كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي2

المحاضرة : الاولى /عملي/

السؤال الأول: ليكن لدينا المؤثر T المعرّف بالشكل:

$$T : \ell_2 \to \ell_2$$

$$T(x_1, x_2, \ldots) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots\right)$$

① - أثبت أنّ T خطي ومحدود وأوجد نظيمه؟

② - أوجد T^2 ؟

الحل: ℓ_2 فضاء المتتاليات (x_r) حيث $x_r = (x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots)$

التي تحقق الشرط $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(r)}|^2 < \infty$

• T خطي: $\forall \alpha, \beta \in K \quad \& \quad \forall x, y \in \ell_2$

$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \quad , \quad y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$

$T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots) =$

$\left(\frac{\alpha x_1 + \beta y_1}{1}, \frac{\alpha x_2 + \beta y_2}{2}, \ldots\right) =$

$\left(\frac{\alpha x_1}{1}, \frac{\alpha x_2}{2}, \ldots\right) + \left(\frac{\beta y_1}{1}, \frac{\beta y_2}{2}, \ldots\right)$

$= \alpha\left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots\right) + \beta\left(\frac{y_1}{1}, \frac{y_2}{2}, \ldots\right) = \alpha Tx + \beta Ty$

• T محدود: أي لنحاول إيجاد عدد $c > 0$ بحيث يكون:

$\|Tx\| \le c\,\|x\| \qquad \forall x \in \ell_2$

$\|Tx\| = \|T(x_1, x_2, \ldots)\| = \left\|\left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots\right)\right\| =$

$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{x_i}{i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$

$\Longrightarrow (*) \ \boxed{\|Tx\| \le \|x\|}$ و $c = 1 > 0$

$\Longleftarrow$ T محدود

• إيجاد نظيم T :

$$\|T\| = \sup_{0 \neq x \in \ell_2} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

من ⊛ نجد أنّ

$$\forall x \in \ell_2 \; ; \; \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq 1 \implies \|T\| = \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq 1$$

$$\implies \boxed{\|T\| \leq 1}$$

• لنأخذ $x_0 = (1, 0, 0, \ldots)$

$$\|Tx_0\| = \|(\tfrac{1}{1}, \tfrac{0}{2}, \tfrac{0}{3}, \ldots)\| = \|(1, 0, 0, \ldots)\| =$$

$$(|1|^2 + |0|^2 + |0|^2 + \ldots)^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\|x_0\| = \|(1, 0, 0, \ldots)\| = 1$$

$$\implies \|T\| = \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} = 1$$

$$\implies \|T\| \geq 1$$

مما سبق نجد أنّ $\|T\| = 1$

② $T^2x = T^2(x_1, x_2, x_3, \ldots) = T(T(x_1, x_2, \ldots)) =$

$$T(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots) = (\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{9}, \ldots)$$

السؤال الثاني : ليكن $X = C[a,b]$ ولتكن لدينا الدالي :

$f : X \to \mathbb{R}$ المعرف بالعلاقة :

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,dt \qquad \forall x \in C[a,b]$$

1 - أثبت أنّ f خطي ومحدود ؟

2 - أثبت أنّ $\|f\| = b - a$ ؟

الحل :

① $\forall x, y \in C[a,b] \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha x + \beta y) = \int_a^b (\alpha x + \beta y)(t)\,dt = \int_a^b (\alpha x)(t) + (\beta y)(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (\alpha x(t) + \beta y(t))\,dt =$$

$$\alpha \int_a^b x(t)\,dt + \beta \int_a^b y(t)\,dt = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$\Leftarrow f$ خطي

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |x(t)|\,dt \leq \int_a^b \max_{a\leq t\leq b}|x(t)|\,dt$$

$$= \max_{a\leq t\leq b}|x(t)| \int_a^b dt$$

$$\Longrightarrow |f(x)| \leq |b-a| \max_{a\leq t\leq b}|x(t)|$$

$$\Longrightarrow \boxed{|f(x)| \leq |b-a| \cdot \|x\|}$$

بالتالي f محدود

② لدينا من الطلب السابق $\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq b-a \quad \forall x \in X$

$$\Longrightarrow \|f\| = \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq b-a$$

$$\Longrightarrow \boxed{\|f\| \leq b-a} \quad (*)$$

نأخذ $x_0 = 1 \in C[a,b]$

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in C[a,b]\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{|f(x_0)|}{1} = \left|\int_a^b x_0(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_a^b 1\,dt\right| = |b-a| = b-a \Longrightarrow \boxed{\|f\| \geq b-a} \quad (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ $\|f\| = b-a$.

