



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : نظرية المعادلات

المحاضرة : الاولى / عملي /

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z Facebook Group :

كلية العلوم ،

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الدكتور: .....

المحاضرة:

عالم الزوال



التاريخ: / /

**A to Z Library for university services**

القسم: رياضيات

السنة: الرابعة

المادة: نظرية المعادلات

السؤال الأول: أثبت أن الالة المعطاة تحقق شرط ليبتز على المناطق

التالي:

$$R_1 = \{(t, x) ; |t| \leq 1, |x| \leq 1\} \text{ على المجال } \textcircled{A} \quad f(t, x) = tx^2 \quad [1]$$

$$R_2 = \{(t, x) ; |t| \leq 1, |x| \leq \infty\} \text{ على المنطقة } \textcircled{B}$$

$$f(t, x) = \frac{t}{x} \quad [2]$$

$$R_1 = \{(t, x) ; |t| \leq 1, 1 \leq |x| \leq \infty\} \rightarrow ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

$$R_2 = \{(t, x) ; |t| \leq 1, |x| \leq 1\} \rightarrow x \in [-1, 1]$$

[3] حول المعادلة  $x'' + x^2 = 1$  الى جلة معادلات تفاضلية ثم تحقق شرط ليبتز

لا يتحقق شرط ليبتز على:

$$R_2 = \{(t, x_1, x_2) ; |t| \leq a, |x_1| \leq b, |x_2| \leq c\}$$

الكل

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in R ; |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \quad [1]$$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |tx_1^2 - tx_2^2|$$

$$= |t| |x_1^2 - x_2^2| = |t| |x_1 + x_2| |x_1 - x_2| \leq |t| [|x_1| + |x_2|] |x_1 - x_2|$$

$$\textcircled{A} (t, x_1), (t, x_2) \in R_1 \Rightarrow |t| \leq 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} |x_1| \leq 1 \\ |x_2| \leq 1 \end{array} \right.$$

$$|x_1| < 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x_1| < 1 \\ |x_2| < 1 \end{array} \right.$$



$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq [1+1] |x_1 - x_2|$$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq 2 |x_1 - x_2| \Rightarrow L=2$$

الشروط محقق

$$\textcircled{2} (t, x_1), (t, x_2) \in R_2 \Rightarrow |t| \leq 1, |x_1| \leq \infty, |x_2| \leq \infty$$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \rightarrow \infty \leftarrow x_2 \rightarrow \infty \text{ أو } x_1 \rightarrow \infty$$

الشروط ليست محقق

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in R: |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \quad \textcircled{2}$$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = \left| \frac{t}{x_1} - \frac{t}{x_2} \right| = |t| \cdot \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right|$$

$$= |t| \cdot \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right| = |t| \cdot \left| \frac{1}{x_1 x_2} \right| |x_1 - x_2|$$

$$\textcircled{1} (t, x_1), (t, x_2) \in R_1 \Rightarrow |t| \leq 1, 1 \leq |x_1| \leq \infty, 1 \leq |x_2| \leq \infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x_1|} \leq 1 \text{ و } \frac{1}{|x_2|} \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{x_1 x_2} \right| \leq 1$$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq 1 |x_1 - x_2| \Rightarrow L=1$$

الشروط محقق

$$\textcircled{2} (t, x_1), (t, x_2) \in R_2 \Rightarrow |t| \leq 1, |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{|x_1 x_2|} \geq 1$$

$$\left| \frac{1}{x_1 x_2} \right| \rightarrow \infty \leftarrow x_2 \rightarrow 0 \text{ أو } x_1 \rightarrow 0$$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \rightarrow \infty$$

الشروط ليست محقق

$$x_1' = x_2' = x_2$$

$$x_2' = x_2'' = 1 - x_2^2 = 1 - x_1^2$$



$$F(t, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 1-x_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\forall (t, x_1, x_2), (t, y_1, y_2) \in \mathbb{R}$$

$$|F(t, x_1, x_2) - F(t, y_1, y_2)| = \left| \begin{bmatrix} x_2 \\ 1-x_1^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_2 \\ 1-y_1^2 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} x_2 - y_2 \\ y_1^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (y_1^2 - x_1^2)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (y_1 - x_1)^2 (y_1 + x_1)^2}$$

$$|F(t, x_1, x_2) - F(t, y_1, y_2)| \leq \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2 (|y_1| + |x_1|)^2}$$

$$|y_1| \leq b, |x_1| \leq b$$

$$L = \max(1, 4b^2) \text{ يعرف}$$

$$\leq \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2 (4b^2)} \leq \sqrt{L^2 (x_2 - y_2)^2 + L^2 (x_1 - y_1)^2}$$

$$\leq \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2} = L |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)| \text{ بـ } L \text{ ليست صغرى}$$

