كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية القياس

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

الجبر:

تعريف الجبر: لتكن X مجموعة غير خالية ندعو الصف غير الخالي E من أجزاء X جبراً في X إذا تحققت الشروط التالية:

أ: $\phi, X \in E$

2: $\forall A, B \in E \Rightarrow A \cup B \in E$

3: $\forall A \in E \Rightarrow \bar{A} \in E$

أي أن الصف غير الخالي E من أجزاء مجموعة ما غير خالية X هو جبر فيها إذا كان ϕ و X عنصران من الصف E و E مغلق بالنسبة لعمليتي الاجتماع والمتممة.

- من التعريف السابق ينتج أن إذا كان E جبراً في X فإن E مغلق بالنسبة:

أولاً: لعملية التقاطع:

$\forall A, B \in E \Rightarrow A \cap B \in E$

لأنه: $A \cap B = \bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} = \overline{(\underset{\in E}{\bar{A}} \cup \underset{\in E}{\bar{B}})} \in E$

لأن E جبراً في X

ثانياً: لعملية الفرق:

$\forall A, B \in E \Rightarrow A - B \in E$

لأنه: لدينا $A - B = \underset{\in E}{A} \cap \underset{\in E}{\bar{B}} \in E$ لأن

E جبر في X ومغلق بالنسبة لعملية التقاطع

ثالثاً: للفرق التناظري:

$\forall A, B \in E \Rightarrow A \Delta B \in E$

لأنه: لدينا $A \Delta B = (\underset{\in E}{A} - \underset{\in E}{B}) \cup (\underset{\in E}{B} - \underset{\in E}{A}) \in E$ لأن

E جبراً في X ومغلق بالنسبة للفرق.

رابعاً: للاجتماع المنتهي:

إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n$ متتالية من عناصر الجبر E فإنّ:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in E$$

لأنه:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$= \bar{\bar{A}}_1 \cup \bar{\bar{A}}_2 \cup \dots \cup \bar{\bar{A}}_n$$

$$= \overline{(\underset{\in E}{\bar{A}_1} \cap \underset{\in E}{\bar{A}_2} \cap \dots \cap \underset{\in E}{\bar{A}_n})} \in E$$ حسب دومورغان

لأن E جبراً في X ومغلق بالنسبة لعملية التقاطع.

وكذلك بالنسبة لعملية التقاطع المنتهي أي:

إذا كانت $A_1, \dots, A_n$ متتالية من المجموعات من الجبر E فإنّ

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in E$$

لأنه:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

$$= \bar{\bar{A}}_1 \cap \bar{\bar{A}}_2 \cap \dots \cap \bar{\bar{A}}_n$$

$$= \overline{(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n)} \in E$$

لأن E جبراً في X ومغلق بالنسبة لعملية الاجتماع.

نتيجة هامة:

بما أن كل جبر في X مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي والفرق

بالتالي كل جبر في X هو حلقة فيها ولكن العكس ليس من

الضروري أن يكون صحيحاً في الحالة العامة أي أنّه ليست كل حلقة في مجموعة ما غير خالية X جبراً فيها في الحالة العامة والسؤال الذي يطرح نفسه ~~هنا~~ جوابه متى تصبح كل حلقة في X حيث $X \neq \phi$ جبراً فيها. (الجواب في المبرهنة التالية).

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي حتى تكون حلقة ما $\mathcal{D}$ في مجموعة ما غير خالية X جبراً فيها هو أن تكون $X \in \mathcal{D}$ (أي المجموعة الكلية X في عنصر من $\mathcal{D}$)

(برهانها وظيفة بنفس طريقة برهان المبرهنة الشبيهة لها في فقرة سابقة)

بعض الأمثلة:

① إذا كانت X مجموعة ما غير خالية $(X \neq \phi)$ عندئذٍ فإنّ كلاً من الصفين $\{\phi, X\}$ و $P(X)$ جبراً فيها لأنهما يحققان جميع شروط الجبر حيث الصف الأول هو أصغر جبر في X والصف الثاني هو أكبر جبر فيها.

