كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي2

المحاضرة : الثانية /**عملي**/

السؤال الأول: $\begin{cases} y_n \to y \\ x_n \to x \end{cases}$ من فضاء الجداء الداخلي X فأثبت

$\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$

الإثبات:

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \leq$$

$$\|x_n\| \, \underbrace{\|y_n - y\|}_{=0} + \underbrace{\|x_n - x\|}_{=0} \, \|y\|$$

$$0 \leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$$

السؤال الثاني: X فضاء جداء عقدي فأثبت أنه

① $Re\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

② $Im\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$

الحل:

① $$\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cancel{\langle x, x\rangle} + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \cancel{\langle y, y\rangle} - \cancel{\langle x, x\rangle} + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle - \cancel{\langle y, y\rangle}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle\right) = \frac{\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle}{2} =$$

$$\frac{\langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle}}{2} = \frac{2Re\langle x, y\rangle}{2} = Re\langle x, y\rangle$$

② $Im <x,y> = \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) =$

$\frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) = \frac{1}{4}[<x+iy, x+iy> -$

$<x-iy, x-iy>] = \frac{1}{4}[\cancel{<x,x>} - i<x,y> + i<y,x> +$

$\underbrace{i \cdot \bar{i}}_{=1} \cancel{<y,y>} - \cancel{<x,x>} - i<x,y> + i<y,x> - \cancel{<y,y>}]$

$= \frac{1}{4}[-2i<x,y> + 2i<y,x>] = \frac{1}{2}[-i<x,y> + i<y,x>]$

$= \frac{1}{2}[-i<x,y> + i\overline{<x,y>}] =$

$\frac{1}{2}[-i<x,y> + i\overline{<x,y>}] = \frac{i}{2}[\overline{<x,y>} - <x,y>]$

$= \frac{i}{2}[-2i\, Im(<x,y>)]$

$= Im(<x,y>)$

السؤال الثالث: ليكن $X = \mathbb{C}^n$ فضاء شعاعي فوق الحقل العددي K

وليكن لدينا التطبيق $<.,.>$ المعرف فوق

$<.,.> : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to K$

$<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{y_i}$ $\qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

أثبت أنّ $(\mathbb{C}^n, <.,.>)$ فضاء هلبرت؟

الحل:

لاثبات أنّ $(\mathbb{C}^n, <.,.>)$ فضاء هلبرت نثبت أنّه فضاء جداء داخلي وتام

$\forall x, y, z \in X$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ $\qquad z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$

① $<x+y, z> \overset{??}{=} <x,z> + <y,z>$

$<x+y, z> = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\bar{z_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{z_i} + y_i \bar{z_i}$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{z}_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{z}_i = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

② $\langle \alpha x, y \rangle \overset{??}{=} \alpha \langle x, y \rangle$

$\langle \alpha x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) \bar{y}_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i = \alpha \langle x, y \rangle$

③ $\langle x, y \rangle \overset{??}{=} \overline{\langle y, x \rangle}$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$

$\overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\sum_{i=1}^{n} y_i \bar{x}_i} = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i x_i = \langle x, y \rangle$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

④ $\langle x, x \rangle \overset{??}{\geq} 0$

$\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0$

⑤ $\langle x, x \rangle = 0 \overset{??}{\Longleftrightarrow} x = 0$

$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0$

$|x_i|^2 = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n$

$x_i = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow x = (0, \dots, 0)$

من الشروط السابقة نجد أنّ الفضاء المعطى هو فضاء جداء داخلي ولاثبات انّه فضاء تام يجب أن نثبت أنّ كل متتالية لكوشي فيه هي متتالية متقاربة فيه

انتهت المحاضرة