كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : امثليات عددية

المحاضرة : الثالثة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

قدمنا مجموعة من الطرائق لحل المسألة $Min f$ بمتغير واحد في القسم الأول، أما الآن سنحل المسألة $Min f(X)$ في الحالة العامة عندما تكون دالة الهدف بأكثر من متغير حقيقي حيث $X \in \mathbb{R}^n$ و $n>1$ وتكون دالة الهدف $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

قبل الدخول في حل مسألة $Min f(X)$ سنقدم بعض التعاريف والمصطلحات الأساسية:

تعريف 1: شعاع التدرج Gradient vector:

لتكن الدالة $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق بالنسبة لجميع متغيراتها عندئذٍ يعرّف تدرج الدالة $f(X)$ والذي سنرمز له بـ $g(X)$ بأنه الشعاع:

$$g(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$$

حيث $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ و $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$; $i = 1, \dots, n$

تعريف 2: مصفوفة هيسيان Hessian Matrix:

لتكن الدالة $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق مرتين متتاليتين بالنسبة لمتغيراتها عندئذٍ تعرّف مصفوفة هيسيان لـ $f(X)$ بأنها المصفوفة

$$H(X) = (h_{ij}) \quad ; \quad i, j = 1, \dots, n$$

بالشكل:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

المشتقات بالنسبة لـ x_1 — المشتقات بالنسبة لـ x_2 — المشتقات بالنسبة لـ x_3 — المشتقات بالنسبة لـ x_n

واختصاراً يمكن اعادة كتابتها بالشكل

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad ; \quad i,j = 1,2,\dots,n$$

ملاحظة: إذا كانت المشتقات من المرتبة الثانية للدالة $f(X)$ مستمرة تكون مصفوفة هيسيان متناظرة

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

تعريف 3: الدالة الخطية Linear function

لتكن $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نقول إن الدالة $f(X)$ خطية في X إذا كان شعاع تدرجها يساوي شعاعاً ثابتاً

$g(X) = c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ وعندئذٍ يعبّر عنها بالصيغة التالية:

$$f(X) = c^T . X + d \quad ; \quad c, d \in \mathbb{R}^n$$

حيث: $c^T X = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ و

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 \ , \ \dots\dots \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_n} = c_n$$

$$\& \ g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = c_i \ ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

تعريف 4: الدالة التربيعية Quadratic function

لتكن لدينا الدالة $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نقول إنّ $f(X)$ دالة تربيعية في X اذا كانت مصفوفة هيسيان $H(X)$ ثابتة لها وعندئذٍ يعبّر عن الدالة التربيعية بالصيغة التالية:

$$f(X) = \frac{1}{2} X^T H(X)\, X + c^T X + d \quad ; \quad c, d \in \mathbb{R}^n$$

حيث:

$$H(X) \cdot X = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} h_{1j}\, x_j \\ \sum_{j=1}^{n} h_{2j}\, x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} h_{nj}\, x_j \end{bmatrix} \quad \& \quad c^T \cdot X = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$X^T \cdot H(X)\, X = (x_1, \dots, x_n) \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} h_{1j}\, x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} h_{nj}\, x_j \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\, x_i x_j$$

مثال: لتكن لدينا الدالة التربيعية $f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 10$

والمطلوب: 1 - أوجد تدرج $f(X)$ ؟

2 - برهن كون هذه الدالة تربيعيّة؟

الحل:

① شعاع التدرج

$$g(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 \end{bmatrix}$$

② لدينا

$$H(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

الدالة F تربيعية لأنّ مصفوفة هيسيان لها ثابتة وتُكتب بالصيغة

$$f(X) = \frac{1}{2} (x_1 \;\; x_2) \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + d$$

حيث $d = 10$ (من الدالة المعطاة في نص السؤال) كما أن c^T منشور

لمالك لورات (حول الصفر) $c^T = (0, 0)$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g(X_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c$$

ملاحظة: في حال كانت بعض عناصر مصفوفة هيسيان غير ثابتة تكون الدالة $f(X)$ فوق تربيعية

مثال: $f(x) = x_1^3 - x_2^2 + \ln(x_1^2 + 1)$ والمطلوب حساب شعاع تدرجها ومصفوفة هيسيان لها ... وظيفة

تعريف 5 : المصفوفة المعرّفة إيجاباً / سالباً :

بفرض أن المصفوفة A من الشكل $A_{n \times n}$ وأن $\delta \in \mathbb{R}^n$ شعاع غير صفري عندئذٍ إذا كان $\delta^T \cdot A \cdot \delta > 0$ تكون A معرفة إيجاباً (موجبة)

وإذا كان $\delta^T \cdot A \cdot \delta < 0$ تكون A معرفة سالباً (سالبة)

لصعوبة تحقيق هذا التعريف نستخدم المبرهنة التالية :

مبرهنة : لتكن A مصفوفة مربعة متناظرة أبعادها $n \times n$ بالشكل

$$A_{n \times n} = (a_{ij})$$

$$D_1 = |a_{11}| \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad - - - - - - \quad D_n = |A|$$

محدد المصفوفة بأكملها

نميز الحالات الثلاث التالية:

الحالة (1): إذا كان $D_j > 0$ بحيث $(j = 1, \dots, n)$ تكون المصفوفة A معرفة إيجاباً

الحالة (2): اذا كان $D_j < 0$ بحيث $(j = 1, \dots, n)$ تكون المصفوفة A معرفة سالباً

الحالة (3): غير ذلك (غير الحالتان السابقتان) تكون المصفوفة A غير معرّفة (إيجاباً أو سالباً)

