كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا عامة2

المحاضرة : الثانية /عملي/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

تمارين (2)

1. نعرف على المجموعة $X = \{1,2,3,4,5\}$ التبولوجيا:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4,5\}\}$$

a. إذا كانت $B = \{1,2,3\}$ أوجد B° ، $ex(B)$.

b. لنأخذ المجموعة $A = \{1,5,4\}$، تحقق من صحة أو خطأ كل من العبارات الآتية:

1. $\bar{A} = A$ 2. $1 \in \acute{A}$ 3. A مجموعة كثيفة في كل مكان في (X, τ).

4. $5 \in \acute{A}$ و لكن $4 \notin \acute{A}$ 5. A مجموعة مغلقة في (X, τ).

2. أثبت صحة العلاقات الآتية:

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ 2. $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ برهن بمثال عدم صحة الاحتواء المعاكس.

3. $bd(A) = \bar{A} \backslash A^{\circ}$ 4. $X \backslash \bar{A} = (X \backslash A)^{\circ}$

3. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية و لنعرف عليها تبولوجيا المتممات المنتهية τ_{cof}، لنأخذ المجموعات الآتية: $A = \{1,7,12\}$ ، $B = [6,24]$

و المطلوب إيجاد: $A^{\circ}, \bar{A}. \acute{A}, B^{\circ}, \bar{B}, \acute{B}$

4.ليكن $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ الفضاء الحقيقي العادي، و لنأخذ فيه المجموعات:

$$Y =]-9,12[, A = \{0,3,7\}, B =]-9,12], C = [-5,7], D =]-3,4[$$

حدد نوع كل من المجموعات A, B, C, D في الفضاء الجزئي (Y, τ_Y) و أوجد $\bar{D}_Y$.

تمارين (2)

1. نعرف على المجموعة $X = \{1,2,3,4,5\}$ التبولوجيا:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4,5\}\}$$

a. إذا كانت $B = \{1,2,3\}$ أوجد B° ، $ex(B)$. الحل:

$$B^\circ = \{1\}, ex(B) = \emptyset$$

b. لنأخذ المجموعة $A = \{1,5,4\}$، تحقق من صحة أو خطأ كل من العبارات الآتية:

إن أسرة المجموعات المغلقة هي:$\mathcal{F} = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5\}, \{1,2,5\}, \{2,5\}, \{1\}\}$

1. $\bar{A} = A$ خاطئة لأن $\bar{A} = X$
2. $1 \in \acute{A}$ خاطئة لأن $\{1\} \in V(1) \,\&\, \{1\} \cap A = \{1\}$
3. A مجموعة كثيفة في كل مكان في (X, τ). صحيحة لأن $\bar{A} = X$
4. $5 \in \acute{A}$ و لكن $4 \notin \acute{A}$ صحيحة $V(5) = \{X, \{2,3,4,5\}\}$

$\{2,3,4,5\} \in V(5) \,\&\, \{2,3,4,5\} \cap A = \{4,5\} \neq \{5\}, \emptyset$

و$X \in V(5) \,\&\, X \cap A \neq \emptyset, \{5\}$ بالتالي $5 \in \acute{A}$

و $4 \notin \acute{A}$ لأن $\{3,4\} \in V(4) \,\&\, \{3,4\} \cap A = \{4\}$

5. A مجموعة مغلقة في (X, τ). خاطئة لأن $\bar{A} = X \neq A$.

2. أثبت صحة العلاقات الآتية:

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ 2. $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ برهن بمثال عدم صحة الاحتواء المعاكس.
3. $bd(A) = \bar{A} \backslash A^\circ$ 4. $X \backslash \bar{A} = (X \backslash A)^\circ$

الحل:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$$
$$B \subseteq A \cup B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$
$$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \quad \ldots . I$$

من جهة ثانية لدينا:

$A \subseteq \bar{A} \,\&\, B \subseteq \bar{B}$ بالتالي: $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$

إذاً $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{A} \cup \bar{B}$ لأن $\bar{A} \cup \bar{B}$ مجموعة مغلقة

