>0$ التطاول نحو الأعلى (مدبب)

$K<0$ التطاول نحو الأسفل (مسطح)

التفلطح باستخدام العينات:

$$K = \frac{M_4}{S^4} - 3$$

* الانحراف المعياري في حالة البيانات المبوبة: $\sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{X})^2}{n}}$

مركز الفئة x_i

* جدول توزيع ثنائي الحد:

X	0	1	k	n
$P(X=x)$	q^n	npq^{n-1}	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	p^n

4) توزيع بواسون: يفرض أن الاحتمال صغير جداً

الوسيط بواسون

$$\mu = E(X) = np = \lambda$$

عندئذٍ: $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

التوقع الرياضي: $E(X) = np$

التباين: $\sigma^2(x) = np$

الانحراف ~~المعياري~~: $\sigma(x) = \sqrt{np}$

مثال (1):

إذا كان احتمال أن يصيب الرامي الهدف هو 0.8 لخمس مرات تصويب والمطلوب:

1- أوجد دالة التوزيع.

2- أوجد احتمال إصابة الهدف مرة واحدة.

3- أوجد احتمال إصابة الهدف مرة على الأكثر.

4- أوجد احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل.

5- أوجد احتمال إصابة الهدف.

6- أوجد التوقع والتباين والالتواء والتطاول.

مثال (2):

يفرض نسبة الحصول على المرتبة الأولى السنة الرابعة هو 0,0003 نأخذ عينة مؤلفة من 120 طالب طالبا الاحتمال أن يكون بينهما 3 طلاب حصلوا على المرتبة الأولى ثمّ أوجد احتمال أن يحصل ~~الطلب~~ على المرتبة الأولى طالب واحد على الأقل.

ثانياً: التوزيعات الاحتمالية المستمرة:

(1) التوزيع الأسي: له أهمية كبيرة في المجال التطبيقي ويعد نموذجاً مثالياً للكثير من المسائل التي تواجه حياتنا اليومية وخصوصاً الزمن (الزمن اللازم لمكالمة هاتفية - الزمن اللازم لصيانة جهاز معطّل)

نعبر عن المتغير بـ λ

دالة الكثافة للتوزيع الأسي تعطى بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

أما تابع التوزيع:

$$P(X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

التوقع الرياضي: $E(x) = \frac{1}{\lambda}$

التباين: $V(x) = \sigma^2(x) = \frac{1}{\lambda^2}$

الانحراف: $\sigma = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}$

مثال ③:

إذا كانت عمر افتراضي لمصباح كهربائي $0{,}0001$

- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية ودالة الكثافة
- أوجد التوقع الرياضي والتباين
- أوجد احتمال أن يعمر المصباح على الأقل 8000 سنة.

② التوزيع الطبيعي:

وسطاء هذا التوزيع هما $N \sim (\mu, \sigma^2)$

يمكن أن نمثل منحني هذا التوزيع بمنحني غاوس

كل القيم الواقعة على المحور X تأخذ قيم موجبة ومحصورة بين المنحني والمحور X.

أما التوزيع الطبيعي: متوسط مجتمع ثابت ~~متوسط~~ متوسط عينة

$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$ (تباين معلوم) أو $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S}$ (تباين مجهول)

أما التوزيع الطبيعي المعياري: هو عبارة عن توزيع طبيعي فيه $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$

توزيع طبيعي معياري يوافق $\sim (0,1)$

$$P(-\infty < X < +\infty) = 1$$

تابع الكثافة

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2s^2}}$$

تابع التوزيع الاحتمالي:

$$P(X<x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dx \quad ; \quad Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

يوجد صعوبة في حساب هذا التكامل لذلك وجدت جداول تساعدنا في حساب هذا الاحتمال، نأخذ من الجدول العدد الصحيح والعدد الأول بعد الفاصلة من عمود الجدول، أما العدد الثاني بعد الفاصلة من سطر الجدول نجري التقاطع فنحصل على الاحتمال.

* خواص التوزيع الطبيعي المعياري:

1- $P(Z>z) = 1 - P(Z<z)$

2- $P(Z<-z) = 1 - P(Z<z)$

3- $P(Z>-z) = P(Z<z)$

4- $P(z_2<Z<z_1) = P(Z<z_1) - P(Z<z_2)$

جدول التوزيع لبواسون:

انتهت المحاضرة

X	0	1	2	$\dots$	K
$P(X=K)$	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\dots$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^K}{K!}$