لماذا $\{\phi, X\}$ جبراً في X؟

لأنّه:

① $\forall \phi, X \in \{\phi, X\}$

② $\forall A, B \in \{\phi, X\} \Rightarrow A \cup B \in \{\phi, X\}$

$\phi \cup \phi = \phi \in \{\phi, X\}$

$\phi \cup X \in \{\phi, X\}$

$X \cup X = X \in \{\phi, X\}$

③ $A = \phi \in \{\phi, X\} \Rightarrow \bar{A} = \bar{\phi} = X \in \{\phi, X\}$

كذلك فإنه:

$A = X \in \{\phi, X\} \Rightarrow \bar{A} = \bar{X} = \phi \in \{\phi, X\}$

أي الشرط التالي محقق: $\forall A \in \{\phi, X\} \Rightarrow \bar{A} \in \{\phi, X\}$

أيضاً الصف $p(X)$ جبرياً في X لأنه:

① $\phi, X \in p(X)$

② $\forall A, B \in p(X) \Rightarrow A \cup B \in p(X)$

③ $\forall A \in p(X) \Rightarrow \bar{A} \in p(X)$

② إن صف المجموعات الجزئية المنتهية من مجموعة الأعداد الحقيقية IR وليكن E هو حلقة فيها ولكنه ليس جبرياً في IR أي:

$E = \{A \subseteq IR ;$ مجموعة منتهية في IR $A\}$

صف من أجزاء IR هو حلقة فيها لكنه ليس جبرياً في IR لأنه لدينا ϕ مجموعة جزئية من IR وهي مجموعة منتهية لأن عدد عناصرها هو الصفر بالتالي $\phi \in E$ ولكن $X = IR \notin E$ لأن IR مجموعة جزئية من IR ولكنها غير منتهية إذاً الشرط بأنه IR و ϕ هما عنصران من E غير محقق إذاً E ليس جبرياً في IR.

ملاحظة:

1- أي مجموعة غير خالية هي مجموعة جزئية من نفسها أي إذا كان $X \neq \phi \Leftarrow X \subseteq X$

2- المجموعة الخالية ϕ هي مجموعة جزئية أيضاً من نفسها أي أن $\phi \subseteq \phi$

3- المجموعة الخالية ϕ هي مجموعة جزئية من أي مجموعة X أي أن $\phi \subseteq X$

4- أي مجموعة جزئية A من مجموعة ما غير خالية X أي $(A \subseteq X)$

تكون عنصراً من $P(X)$ أي $(A \in P(X))$

○ ودوماً لدينا ϕ و X عنصران من $P(X)$

٦- كل مجموعة جزئية من $P(X)$ (حيث $X \neq \phi$) ندعوها صفاً من أجزاء X لأن كل عنصر من هذه المجموعة هو جزء من X أي مجموعة جزئية من X).

مثال: $\mathcal{E} = \{A \subseteq IR ;$ مجموعة منتهية في IR : $A\}$ صف المجموعات الجزئية المنتهية في IR

$$\mathcal{E} = \{A ; A \subseteq IR \ \wedge \ A \text{ مجموعة منتهية في } IR\}$$

ملاحظة هامة خاصة بالمثال السابق: (صف المجموعات الجزئية المنتهية في IR وهو $\mathcal{E}$): إذا كانت A مجموعة جزئية ومنتهية من IR أي $A \subseteq IR$ وهي مجموعة منتهية في IR مباشرة نكتب $A \in \mathcal{E}$ بمعنى: أي مجموعة جزئية منتهية من IR تكون عنصراً من الصف $\mathcal{E}$

الجبر التام:

تعريف الجبر التام (σ جبر): لتكن X مجموعة ما غير خالية $(X \neq \phi)$ ندعو الصف غير الخالي f من أجزاء X جبراً تاماً (σ جبر) في X إذا تحققت الشروط التالية:

① $\phi, X \in f$

② من أجل أي متتالية $(A_i)_{i \in IN}$ من عناصر f فإن:
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in f$$

③ $\forall A \in f \Rightarrow \bar{A} \in f$

أي أن الصف غير الخالي f هو جبر تام (σ جبر) في X إذا كان مغلقاً بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود ولعملية المتممة و ϕ و X عنصران من هذا الصف.

