



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي 2

المحاضرة : الثانية / عملي /

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z Facebook Group :

كلية العلوم ،

2

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الدكتورة: بشرى دراج

المحاضرة:

الثانية - عملي



القسم: الرياضيات

السنة: الرابعة

المادة: تحليل تابعي 2

التاريخ: / /

**A to Z Library for university services**

السؤال الأول:

من فضاء الجداء الداخلي  $X$  فإثبت  
 $\begin{cases} y_n \rightarrow y \\ x_n \rightarrow x \end{cases}$   
 $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

الاثبات:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle| \leq \\ &= \underbrace{\|x_n\|}_{=0} \cdot \|y_n - y\| + \underbrace{\|x_n - x\|}_{=0} \cdot \|y\| \end{aligned}$$

$$0 \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$$

السؤال الثاني:  $X$  فضاء متجهي عقدي. فأثبت أن:

$$\textcircled{1} \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$\textcircled{2} \operatorname{Im} \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$$

الحل:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) &= \frac{1}{4} (\langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle) \\ &= \frac{1}{4} (\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle \\ &\quad + \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle) \\ &= \frac{1}{4} (2\langle x, y \rangle + 2\langle y, x \rangle) = \frac{\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle}{2} = \\ &= \frac{\langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle}}{2} = \frac{2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle}{2} = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \operatorname{Im} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) = \\
 &= \frac{1}{4} (\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) = \frac{1}{4} [\langle x+iy, x+iy \rangle - \\
 &\langle x-iy, x-iy \rangle] = \frac{1}{4} [\langle x, x \rangle - i \langle x, y \rangle + i \langle y, x \rangle + \\
 &\underbrace{i \cdot \bar{i}}_{=1} \langle y, y \rangle - \langle x, x \rangle - i \langle x, y \rangle + i \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle] \\
 &= \frac{1}{4} [-2i \langle x, y \rangle + 2i \langle y, x \rangle] = \frac{1}{2} [-i \langle x, y \rangle + i \langle y, x \rangle] \\
 &= \frac{1}{2} [-i \langle x, y \rangle + i \langle \overline{x, y} \rangle] = \\
 &\frac{1}{2} [-i \langle x, y \rangle + i \langle \overline{x, y} \rangle] = \frac{1}{2} [\langle \overline{x, y} \rangle - \langle x, y \rangle] \\
 &= \frac{1}{2} [-2i \operatorname{Im}(\langle x, y \rangle)] \\
 &= \operatorname{Im}(\langle x, y \rangle)
 \end{aligned}$$

السؤال الثالث: ليكن  $X = \mathbb{C}^n$  فضاء متناهي فوق الحقل العددي  $K$  وليكن لدينا التطبيق  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  المرفق فوق

$$\begin{aligned}
 \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\rightarrow K \\
 \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{y}_i \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)
 \end{aligned}$$

أثبت أنه  $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء هلبرت؟

الحل:

لأثبت أنه  $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  فضاء هلبرت نثبت أنه فضاء هلبرت

داخلي وتام  $\forall x, y, z \in X$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

$$\textcircled{1} \langle x+y, z \rangle \stackrel{PP}{=} \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\bullet \langle x+y, z \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \bar{z}_i = \sum_{i=1}^n x_i \bar{z}_i + y_i \bar{z}_i$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \bar{z}_i + \sum_{i=1}^n y_i \bar{z}_i = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\textcircled{2} \langle \alpha x, y \rangle \stackrel{??}{=} \alpha \langle x, y \rangle$$

$$\bullet \langle \alpha x, y \rangle = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i) \bar{y}_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$\textcircled{3} \langle x, y \rangle \stackrel{??}{=} \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\bullet \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

$$\bullet \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\sum_{i=1}^n y_i \bar{x}_i} = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i = \langle x, y \rangle$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\textcircled{4} \langle x, x \rangle \stackrel{??}{\geq} 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \geq 0$$

$$\textcircled{5} \langle x, x \rangle = 0 \stackrel{??}{\iff} x = 0$$

$$\bullet \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 0$$

$$|x_i|^2 = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow x = (0, \dots, 0)$$

من الشروط السابقة نجد أنّ الفضاء المعطى هو فضاء ميناء داخلي  
ولانبات أنّه فضاء تام يجب أن نثبت أنّ كل متتالية كائونسي فيه هي  
متتالية متقاربة فيه.

انتهت المحاضرة