كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي2

المحاضرة : الثالثة /نظري/

**مثال:** بفرض $T$ مؤثر خطي ومحدود $T: \ell_2 \to \ell_2$

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, \dots)$$

أوجد مؤثر هلبرت المرافق $T^*$ ؟

**الحل:**

بما أن $T$ خطي ومحدود فإن $T^*$ موجود ويحقق $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$

نفرض $T^*y = (z_1, z_2, z_3, \dots)$

- $\langle Tx, y\rangle = \langle (0, 4x_1, x_2, 4x_3, \dots), (y_1, y_2, \dots)\rangle$

$$= 0\cdot\bar{y}_1 + 4x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_3 + 4x_3\bar{y}_4 + \dots$$

- $\langle x, T^*y\rangle = \langle (x_1, x_2, \dots), (z_1, z_2, \dots)\rangle$

$$= x_1\bar{z}_1 + x_2\bar{z}_2 + x_3\bar{z}_3 + \dots$$

بالمطابقة نجد:

$\bar{z}_1 = 4\bar{y}_2 \Rightarrow z_1 = 4y_2$

$\bar{z}_2 = \bar{y}_3 \Rightarrow z_2 = y_3$

$\bar{z}_3 = 4\bar{y}_4 \Rightarrow z_3 = 4y_4$

$\vdots$

$$\Rightarrow T^*y = (z_1, z_2, \dots) = (4y_2, y_3, 4y_4, \dots)$$

**مبرهنة:** إذا كان $\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle$ أياً كان $w$ من فضاء جداء داخلي $X$ فإن $v_1 = v_2$ وبوجه خاص:

إذا تحققت المساواة $\langle v_1, w\rangle = 0$ أياً كان $w \in X$

فإن $v_1 = 0$ لـ عنصر ثابت

**مبرهنة:** ليكن $X$ و $Y$ فضاءين جداء داخلي و $T: X \to Y$ مؤثراً خطياً محدوداً عندئذٍ نجد ما يلي:

① $T = 0 \iff \langle Tx, y \rangle = 0$ أياً كان $x \in X$ و $y \in Y$

② اذا كان $T: X \to X$ حيث $X$ عقدي وكان $\langle Tv, v \rangle = 0$ أياً كان $v \in X$ عندئذٍ $T = 0$.

**تعريف:** يقال عن مؤثر خطي محدود $T: H \to H$ في فضاء هلبرت $H$ بأنّهُ مترافق ذاتياً إذا كان $T = T^*$

**مبرهنة:** الترافق ذاتياً:

ليكن $T: H \to H$ مؤثراً خطياً محدوداً على فضاء هلبرت $H$ عندئذٍ:

① إذا كان $T$ مترافق ذاتياً فإنّ $\langle Tx, x \rangle$ حقيقي أياً كان $x$ من $H$

② إذا كان $H$ عقدياً (مبني فوق حقل الأعداد العقدية) وكان $\langle Tx, x \rangle$ حقيقي لكل $x \in H$ فإنّ $T$ مترافق ذاتياً

الاثبات:

① لدينا $T$ مترافق ذاتياً أي $T = T^*$

$$\overline{\langle Tx, x \rangle} = \overline{\langle x, T^*x \rangle} = \overline{\langle x, Tx \rangle} = \langle Tx, x \rangle$$

$\Leftarrow$ $\langle Tx, x \rangle$ حقيقي لكل $x \in H$

② لدينا $\langle Tx, x \rangle$ حقيقي لكل $x \in H$ عندئذٍ:

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \overline{\langle x, T^*x \rangle} = \langle T^*x, x \rangle \implies$$

$$\langle Tx, x \rangle - \langle T^*x, x \rangle = 0$$

$$\langle Tx - T^*x, x \rangle = 0 \implies \langle (T - T^*)x, x \rangle = 0$$

$$T - T^* = 0 \implies T = T^*$$

حسب مبرهنة سابقة $\langle Tv, v \rangle = 0 \iff T = 0$

$\Leftarrow$ $T$ مترافق ذاتياً

**مبرهنة:** الشرط اللازم والكافي كي يكون مركب مؤثرين خطيين مترافقين

ذاتياً ومحدودين $S$ و $T$ على فضاء هلبرت $H$ مترافقاً ذاتياً هو أن يكون هذان المؤثران تبادليان (قابلين للمبادلة) أي يكون $ST = TS$.

