كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي2

المحاضرة : الثانية /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

القسم: الرياضيات
السنة: الرابعة
المادة: تحليل تابعي (2)
الدكتورة: بشرى دراج
المحاضرة: الثانية - نظري
التاريخ: / /
A to Z Library for university services

تمرين: أثبت أنّ الفضاء $C[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي وبالتالي ليس فضاء هلبرت.

الاثبات:

لدينا $C[a,b]$ فضاء منظم ويعرّف النظيم عليه بالشكل التالي: $\|x\| = \max\limits_{a\le t\le b} |x(t)|$ ، يكفي أن نثبت بأنّ علاقة متوازي الأضلاع غير محققة كي نثبت بأنّ $C[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي

لنأخذ $x(t) = 1 \in C[a,b]$

إنّ $y(t) = \dfrac{t-a}{b-a} \in C[a,b]$ وَ $\|x\| = 1$

$$\|y\| = \max_{a\le t\le b} |y(t)| = 1$$

توضيح كيفية ايجاد $\|y\|$:

$y(t)$ معرف ومستمر على $[a,b]$ حيث

$y(a) = 0$, $y(b) = 1$

$y' = \dfrac{1}{b-a} > 0$

t	a		b
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	1

$\Rightarrow \max |y(t)| = 1$

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a}$$

$$\bullet\ \|x+y\| = \max_{a\le t\le b} |(x+y)(t)| = \max_{a\le t\le b} |x(t) + y(t)| = 2$$

$$\bullet\ \|x-y\| = \max_{a\le t\le b} |(x-y)(t)| = 1$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5$$

$$\&\quad 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$$

ومنه فإنّ:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

هذا يعني أنّ علاقة متوازي الأضلاع غير محققة بالتالي الفضاء $C[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي ومنه ليس فضاء هلبرت

• الصيغة الخطية مرة ونصف المرة:

ليكن X و Y فضاءين متجهين فوق الحقل K ندعو التطبيق:

$h: X \times Y \to K$ صيغة خطية مرة ونصف المرة على $X \times Y$

إذا حققت الشروط: $\forall x_1, x_2, x \in X$

$y_1, y_2, y \in Y$ & $\alpha \in K$

1- $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$

2- $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$

3- $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$

4- $h(x, \alpha y) = \bar{\alpha} h(x, y)$

مثال: ليكن لدينا التطبيق $h: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$h(u, v) = 2x_1 y_2 - y_1 x_2$$

بحيث $u(x_1, y_1)$ و $v(x_2, y_2)$

أثبت أنّ h صيغة خطية مرة ونصف المرة على $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

الحل:

نتحقق من الشروط

$\boxed{1}$ $h(u_1 + u_2, v) \overset{??}{=} h(u_1, v) + h(u_2, v)$

بحيث $u_1(x_1, y_1)$ ، $u_2(x_2, y_2)$ ، $v(x_3, y_3)$

$h(u_1 + u_2, v) = h((x_1 + x_2, y_1 + y_2), (x_3, y_3)) =$

$2(x_1 + x_2) \cdot y_3 - (y_1 + y_2) x_3 =$

$2x_1 y_3 + 2x_2 y_3 - y_1 x_3 - y_2 x_3$

$= (2x_1y_3 - y_1x_3) + (2x_2y_3 - y_2x_3)$

$= h(u_1, v) + h(u_2, v)$

$\boxed{2}$ $h(u, v_1+v_2) \overset{??}{=} h(u, v_1) + h(u, v_2)$

حيث $u(x_1, y_1)$ وَ $v_1(x_2, y_2)$ و $v_2(x_3, y_3)$

$h(u, v_1+v_2) = h\big((x_1, y_1), (x_2+x_3, y_2+y_3)\big) =$

$2x_1(y_2+y_3) - y_1(x_2+x_3)$

$= (2x_1y_2 - y_1x_2) + (2x_1y_3 - y_1x_3)$

$= h(u, v_1) + h(u, v_2)$

$\boxed{3}$ $h(\alpha u, v) \overset{??}{=} \alpha h(u, v)$

$h(\alpha u, v) = h\big((\alpha x_1, \alpha y_1), (x_2, y_2)\big) = 2\alpha x_1y_2 - \alpha y_1x_2$

$= \alpha(2x_1y_2 - y_1x_2) = \alpha\, h(u, v)$

$\boxed{4}$ $h(u, \alpha v) \overset{?}{=} \alpha\, h(u, v)$ حيث $\alpha = \bar{\alpha}$