[4] حول المعادلة  $x''' + x^2 = 1$  اوجد حلولاً متفاضلة ثم تحقق من شرط

ليست على المنطقة :

$$D = \{(t, x_1, x_2, x_3) : |t| \leq 1, |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, |x_3| \leq c\}$$

$$\text{تفردها } x''' = x_3, x_1' = x_2, x_2 = x_1$$

$$\left. \begin{matrix} x_1' = x_2 = x_2 \\ x_2' = x_3 = x_3 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x_3' = x_3 = 1 - x_1^2 = 1 - x_1^2 \end{matrix}$$

$$x_2' = x_3 = x_3$$



$$|F(t, x_1, x_2, x_3) - F(t, y_1, y_2, y_3)| = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 1-x_1^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ 1-y_1^2 \end{bmatrix}$$

$$|F(t, x_1, x_2, x_3) - F(t, y_1, y_2, y_3)| = \left| \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 1-x_1^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ 1-y_1^2 \end{bmatrix} \right|$$

$$\leq \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (y_1^2 - x_1^2)^2} \leq \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (y_1 - x_1)^2 (y_1 + x_1)^2}$$

$$\leq \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (y_1 - x_1)^2 (|x_1| + |y_1|)^2}$$

$$|x_1| \leq a, |y_1| \leq a$$

$$\leq \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (y_1 - x_1)^2 (4a^2)}$$

لنفرض  $L^2 = \max(1, 1, 4a^2)$

$$\leq \sqrt{L^2(x_2 - y_2)^2 + L^2(x_3 - y_3)^2 + L^2(y_1 - x_1)^2}$$

$$\leq L \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (y_1 - x_1)^2} \leq L |(x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3)|$$

الآن ب نحقق

$$(y_1 + x_1)^2 = |y_1 + x_1|^2 \leq [ |y_1| + |x_1| ]^2$$

$$f(t, x) = \frac{x^2 + 1}{x} t$$

وظيفة

تتفق في كل نقطة على المنطقة :

$$R_1 = \{ (t, x), 1 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq +\infty \}$$

$$R_2 = \{ (t, x), 1 \leq x \leq \infty, 0 \leq t \leq T \}$$

= The End =

الدكتور: .....

المحاضرة:

التاريخ: 2-



القسم: الرياضيات

السنة: الرابعة

المادة: تقنيات المعادلات

التاريخ: / /

### A to Z Library for university services

السؤال الأول: استخدم طريقة بيكارد لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$x(0) = 1, \quad x' = -x \quad f(t, x) = -x$$

وأوجد الحل الحقيقي

$$x_m = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{m-1}(s)) ds \quad ; \quad x_0 = 1, \quad t_0 = 0$$

$$x_1 = 1 + \int_0^t f(s, x_0) ds = 1 + \int_0^t (-x_0) ds = 1 - \int_0^t ds = 1 - s \Big|_0^t = 1 - t$$

$$x_2 = 1 + \int_0^t f(s, x_1) ds = 1 + \int_0^t (-x_1) ds = 1 + \int_0^t (s-1) ds = 1 + \frac{t^2}{2} - t$$

$$= 1 - t + \frac{t^2}{2}$$

$$x_3 = 1 + \int_0^t f(s, x_2) ds = 1 + \int_0^t (-x_2) ds = 1 + \int_0^t (-1 + s - \frac{s^2}{2}) ds$$

$$x_n = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n!} \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e^{-t}$$

$$x' = -x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dt \Rightarrow x = C \cdot e^{-t} \Rightarrow x(0) = 1 \Rightarrow t = C \quad \text{cloud } x = e^{-t}$$

السؤال الثاني: أوجد التقريب الرابع حسب بيكارد  $y(0) = 1, \quad y' = y + x$

ثم أوجد الحل الحقيقي

$$y_m = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{m-1}(s)) ds \quad y_0 = 1, \quad x_0 = 0$$

$$y_1 = 1 + \int_0^x f(s, 1) ds = 1 + \int_0^x (s+1) ds = 1 + \left[ \frac{s^2}{2} + s \right]_0^x$$

$$= 1 + \left[ \frac{x^2}{2} + x \right]$$



$$y_2 = 1 + \int_0^x f(s, y_1) ds = 1 + \int_0^x (s + y_1) ds = 1 + \int_0^x (s + 1 + \frac{s^2}{2} + s) ds$$

$$= 1 + \int_0^x (2s + 1 + \frac{s^2}{2}) ds = 1 + [s^2 + s + \frac{s^3}{6}]_0^x = 1 + x^2 + x + \frac{x^3}{6}$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x f(s, y_2) ds = 1 + \int_0^x (s + 1 + s^2 + s + \frac{s^3}{6}) ds$$

$$= 1 + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + x$$

$y_4$  (نفس الطريقة)

$\int p(x) dx$

(طريقة)  $y' - y = x \Rightarrow \mu = e^{-x} \quad = e^{-x}; y = \frac{1}{\mu} [c + \int \mu q dx]$

$$= e^x [c + \int x e^{-x} dx]$$

$$= e^x [c + [-x e^{-x} - e^{-x}]] = c e^x - x - 1$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c - 0 - 1 = 1 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow y = 2e^x - x - 1$$

أو من التقريب الناتج  $y' = xy$   $y(0) = 1$   
 وأيضاً الحل الحقيقي

وظيفة

The End



مكتبة AZ to Z