الاثبات:

$\Leftarrow$ $T$ و $S$ مترافقين ذاتياً أي $T^* = T$ & $S^* = S$

و $ST = TS$ ، لنثبت أن $ST$ مترافق ذاتياً

$(ST)^* = T^* S^* = TS = ST \Rightarrow$ $ST$ مترافق ذاتياً

$(TS)^* = S^* T^* = ST = TS \Rightarrow$ $TS$ مترافق ذاتياً

$\Rightarrow$ $ST$ مترافق ذاتياً

و $TS$ مترافق ذاتياً ولنبرهن أن $ST = TS$

$ST = (ST)^* = T^* S^* = TS$

وهو المطلوب.

ملاحظة: الفضاء المتجهي $B(X, X)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية و المحدودة من فضاء منظم $X$ في الفضاء نفسه يعرف نظيم بالشكل:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} \|Tx\|$$

مبرهنة: متتاليات المؤثرات المترافقة ذاتياً:

لتكن $(T_n)$ متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة والمترافقة ذاتياً $T_n : H \to H$ على فضاء هلبرت $H$ . لنفترض أن $(T_n)$ متقاربة من $T$ أي أن $\|T_n - T\| \to 0$

حيث $\|.\|$ هو النظيم على الفضاء $B(X, X)$ عندئذٍ تكون النهاية $T$ مؤثر مترافق ذاتياً على $H$

الاثبات:

يجب اثبات أن $T^* = T$ :

$\|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\|$.

$\|T - T^*\| = \|T - T_n + T_n - T_n^* + T_n^* - T\| \leq \|T - T_n\| + \|T_n - T_n^*\| + \|T_n^* - T^*\|$.

وبما أنّ $T_n^* = T_n$ عندئذٍ $\|T - T^*\| \leq 2\|T - T_n\|$

عندما $n \to \infty$ نجد $\|T - T^*\| = 0 \Leftarrow T = T^*$

$\Leftarrow T$ مترافق ذاتياً.

**تعريف:** يُقال عن المؤثر الخطي المحدود $T: H \to H$ على فضاء هلبرت $H$ بأنّه مؤثر واحدي إذا حقق الشروط التالية:

① $T$ غامر ② $T$ متباين ③ $T^* = T^{-1}$

**ملاحظة:** كل مؤثر واحدي هو مؤثر ناظمي

**مبرهنة:** $R(T) = H$ ، $T: H \to H$ مؤثر خطي ومحدود على فضاء هلبرت $H$ : $T$ واحدي $\Leftrightarrow \|Tx\| = \|x\|$.

**الاثبات:**

$\Leftarrow$ $T$ واحدي عندئذٍ $T^* = T^{-1}$

$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, T^{-1}Tx\rangle$

$\Rightarrow \|Tx\|^2 = \langle x, Ix\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 \Rightarrow$

$$\boxed{\|Tx\| = \|x\|}$$

$\Rightarrow$ لدينا $R(T) = H$ عندئذٍ $T$ غامر

• $T$ متباين $\quad \forall x \in H \; ; \; Tx = 0 \overset{??}{\Longrightarrow} x = 0$

$Tx = 0 \Rightarrow \|Tx\| = \|0\| \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Leftarrow T$ متباين

• لنبرهن أنّ $T^* = T^{-1}$ :

$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, (T^*)^*x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle = \langle I_x x, x\rangle$

$\Rightarrow \langle T^*Tx - Ix, x\rangle = 0 \Rightarrow \langle (T^*T - I)x, x\rangle = 0$