تعريف 6: النهاية الدنيا الموضعية Local Min :

نقول إنّ النقطة x^* في $\mathbb{R}^n$ نهاية دنيا موضعية للدالة $f(x)$ إذا كانت f معرفة في جوار x^* ويوجد عدد صغير موجب ε بحيث يكون $f(x^*) < f(x)$ من أجل جميع النقاط X التي تنتمي إلى المراجحة التالية (تحقق المراجحة):

$0 < \| X - X^* \| < \varepsilon \qquad \forall X ; X \neq X^*$

تعريف 7: النهاية الدنيا الشاملة global min:

نقول إنّ x^* نقطة نهاية دنيا شاملة لـ $f(x)$ المستمرة على متحولاتها إذا تحقق الشرط: $f(x^*) < f(x)$ بحيث $\forall X \in \mathbb{R}^n$

تعريف 8: النقطة الساكنة stationary point:

نقول إنّ X^* نقطة استقرار لـ $f(x)$ إذا كان تدرج الدالة عندها يساوي الشعاع الصفري $g(x^*) = 0$.

تعريف 9: النقطة السرجية Saddle point:

نقول إنّ النقطة X^* نقطة سرجية لـ $f(x)$ إذا كانت ليست نقطة نهاية دنيا ولا عظمى للدالة $f(x)$.

- الشروط الكافية لتكون x^* نقطة نهاية دنيا:
  1. x^* نقطة ساكنة أي $g(x^*) = 0$.
  2. $H(x^*)$ معرفة إيجاباً $\Longleftrightarrow$ جميع القيم الذاتية لـ $H(x^*)$ أكبر تماماً من الصفر
- الشروط الكافية لتكون x^* نقطة نهاية عظمى:
  1. x^* نقطة ساكنة أي $g(x^*) = 0$
  2. $H(x^*)$ معرفة سالباً $\Longleftrightarrow$ جميع القيم الذاتية لـ $H(x^*)$ سالبة تماماً
- الشروط الكافية لتكون x^* نقطة سرجية:
  1. x^* نقطة ساكنة أي $g(x^*) = 0$
  2. $H(x^*)$ غير معرفة (القيم الذاتية موجبة وسالبة)

مثال: لتكن لدينا الدالة: $f(x) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 10$

والمطلوب: 1 - احسب شعاع تدرج الدالة؟

2 - احسب مصفوفة هيسيان للدالة f ؟

3 - أوجد النقاط الساكنة وصنفها بالاعتماد على مصفوفة هيسيان والقيم الذاتية؟

الحل:

① شعاع تدرج الدالة:

$$g(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3 \\ 3y^2 - 3 \end{pmatrix}$$

② مصفوفة هيسيان:

$$H(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$$

نلاحظ بأن الدالة ليست تربيعية لأن مصفوفة هيسيان ليست ثابتة

③ لإيجاد النقاط الساكنة نحل $g(X) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \\ 3y^2 - 3 = 0 \Longrightarrow y = \pm 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{ll} X_1 = (-1, -1) & X_3 = (-1, 1) \\ X_2 = (+1, -1) & X_4 = (1, 1) \end{array}$$

• لدينا $X_1 = (-1, -1)$:

$$H(X_1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad D_1 = -6 < 0 \qquad D_2 = 36 > 0$$

$H(X_1)$ غير معرفة

$\Longleftarrow$ $X_1(-1, -1)$ نقطة نهاية سرجية (وظيفة ايجاد القيم الذاتية)

• لدينا $X_2 = (1, -1)$:

$$H(X_2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad D_1 = 6 > 0 \qquad D_2 = -36 < 0$$

$H(X_2)$ غير معرفة $\Longleftarrow$ $X_2(1, -1)$ نقطة سرجية

لدينا $X_3(-1,1)$

$H(X_3) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ $D_1 = -6 < 0$ $D_2 = -36 > 0$

معرفة سالباً $H(X_3)$ $\Leftarrow$ X_3 نقطة نهاية عظمى

$f(X_3) = 10$

لدينا $X_4(1,1)$

$H(X_4) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ $D_1 = 6 > 0$ $D_2 = 36 > 0$

معرفة إيجاباً $H(X_4)$ $\Leftarrow$ X_4 نقطة نهاية دنيا

$f(X_4) = 6$

نلاحظ بأن القيم الذاتية $\lambda_1 = \lambda_2 = 6 > 0$.

وظيفة: $f(x) = x^2 + y^2 - \ln(x-y) + 10$ نفس الطلبات

تمرين: لتكن لدينا الدالة:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy - x + 10$$

المطلوب: أثبت أن هذه الدالة تربيعية واكتبها بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{2} X^T . H(X) . X + C^T . X + d$$

حيث $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ؟

الحل:

$$g : \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 2y - 1 \\ 2y + 2x \end{bmatrix}$$

$$H(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

بما أن مصفوفة هيسيان ثابتة (عناصرها ثابتة) $\Leftarrow$ الدالة تربيعية

نشر الدالة $f(x)$ حول الشعاع الصفري: $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f(x) = \overbrace{f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}^{d} + \Big[\underbrace{\nabla f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\text{وتدرج الدالة}}\Big]^T \left(X - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(X - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)^T \underbrace{\nabla^2 f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\text{المشتق الثاني للدالة (هيسيان)}} \left(X - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 10 + (-1 \quad 0)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x \quad y]\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

حيث

$$f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 10 = d$$

$$c = \nabla f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$$H\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$$

انتهت المحاضرة