$h(u, \alpha v) = h\big((x_1, y_1), (\alpha x_2, \alpha y_2)\big) =$

$2x_1\alpha y_2 - y_1\alpha x_2$

$= \alpha(2x_1y_2 - y_1x_2) = \alpha\, h(u, v)$

ممّا سبق نجد أنّ الشروط جميعها محققة وبالتالي التطبيق h يعرف صيغة خطية مرة ونصف المرة على $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

مثال: ليكن لدينا التطبيق $h: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$h(u, v) = x_2 - y_1$

$u(x_1, y_1)$, $v(x_2, y_2)$

هل h تعرّف صيغة خطية مرة ونصف المرة على $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ؟

الحل:

$\boxed{1}$ $h(u_1+u_2, v) \overset{??}{=} h(u_1, v) + h(u_2, v)$

$u_1(x_1, y_1)$, $u_2(x_2, y_2)$, $v(x_3, y_3)$

$h(u_1+u_2, v) = h((x_1+x_2, y_1+y_2), (x_3, y_3)) =$

$x_3 - (y_1+y_2) = x_3 - y_1 - y_2$

$$\left.\begin{aligned} h(u_1, v) &= x_3 - y_1 \\ h(u_2, v) &= x_3 - y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &h(u_1, v) + h(u_2, v) = \\ &2x_3 - y_1 - y_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow h(u_1, v) + h(u_2, v) \neq h(u_1+u_2, v)$

$\Leftarrow h$ لا تعرّف صيغة خطية مرة ونصف المرة على $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

ملاحظة: ليكن X و Y فضاءين منظميين و h صيغة خطية مرة ونصف المرة على المجموعة $X \times Y$ عندئذٍ إذا وُجد ثابت $c > 0$ بحيث $|h(x, y)| \le c \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ عندئذٍ h محدود

كما نسمي العدد:

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \in X \setminus \{0\} \\ y \in Y \setminus \{0\}}} \frac{|h(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

$$= \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |h(x, y)|$$

نظيم h أي $\|h\|$ نظيم h.

ملاحظة (1): $|h(x, y)| \le \|h\| \, \|y\| \, \|x\|$

ملاحظة (2): الجداء الداخلي يعرّف صيغة خطية مرة ونصف المرة

مبرهنة: تمثيل ريس:

ليكن X_1 و X_2 فضاءين لهلبرت ولتكن $h : H_1 \times H_2 \to K$ صيغة محدودة وخطية مرة ونصف المرة عندئذٍ يكون لـ h التمثيل

$h(x, y) = \langle Sx, y \rangle$

حيث $S : H_1 \to H_2$

مؤثر خطي محدود ويتعين بصورة وحيدة بدلالة h ونظيمة تُعطى

بالمساواة : $\|S\| = \|h\|$

مؤثر هلبرت المرافق ليكن H_1 و H_2 فضاءين لـ هلبرت وليكن $T : H_1 \to H_2$ مؤثراً خطياً محدوداً ، يكون مؤثر هلبرت المرافق T^* للمؤثر T هو المؤثر $T^* : H_2 \to H_1$

بحيث يحقق المساواة : $\langle Tx , y \rangle = \langle x , T^* y \rangle$

$\forall x \in H_1 \quad y \in H_2$

مبرهنة الوجود مؤثر هلبرت المرافق T^* للمؤثر T موجود ووحيد وهو مؤثر محدود نظيمه يُعطى بالمساواة $\|T^*\| = \|T\|$

الاثبات :

ليكن $T : H_1 \to H_2$ مؤثر خطي ومحدود وليكن $h : H_2 \times H_1 \to K$

$h(y , x) = \langle y , Tx \rangle$ ... (*)

صيغة خطية مرة ونصف المرة على $H_2 \times H_1$ وذلك لأنَّ الجداء الداخلي هو صيغة خطية مرة ونصف المرة

$$|h(y,x)| \le |\langle y , Tx \rangle| \le \|y\| \, \|Tx\| \le c \, \|y\| \, \|x\|$$
$$= \|T\| \, \|y\| \, \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{|h(y,x)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \le \|T\|$$

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \in X \setminus \{0\} \\ y \in Y \setminus \{0\}}} \frac{|h(y,x)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \le \|T\| \Rightarrow \boxed{\|h\| \le \|T\|} \ ①$$