$\Rightarrow T^*T - I = 0 \Rightarrow \boxed{T^*T = I}$ ①

$T.T^* = T.T^*(T.T^{-1}) = T.(T^*T).T^{-1} = T.I.T^{-1} = T.T^{-1} = I$

$\Rightarrow \boxed{T.T^* = I}$ ②

$\Rightarrow T.T^* = T^*T = I \Rightarrow \boxed{T^* = T^{-1}}$

مما سبق نجد بأنّ $T$ مؤثر وحدي

**ملاحظة:** إذا كانت $T$ مؤثر وحدي عندئذٍ $\|T\| = 1$

**الاثبات:** $T$ مؤثر وحدي $\Leftarrow \|Tx\| = \|x\|$

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 1 \Rightarrow \|T\| = 1$$

**ملاحظة:** ليكن $T$ مؤثر وحدي عندئذٍ $T^{-1}$ مؤثر وحدي

**الاثبات:**

$T$ مؤثر وحدي $\Leftarrow T$ غامر ومتباين فإنّ $T^{-1}$ غامر ومتباين

بقي أن نبرهن أنّ $(T^{-1})^{-1} = (T^{-1})^*$

$(T^{-1})^* = (T^*)^* = T = (T^{-1})^{-1}$

وهو المطلوب

**ملاحظة:** $U: H \to H$ مؤثر وحدي وَ $V: H \to H$ مؤثر وحدي

عندئذٍ $U.V$ مؤثر وحدي

الاثبات: $U.V$ متباين وغامر

$(UV)^* = V^*U^* = V^{-1}U^{-1} = (U.V)^{-1} \Rightarrow UV$ وحدي

**ملاحظة:** إذا كانت $T: H \to H$ مؤثر وحدي عندئذٍ:

$\langle Tf, Tg\rangle = \langle f, g\rangle \quad \forall f, g \in H$

الاثبات:

$\langle Tf, Tg \rangle = \langle f, T^* Tg \rangle = \langle f, T^{-1} Tg \rangle = \langle f, Ig \rangle = \langle f, g \rangle$

تعريف: نقال عن المؤثر الخطي المحدود $T: H \to H$ على فضاء هلبرت $H$ بأنه ناظمي إذا كان $TT^* = T^*T$

ملاحظة: كل مؤثر مترافق ذاتياً هو مؤثر ناظمي

مبرهنة: $T: H \to H$ مؤثر خطي محدود على فضاء هلبرت $H$ العقدي
عندئذٍ: $T$ ناظمي $\iff$ $\|T^*_x\| = \|Tx\|$
أياً كان $x$ من $H$

تمارين: التمرين الأول: $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$T(x, y) = (2x + iy, ix + 2y)$$

1- أثبت أنَّ $T$ خطي؟
2- أثبت أنَّ $T$ محدود؟
3- أوجد $T^*$؟
4- هل $T$ ناظمي؟

الحل:

① $\forall \underbrace{(x_1, y_1)}_{v}, \underbrace{(x_2, y_2)}_{w} \in \mathbb{C}^2 \quad \forall \alpha, \beta \in K$

• $T(\alpha v + \beta w) = T(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) =$
$(2\alpha x_1 + 2\beta x_2 + i\alpha y_1 + i\beta y_2, i\alpha x_1 + i\beta x_2 + 2\alpha y_1 + 2\beta y_2)$

• $\alpha Tv + \beta Tw = \alpha T(x_1, y_1) + \beta T(x_2, y_2)$
$= \alpha(2x_1 + iy_1, ix_1 + 2y_1) + \beta(2x_2 + iy_2, ix_2 + 2y_2)$
$= (2\alpha x_1 + 2\beta x_2 + \alpha i y_1 + \beta i y_2, i\alpha x_1 + 2\alpha y_1 + i\beta x_2 + 2\beta y_2)$