السؤال الثالث: $X = \mathbb{R}^n$ فضاء شعاعي فوق الحقل العددي K

وليكن لدينا التطبيق $\langle .,. \rangle$ معرّف بالشكل:

$$\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow K$$

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad ; \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

أثبت أنّ $(\mathbb{R}^n, \langle .,. \rangle)$ فضاء جداء داخلي ؟

الحل:

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \;,\; y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \;,\; z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$

- $\langle x+y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\,\bar z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \bar z_i =$
$\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
- $\forall \alpha \in K$
$\langle \alpha x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i \bar y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \bar y_i = \alpha \langle x, y\rangle$
- $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar y_i = \sum_{i=1}^{n} \bar y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\bar{y}_i}\,\overline{\bar{x}_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} y_i \bar x_i} =$
$\overline{\langle y, x\rangle}$
- $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0$
- $\langle x, x\rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0 \iff |x_i|^2 = 0 \iff x_i = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$
$\iff x = 0 = (0, 0, \dots, 0)$

السؤال الرابع: أثبت أنّ كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم، ليكن $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضاء جداء داخلي لنبيّن أنّ $(X, \|\cdot\|)$ فضاء منظم حيث $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

الحل:

① $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$

② $\|x\| = 0 \iff \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \iff \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

③ $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha \bar\alpha \langle x, x\rangle} =$
$\sqrt{|\alpha|^2 \langle x, x\rangle} = |\alpha|\,\|x\|$

④ $\|x+y\| \overset{?}{\leq} \|x\| + \|y\|$

- $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$
$+ \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2$
$= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2$
$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2$
$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

وهي متراجحة المثلث ، من الشروط السابقة نجد أنّ $(X, \|\cdot\|)$ فضاء منظم

السؤال الخامس : ليكن $(X, <\cdot,\cdot>)$ فضاء جداء داخلي أثبت أنّ

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \frac{1}{2}(x+y)\|^2$$

$$\forall x, y, z \in X$$

الاثبات:

$$\ell_1 = \|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = <z-x, z-x> + <z-y, z-y> =$$

$$<z,z> + <z,-x> + <-x,z> + <-x,-x> + <z,z> +$$

$$<z,-y> + <-y,z> + <-y,-y>$$

$$= <z,z> - <z,x> - <x,z> + <x,x> + <z,z> -$$

$$<z,y> - <y,z> + <y,y>$$

$$= 2\|z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - <z,x> - <x,z> - <z,y> -$$

$$<y,z>$$

$$\ell_2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \frac{1}{2}(x+y)\|^2 =$$

$$\frac{1}{2}<x-y, x-y> + 2<z - \frac{1}{2}(x+y), z - \frac{1}{2}(x+y)>$$

$$= \frac{\|x\|^2 - <x,y> - <y,x> + \|y\|^2}{2} + 2[(\|z\|^2 + <z, -\frac{1}{2}x> +$$

$$<z, -\frac{1}{2}y> + <-\frac{1}{2}x, z> + <-\frac{1}{2}y, z> +$$

$$<-\frac{1}{2}(x+y), -\frac{1}{2}(x+y)>$$

$$= \frac{\|x\|^2 - <x,y> - <y,x> + \|y\|^2}{2} + 2[\|z\|^2 - \frac{1}{2}<z,x>$$

$$-\frac{1}{2}<z,y> - \frac{1}{2}<x,z> - \frac{1}{2}<y,z> + \frac{1}{4}<x,x> + \frac{1}{4}<x,y>$$

$$+\frac{1}{4}<y,x> + \frac{1}{4}<y,y>]$$

$$= \frac{\|x\|^2}{2} - \frac{\langle x,y\rangle}{2} - \frac{\langle y,x\rangle}{2} + \frac{\|y\|^2}{2} + 2\|z\|^2 - \langle z,x\rangle - \langle z,y\rangle - \langle x,z\rangle - \langle y,z\rangle + \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\langle x,y\rangle + \frac{1}{2}\langle y,x\rangle + \frac{1}{2}\|y\|^2$$

$$= 2\|z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle z,x\rangle - \langle x,z\rangle - \langle z,y\rangle - \langle y,z\rangle \Rightarrow l_1 = l_2 \Rightarrow$$ العلاقة محققة

علاحظة: يمكن اثبات التمرين السّابق بأسلوب ثاني:

لدينا علاقة متوازي الأضلاع

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2}[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2]$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|\tfrac{1}{2}(x+y)\|^2$$

نضع $z = x+y$ عندئذٍ

$$\|z-y\|^2 + \|z-x\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \tfrac{1}{2}(x+y)\|^2$$

وهو المطلوب

انتهت المحاضرة