أي أنَّ h محدود

$$\|h\| = \sup_{\substack{y \ne 0 \\ x \ne 0}} \frac{|\langle y , Tx \rangle|}{\|y\| \cdot \|x\|} \ge \sup_{\substack{x \ne 0 \\ Tx \ne 0}} \frac{|\langle Tx , Tx \rangle|}{\|Tx\| \cdot \|x\|} =$$

$$\sup_{x \ne 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\| \Rightarrow \boxed{\|h\| \ge \|T\|} \ ②$$

من ① و ② نجد أنَّ $\|h\| = \|T\|$ ... ③

h خطية مرة ونصف المرة على $H_1 \times H_2$ عندئذٍ يكون لـ h حسب ريس التمثيل

$$h(y,x) = \langle Sy, x \rangle$$

نضع $S = T^*: H_2 \to H_1$

$$h(y,x) = \langle T^* y, x \rangle \quad (**)$$

عندئذٍ حسب مبرهنة ريس نلاحظ بأنّ $S = T^*$ مؤثر خطي ومحدود

$$\|T^*\| = \|h\| \quad (4)$$

من (3) و (4) نجد أنّ $\|T\| = \|T^*\|$

ومن (*) و (**) نجد أنّ $\langle y, Tx \rangle = \langle T^* y, x \rangle$

نأخذ مرافق الطرفين $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$

مبرهنة : خواص مؤثر هلبرت المرافق:

ليكن H_1 و H_2 فضاءين لهلبرت وليكن

$S: H_1 \to H_2$

$T: H_1 \to H_2$ مؤثرين خطيين محدودين وليكن α عدد ما

عندئذٍ نجد ما يلي

1. $\langle T^* y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle \quad x \in H_1 \ \& \ y \in H_2$
2. $(S+T)^* = S^* + T^*$
3. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
4. $T^{**} = (T^*)^* = T$
5. $\|TT^*\| = \|T^* T\| = \|T\|^2$
6. $TT^* = 0 \iff T = 0$
7. $(ST)^* = T^* S^*$; $H_1 = H_2 = H$

الاثبات :

اثبات

[1] $\langle T^* y, x \rangle = \overline{\langle x, T^* y \rangle} = \overline{\langle Tx, y \rangle} = \langle y, Tx \rangle$

اثبات

[2] $\langle x, (S+T)^* y \rangle = \langle (S+T)x, y \rangle =$
$\langle Sx, y \rangle + \langle Tx, y \rangle$
$= \langle x, S^* y \rangle + \langle x, T^* y \rangle$
$= \langle x, S^* y + T^* y \rangle = \langle x, (S^* + T^*) y \rangle$
$\Rightarrow (S+T)^* = S^* + T^*$

اثبات

[3] $\langle (\alpha T)^* y, x \rangle = \langle y, (\alpha T) x \rangle = \bar{\alpha} \langle y, Tx \rangle =$
$\bar{\alpha} \langle T^* y, x \rangle = \langle \bar{\alpha} T^* y, x \rangle$

اثبات

[4] $\langle (T^*)^* y, x \rangle = \langle y, T^* x \rangle = \langle Ty, x \rangle \Rightarrow$
$(T^*)^* = T$

اثبات

[5] $T^* . T : H_1 \to H_1$
$T . T^* : H_2 \to H_2$

ونجد بحسب متراجحة شوارتز $0 \leq \|Tx\|^2 \leq \langle Tx, Tx \rangle$
$= \langle T^* Tx, x \rangle \leq \|T^* T\| . \|x\|$

بأخذ Sup للطرفين عندما $\|x\| = 1$ نجد أنّ

$\boxed{\|T\|^2 \leq \|T^* T\|}$ (*)

$\|T^* T\| \leq \|T^*\| . \|T\| = \|T\|^2$ --- (**)

من (*) و (**) نجد أنّ $\|T^* T\| = \|T\|^2$

باستبدال T بـ T^* نجد:

$\|T . T^*\| = \|T^{**} . T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$
$\Rightarrow \|T . T^*\| = \|T^* . T\| = \|T\|^2$

اثبات [6] تنتج من [5] مباشرةً

اثبات

[7] $\langle x, (ST)^* y \rangle = \langle (ST) x, y \rangle = \langle Tx, S^* y \rangle =$
$\langle x, T^* S^* y \rangle$

$\Rightarrow (ST)^* y = (T^* S^*) y$

$\Rightarrow (ST)^* = T^* S^*$

انتهت المحاضرة