$\Longrightarrow T(\alpha v + \beta w) = \alpha Tv + \beta Tw$

$\Longleftarrow$ $T$ خطي

② $\|Tv\|^2 = \|T(x,y)\|^2 = \|(2x+iy, ix+2y)\|^2 =$

$|2x+iy|^2 + |ix+2y|^2 = 4x^2+y^2+x^2+4y^2 = 5(x^2+y^2)$

$= 5\|(x,y)\|^2 \Longrightarrow \|Tv\| = \sqrt{5}\,\|v\|$

$\Leftarrow T$ محدود

③ $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*_w\rangle$

$\langle Tv, w\rangle = \langle T(x_1,y_1), (x_2,y_2)\rangle =$

$\langle (2x_1+iy_1, ix_1+2y_1), (x_2,y_2)\rangle =$

$(2x_1+iy_1)\,\overline{x_2} + (ix_1+2y_1)\,\overline{y_2}$

$= x_1(2\overline{x_2}+i\overline{y_2}) + y_1(i\overline{x_2}+2\overline{y_2})$

لنضع $T^*_w = (z_1, z_2)$

$\langle v, T^*_w\rangle = \langle (x_1,y_1), (z_1,z_2)\rangle = x_1\overline{z_1} + y_1\overline{z_2}$

عندئذٍ: $\overline{z_1} = 2\overline{x_2} + i\overline{y_2}$

$\Longrightarrow z_1 = 2x_2 - iy_2$

$\overline{z_2} = i\overline{x_2} + 2\overline{y_2} \Longrightarrow z_2 = -ix_2 + 2y_2$

$T^*(x_2,y_2) = (z_1, z_2) = (2x_2 - iy_2, -ix_2 + 2y_2)$

عندئذٍ $T^*: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$T^*(x,y) = (2x - iy, -ix + 2y)$

④ $T.T^*_v = T(T^*(x,y)) = T(2x-iy, -ix+2y) =$

$(2(2x-iy) + i(-ix+2y), i(2x-iy) + 2(-ix+2y))$

$= (5x, 5y)$

وبأسلوب مماثل نثبت أنّ $T^*.T_v = (5x, 5y)$

$\Longrightarrow T.T^*_v = T^*.T_v \qquad \forall v \in \mathbb{C}^2$

$\Rightarrow T.T^* = T^*T \Longrightarrow$ $T$ ناظمي

التمرين الثاني: ليكن المؤثر الخطي والمحدود $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$v(x,y) : T_v = (-y, -x)$

1- أوجد $T^*$ ؟

2- هل $T$ مترافق ذاتياً ؟

3- هل $T$ مؤثر وحدي ؟

الحل:

① بما أنّ $T$ خطي ومحدود فإنّ $T^*$ موجود ويحقق

$$\langle T_v, w\rangle = \langle v, T^*_w\rangle$$

$$\langle T_v, w\rangle = \langle T(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle =$$

$$\langle (-y_1, -x_1), (x_2, y_2)\rangle = -y_1 x_2 - x_1 y_2$$

لنضع $T^*_w = (Z_1, Z_2)$

$$\langle (x_1, y_1), T^*_w\rangle = \langle (x_1, y_1), (Z_1, Z_2)\rangle = x_1 Z_1 + y_1 Z_2$$

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 = -y_2 \\ Z_2 = -x_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow T^*_{(x_2, y_2)} = (-y_2, -x_2)$$

$$T^*: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T^*_{(x,y)} = (-y, -x)$$

② $T = T^* \Leftarrow T$ مترافق ذاتياً

③ ط(1): هذه الطريقة تصح في حال $R(T) = \mathbb{R}^2$

$T$ مؤثر وحدي $\Longleftrightarrow \|T_v\|^2 = \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}$

$$\|T_v\|^2 = \|T(x,y)\|^2 = \|(-y, -x)\|^2 = y^2 + x^2$$

$$\|v\|^2 = \|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow \|T_v\| = \|v\|$$

بالتالي $T$ مؤثر وحدي

ط(2): $T$ غامر وضوحاً ، اثبات أنّ $T$ متباين

$Tv = 0 \Rightarrow (-y, -x) = (0,0) \Rightarrow y = 0 \ , x = 0$

$v = (0,0) = 0$

بقي أن نبرهن أنَّ $T^* = T^{-1}$

$T\,T^*v = T(-y,-x) = (x,y) = Iv$

$T^*\,Tv = T^*(-y,-x) = (x,y) = Iv$

$\Rightarrow T\,T^* = T^*\,T = I \Rightarrow T^* = T^{-1}$

$\Leftarrow$ $T$ مؤثر وحدي

انتهت المحاضرة