$\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B} \qquad \ldots II$

من علاقتي الاحتواء و الاحتواء المعاكس نجد أن: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

.2 $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

$$A \cap B \subseteq A \implies \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A}$$

$A \cap B \subseteq B \implies \overline{A \cap B} \subseteq \bar{B}$ بالتالي:

$$\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$$

الاحتواء المعاكس غير محقق بالضرورة كما يبين المثال الآتي:

لنأخذ $X = \{a, b, c\}$ و $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$

بالتالي تكون $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{c\}\}$ من أجل $A = \{a\}\,, B = \{c\}$

فإن $A \cap B = \emptyset$ و منه:

$$\overline{A \cap B} = \emptyset\,, \bar{A} = X\,, \bar{B} = B$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = X \cap B = B \neq \emptyset = \overline{A \cap B}$$

.3 $bd(A) = \bar{A} \backslash A^{\circ}$

$$bd(A) = \bar{A} \cap \overline{X \backslash A} = \bar{A} \cap (X \backslash A^{\circ}) = \bar{A} \backslash A^{\circ}$$

.4 $(X \backslash A)^{\circ} = X \backslash \bar{A}$

$A \subseteq \bar{A} \implies X \backslash \bar{A} \subseteq X \backslash A \implies (X \backslash \bar{A})^{\circ} \subseteq (X \backslash A)^{\circ}$ أي أن:

$$X \backslash \bar{A} \subseteq (X \backslash A)^{\circ}$$

من جهة ثانية :

$$(X \backslash A)^{\circ} \subseteq X \backslash A \implies A \subseteq X \backslash (X \backslash A)^{\circ}$$

$\bar{A} \subseteq \overline{X \backslash (X \backslash A)^{\circ}}$ و منه

$$\bar{A} \subseteq X \backslash (X \backslash A)^{\circ}$$

و منه:

$$(X \backslash A)^{\circ} \subseteq X \backslash \bar{A}$$

من علاقتي الاحتواء و الاحتواء المعاكس نجد أن:

$$(X \backslash A)^{\circ} = X \backslash \bar{A}$$

.5 إضافي:

$$\overline{X\backslash A} = X\backslash A^{\circ}$$

أي أن: $A^{\circ} \subseteq A \implies X\backslash A \subseteq X\backslash A^{\circ} \implies \overline{X\backslash A} \subseteq \overline{X\backslash A^{\circ}} = X\backslash A^{\circ}$

$$\overline{X\backslash A} \subseteq X\backslash A^{\circ}$$

من جهة ثانية :

$$X\backslash A \subseteq \overline{X\backslash A} \implies X\backslash\left(\overline{X\backslash A}\right) \subseteq X\backslash(X\backslash A) = A$$

و منه: $X\backslash\left(\overline{X\backslash A}\right) \subseteq A \implies \left(X\backslash\left(\overline{X\backslash A}\right)\right)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \implies X\backslash\left(\overline{X\backslash A}\right) \subseteq A^{\circ}$

و بالتالي $X\backslash A^{\circ} \subseteq \overline{X\backslash A}$ من علاقتي الاحتواء و الاحتواء المعاكس نجد أن:

$$\overline{X\backslash A} = X\backslash A^{\circ}$$

.3 لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية و لنعرف عليها تبولوجيا المتممات المنتهية τ_{cof}، لنأخذ المجموعات الآتية: $A = \{1,7,12\}$ ، $B = [6,24]$

و المطلوب إيجاد: $A^{\circ}, \bar{A}. \acute{A}, B^{\circ}, \bar{B}, \acute{B}$

الحل:

في الفضاء $\left(\mathbb{R}, \tau_{cof}\right)$ لدينا: $\tau_{cof} = \left\{T \in P(\mathbb{R}): \mathbb{R}\backslash T \text{ مجموعة منتهية}\right\} \cup \{\emptyset\}$

و فيه تكون جميع عناصر τ_{cof} مجموعات غير منتهية باستثناء المجموعة $\emptyset$

المجموعة A مجموعة منتهية فالمجموعة المفتوحة الوحيدة المحتواة فيها هي المجموعة الخالية $\emptyset$ و عليه تكون $A^{\circ} = \emptyset$.

