كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا2

المحاضرة : الثالثة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

الأساس و تحت الأساس في الفضاءات التبولوجية

تعريف:

إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً، و كانت β أسرة كيفية من المجموعات المفتوحة في الفضاء (X,τ)، عندئذٍ يقال عن الأسرة β إنها تعرف قاعدة (أساس) للتبولوجيا τ إذا و فقط إذا كان: $T=\bigcup_{B\in\beta} B\ \ ,\forall T\in\tau$

ملاحظات و نتائج:

1. الأسرة β قاعدة للفضاء التبولوجي (X,τ) إذا و فقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

$1.\ \beta\subseteq\tau$ و $2.\ T=\bigcup_{B\in\beta} B\ \ ,\forall T\in\tau$

2. إذا كانت β قاعدة للفضاء التبولوجي (X,τ) و كانت β^* أسرة تحقق $\beta\subseteq\beta^*\subseteq\tau$ عندئذٍ تكون β^* قاعدة للفضاء التبولوجي (X,τ) أيضاً.

بكلامٍ آخر: إن أي أسرة مجموعات مفتوحة تحوي قاعدة للتبولوجيا τ فإنها تشكل قاعدة لها أيضاً.

3. إذا كانت β أسرة كيفية من المجموعات المفتوحة في الفضاء (X,τ)، عندئذٍ تكون β قاعدة للتبولوجيا τ إذا و فقط إذا كان من أجل كل مجموعة $T\in\tau$ و كل $x\in T$ يوجد عنصر $B_x\in\beta$ بحيث يكون $x\in B_x\subseteq T$.

إثبات: $\Leftarrow$

لدينا بالفرض β قاعدة للتبولوجيا τ و لتكن T مجموعة مفتوحة كيفية في الفضاء (X,τ) و x نقطة كيفية من نقاط T ، بما أن β قاعدة للتبولوجيا τ و كل مجموعة مفتوحة كيفية في الفضاء (X,τ) تكتب على شكل اجتماع لعناصر من β فإن: $T=\bigcup_{i\in I} B_i,\ \ B_i\in\beta$ وكون $x\in T$ فإن $x\in\bigcup_{i\in I} B_i$ و هذا يعني وجود دليل واحد على الأقل $i_0\in I$ بحيث $x\in B_{i_0}$ بالتالي بوضع $B_x=B_{i_0}$ نجد أن $x\in B_x\subseteq T$.

$\Longrightarrow$:

لدينا بالفرض β أسرة كيفية من المجموعات المفتوحة في الفضاء (X,τ) و أنه من أجل كل مجموعة $T\in\tau$ و كل $x\in T$ يوجد عنصر $B_x\in\beta$ بحيث يكون $x\in B_x\subseteq T$، لنبرهن أن β قاعدة للتبولوجيا τ

لدينا فرضاً $\beta \subseteq \tau$ و لنأخذ T مجموعة مفتوحة كيفية في الفضاء (X,τ) عندئذٍ إما أن تكون $T=\emptyset$ و عندئذٍ يكون $T=\bigcup_{i\in\emptyset} B_i$ أو $T\neq\emptyset$ و بالتالي بحسب الفرض من أجل كل $x\in T$ يوجد عنصر $B_x\in\beta$ بحيث يكون $x\in B_x\subseteq T$ أي $\{x\}\subseteq B_x\subseteq T$ و بالتالي: $\bigcup_{x\in T}\{x\}\subseteq\bigcup_{x\in T}B_x\subseteq T$ و منه $T=\bigcup_{x\in T}\{x\}\subseteq\bigcup_{x\in T}B_x\subseteq T$ أي $T=\bigcup_{x\in T}B_x$.

بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة T من τ نجد أن كل مجموعة مفتوحة في الفضاء (X,τ) تكتب على شكل اجتماع لعناصر من β و هذا يعني أن β قاعدة للتبولوجيا τ.

مثال: لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau=\{X,\emptyset,\{c\},\{d\},\{c,d\}\}$، و لنأخذ $S=\{\{c\},\{d\}\}$ لدينا $\{c\}\in\tau$ و $\{d\}\in\tau$ أي أن: $S\subseteq\tau$ لكن X لا تكتب على شكل اجتماع لعناصر من S فهي لا تشكل قاعدة للتبولوجيا τ .