* ينتج من التعريف السابق أنه إذا كان f جبر تام في X $(X \neq \phi)$ فإنه يكون مغلق بالنسبة:

أ: للاجتماع المنتهي: الحل:

أي إذا كانت $(A_i)_{i=1}^{n}$ متتالية من عناصر f فإنه:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in f$$

لأن: f جبر تام مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود وضمنها الاجتماع المنتهي.

٢: للتقاطع المعدود:

أي إذا كانت $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية من عناصر f فإنه:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots \in f$$

لأنه:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots$$

$$= \bar{\bar{A}}_1 \cap \bar{\bar{A}}_2 \cap \dots$$

حسب دومورغان $= \overline{(\underset{\in f}{\bar{A}_1} \cup \underset{\in f}{\bar{A}_2} \cup \dots)} \in f$

لأن f جبر تام في X

نتيجة هامة: كل جبر تام (σ جبر) في X هو جبر فيها لأن كل جبر تام في X مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود وضمنها الاجتماع المنتهي وعملية المتممة و ϕ و X عنصران

منه بالتالي فهو جبر في X.

ملاحظة: إن عكس المبرهنة السابقة ليس من الضروري أن يكون صحيحاً في الحالة العامة.

بعض الأمثلة:

(1) إذا كانت X مجموعة ما غير خالية فإنَّ كلاً من الصفين $\{\phi, X\}$ صف أول و $P(X)$ صف ثاني جبراً تاماً في X لأنهما يحققان جميع شروط الجبر التام في X (تحقق من ذلك) حيث الصف الأول هو أصغر جبر تام في X والصف الثاني هو أكبر جبر تام في X.

(2) إنَّ صف المجموعات الجزئية المحدودة في مجموعة الأعداد الحقيقية IR أي: $\mathcal{F} = \{A : A \subseteq IR \wedge$ مجموعة محدودة في IR $A\}$ هو صف غير خالٍ من أجزاء IR وهو حلقة في IR (لماذا) ولكنه ليس جبراً ولا جبراً تاماً في IR (لماذا).

(3) صف المجالات المفتوحة من الشكل $]a,b[$ أي الصف:

$$f_1 = \{]a,b[\; ; \;]a,b[\subset IR \; ; \; -\infty < a < b < +\infty \}$$

أو صف المجالات المغلقة من الشكل $[a,b]$ أي الصف:

$$f_2 = \{ [a,b] \; ; \; [a,b] \subseteq IR \; ; \; -\infty < a < b < +\infty \}$$

والصف:

$$f_3 = \{]a,b] \subseteq IR \; ; \; -\infty < a < b < +\infty \}$$

والصف:

$$f_4 = \{ [a,b[\subseteq IR \; ; \; -\infty < a < b < +\infty \}$$

جميعها صفوف لا تشكل حلقة ولا جبر ولا جبر تام في الحالة العامة (لماذا).

تعريف هام:

تعريف الفضاء القيوس (القابل للقياس):

إذا كانت X مجموعة ما غير خالية و $\mathcal{F}$ جبراً تاماً في X عندئذ ندعو الثنائية $(X, \mathcal{F})$ فضاءً قيوساً (أو قابلاً للقياس)

ندعو كل مجموعة $A \in \mathcal{F}$ $(A \subseteq X)$ مجموعة قيوسة بالنسبة للجبر التام واختصاراً مجموعة قيوسة أي أن جميع عناصر $\mathcal{F}$ هي مجموعات قيوسة.

تمرين عملي: برهن أنه إذا كانت $X = \mathbb{R}$ وكانت A مجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{R}$ أو متممها A مجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{R}$ عندئذٍ فإنّ الصف غير الخالي D المعرف بالشكل:

$$D = \{A ; A \subseteq \mathbb{R} \wedge \bar{A} \text{ منتهية أو } A \text{ منتهية}\}$$

هو جبر في $\mathbb{R}$ لكنه ليس جبراً تاماً.

انتهت المحاضرة