لإيجاد B°: نفرض جدلاً وجود مجموعة مفتوحة غير خالية محتواة في B أي $T \subseteq B$ عندئذٍ يكون: $\mathbb{R}\backslash B \subseteq \mathbb{R}\backslash T$ لكن $\mathbb{R}\backslash T$ مجموعة منتهية حسب تعريف الأسرة τ_{cof} و المجموعة $\mathbb{R}\backslash B$ مجموعة غير منتهية، أي لدينا مجموعة غير منتهية محتواة في مجموعة منتهية و هذا تناقض سببه الفرض الجدلي الخاطئ، فالصحيح هو أن المجموعة المفتوحة الوحيدة المحتواة في B هي المجموعة الخالية $\emptyset$ و عليه تكون $B^{\circ} = \emptyset$

إيجاد $\bar{A}, \bar{B}$:

إن أسرة المجموعات المغلقة في هذا الفضاء هي:

$$\mathcal{F} = \left\{F \in P(\mathbb{R}): F \text{ مجموعة منتهية}\right\} \cup \{\mathbb{R}\}$$

نلاحظ أن A مجموعة منتهية فهي مغلقة و بالتالي $\bar{A} = A$، بالنسبة للمجموعة B:

نلاحظ أن جميع عناصر الأسرة $\mathcal{F}$ باستثناء المجموعة $\mathbb{R}$ هي مجموعات منتهية و بما أن B مجموعة غير منتهية فإن المجموعة المغلقة الوحيدة التي تحويها هي $\mathbb{R}$ فهي أصغر مجموعة مغلقة تحوي B بالتالي: $\bar{B} = \mathbb{R}$.

إيجاد $\acute{B}$ و $\acute{A}$:

نعلم أن $\acute{A} \subseteq \bar{A}$ و وجدنا أن $\bar{A} = A$ بالتالي $\acute{A} \subseteq A$ لذا يكفي أن ندرس نقاط المجموعة A

من أجل النقطة $1 \in A$: نأخذ المجموعة $V_1 = \mathbb{R}\backslash\{7,12\}$ متممتها المجموعة $\{7,12\}$ و هي مجموعة منتهية و هذا يعني أن $V_1 \in \tau_{cof}$ و لكونها مجموعة مفتوحة في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ فهي مجاورة لكل نقطة من نقاطها أي أن $V_1 \in V(1)$، لدينا:

$V_1 \cap A = \mathbb{R}\backslash\{7,12\} \cap \{1,7,12\} = \{1\}$ و بحسب تعريف نقطة التراكم فإن $1 \notin \acute{A}$

من أجل النقطة 7 نأخذ المجموعة $V_7 = \mathbb{R}\backslash\{1,12\}$ و بمناقشة مماثلة نجد $7 \notin \acute{A}$

و من أجل 12 نأخذ المجموعة $V_7 = \mathbb{R}\backslash\{1,7\}$ و بمناقشة مماثلة نجد $12 \notin \acute{A}$

أي أن أياً من نقاط المجموعة A ليست نقطة تراكم لها و كون $\acute{A} \subseteq A$، نستنتج أن: $\acute{A} = \emptyset$.

إيجاد $\acute{B}$: وجدنا أن $\bar{B} = \mathbb{R}$ و نعلم أن $\bar{B} = B \cup \acute{B}$ بالتالي $B \cup \acute{B} = \mathbb{R}$ هذه العلاقة تعني أن جميع نقاط $\mathbb{R}\backslash B$ هي نقاط تراكم للمجموعة B أي أن $\mathbb{R}\backslash B \subseteq \acute{B}$ ، لندرس نقاط المجموعة B: لتكن x نقطة كيفية من المجموعة B و لنفرض جدلاً أن $x \notin \acute{B}$ هذا يعني وجود مجاورة $V \in V(x)$ بحيث أن $V \cap B = \emptyset$ أو $V \cap B = \{x\}$ أو $(V\backslash\{x\}) \cap B = \emptyset$، و بحسب تعريف المجاورة توجد مجموعة مفتوحة T بحيث أن: $x \in T \subseteq V$ و منه:

$(T\backslash\{x\}) \cap B \subseteq (V\backslash\{x\}) \cap B = \emptyset$ بالتالي:

$(T\backslash\{x\}) \cap B \subseteq \emptyset$ إذاً $(T\backslash\{x\}) \cap B = \emptyset$

و هذه العلاقة تعني أن $B \subseteq \mathbb{R}\backslash(T\backslash\{x\})$ و هذا تناقض لأن B مجموعة غير منتهية بينما $\mathbb{R}\backslash T$ مجموعة منتهية سبب التناقض الفرض الجدلي الخاطئ بأن $x \notin \acute{B}$ فالصحيح أن $x \in \acute{B}$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة x من المجموعة B نجد أن $B \subseteq \acute{B}$ مما سبق نجد أن $B \cup (\mathbb{R}\backslash B) \subseteq \acute{B}$ أي أن $\mathbb{R} \subseteq \acute{B}$ و هذا يكافئ القول أن $\acute{B} = \mathbb{R}$.

4. ليكن $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ الفضاء الحقيقي العادي، و لنأخذ فيه المجموعات:

$Y =]-9,12[, A = \{0,3,7\}, B =]-9,12], C = [-5,7], D =]-3,4[$

حدد نوع كل من المجموعات A, B, C, D في الفضاء الجزئي (Y, τ_Y) و أوجد $\overline{D}_Y$.

الحل:

بما أن المجموعة $Y =]-9,12[$ مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ كونها مجال مفتوح فإن الشرط اللازم و الكافي لتكون أي مجموعة جزئية من Y هي مجموعة مفتوحة في الفضاء (Y, τ_Y) هو أن تكون مفتوحة في $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$.

المجموعة $A = \{0,3,7\}$:

بما أن $A = \{0,3,7\}$ ليست مجال مفتوح في $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ فهي ليست مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ و بالتالي لا يمكن أن تكون مجموعة مفتوحة في (Y, τ_Y). بملاحظة أن : $\mathbb{R} \backslash A =]-\infty, 0[\cup]0,3[\cup]3,7[\cup]7, +\infty[$ و هي مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ لأنها اجتماع لمجالات مفتوحة فيه، فإن المتممة و هي المجموعة $A = \{0,3,7\}$ تكون مغلقة في $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ ، و من جهة ثانية إن: $Y \cap A = A$ أي أنه وجدت مجموعة مغلقة في $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ هي $F = A$ بحيث يكون $Y \cap F = A$ أي أن A مجموعة مغلقة في (Y, τ_Y) .

المجموعة B:

بما أن $]-9,12[\not\subseteq]-9,12]$ المجموعة ليست من نقاط الفضاء إذاً لا تدرس.

المجموعة C:

بما أن $C = [-5,7]$ ليست مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ فهي لا يمكن أن تكون مجموعة مفتوحة في (Y, τ_Y).

المجموعة $C = [-5,7]$ مجموعة مغلقة في $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ و تحقق $Y \cap C = C$ أي أنه وجدت مجموعة مغلقة في $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ هي $F = C$ بحيث يكون $Y \cap F = C$ أي أن C مجموعة مغلقة في (Y, τ_Y) .

المجموعة D:

بما أن $D =]-3,4[$ مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ كونها مجال مفتوح و $Y =]-9,12[$ مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ ، فهي مجموعة مفتوحة في (Y, τ_Y).

$$\overline{D}_Y = \overline{D}_{\mathbb{R}} \cap Y = [-3,4] \cap]-9,12[= [-3,4] \neq D$$

بما أن لصاقة المجموعة D لا تساويها في الفضاء (Y, τ_Y) فلا يمكن أن تكون مغلقة فيه.