مبرهنة:

إذا كانت $X\neq\emptyset$ مجوعة كيفية، و كانت $\beta\subseteq P(X)$ أسرة كيفية، عندئذٍ تكون الأسرة β قاعدة لتبولوجيا ما معرفة على X إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1. المجموعة X تساوي اجتماعاً لعناصر من الأسرة β .
2. تقاطع أي عنصرين من الأسرة β يساوي اجتماعاً لعناصر من الأسرة β .

إثبات:

$\Leftarrow$

لدينا بالفرض أن الأسرة β قاعدة لتبولوجيا ما معرفة على X لنبرهن تحقق الشرطين $(1\&2)$

بما أن $X\in\tau$ و β قاعدة للتبولوجيا τ فإن X تساوي اجتماعاً لعناصر من β و ذلك بحسب تعريف القاعدة، و الشرط الأول محقق.

بالتالي فإن $B\cap C\in\tau$ و منه إن $B\cap C$ يساوي اجتماعاً لعناصر من الأسرة β و ذلك بحسب تعريف القاعدة، و الشرط الثاني محقق.

$\Longrightarrow$:

لدينا بالفرض أن الأسرة $\beta\subseteq P(X)$ تحقق الشرطين $(1\&2)$ و لنبرهن أنها تشكل قاعدة لتبولوجيا ما معرفة على X.

نعرف الأسرة τ على الشكل الآتي: $\tau=\{T\in P(X), T=\text{اجتماع لعناصر من }\beta\}$

نلاحظ بحسب الشرط (1) أن المجموعة X تساوي اجتماعاً لعناصر من الأسرة β و هذا يعني

أن $X \in \tau$ ، ثم إن $\emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset} B_i, B_i \in \beta$ و منه $\emptyset \in \tau$ و الشرط الأول من تعريف التبولوجيا محقق.

الآن لتكن $\{T_i, i \in I\}$ أسرة جزئية من τ عندئذٍ بحسب تعريف الأسرة τ من أجل كل $i \in I$ فإن T_i تساوي اجتماعاً لعناصر من الأسرة β و بالتالي $\bigcup_{i\in I} T_i = \bigcup (\bigcup B_i)$ أي أن $\bigcup_{i\in I} T_i$ تساوي اجتماعاً لعناصر من الأسرة β فهو يحقق تعريف الأسرة τ ومنه $\bigcup_{i\in I} T_i \in \tau$ و الشرط الثاني من تعريف التبولوجيا محقق.

لنأخذ $T, G \in \tau$ عنصرين كيفيين من عناصر الأسرة τ ومنه إن $T = \bigcup_{i\in I} B_i$ و $G = \bigcup_{j\in J} B_j$ و بالتالي يكون:

$T \cap G = (\bigcup_{i\in I} B_i) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i,j}\left(B_i \cap B_j\right)$ و لكن بحسب الشرط (2) المحقق فرضاً فإن $B_i \cap B_j$ يساوي اجتماعاً لعناصر من الأسرة β بالتالي إن $T \cap G$ يساوي اجتماعاً لعناصر من الأسرة β و منه $T \cap G \in \tau$ و الشرط الثالث من تعريف التبولوجيا محقق.

نستنتج أن الأسرة τ تعرف تبولوجيا على X، من جهة ثانية لدينا:

$\forall B \in \beta: B = B \cup B \implies B \in \tau$ و بالتالي $\beta \subseteq \tau$ ثم إنه من تعريف الأسرة τ نجد أنه من أجل كل $T \in \tau$ إن T يساوي اجتماعاً لعناصر من الأسرة β و هذا يعني أن الأسرة β قاعدة للتبولوجيا τ .

مثال: لتكن $X = \{1,2,3,4,5\}$ و لنأخذ الأسرة $S = \left\{\{1,3\}, \{2,3\}, X\right\}$

نلاحظ أن: $\{1,3\} \cap \{2,3\} = \{3\}$ لا تكتب على شكل اجتماع لعناصر من S فهي لا تشكل قاعدة لتبولوجيا ما معرفة على X.

انتهت المحاضرة 3